УДК 519.87:316.458.6

В.Б. Кононов[1], Ю.И. Кушнерук[2], А.В. Коваль[1]

[1] *Харьковский университет Воздушных Сил им. Ивана Кожедуба, Харьков*
[2] *Академия внутренних войск МВД Украины, Харьков*

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО СОСТАВА ВООРУЖЕНИЙ ОПЕРИРУЮЩЕЙ ГРУППИРОВКИ ПРИ ФИКСИРОВАННЫХ РЕСУРСАХ

В статье рассмотрены вопросы, связанные с математической моделью задачи выбора состава вооружения оперирующей группировки войск при фиксированных ресурсах.

Ключевые слова: *состав вооружения, группировка войск, бюджетные ограничения.*

Введение

Постановка задачи. Задачи определения состава вооружения оперирующей группировки войск необходимо решать, исходя из требований оптимального распределения имеющихся боевых средств для достижения максимально возможного эффекта их использования, учитывая при этом бюджетные ограничения на создание оперирующей группировки войск. Разработка соответствующих моделей, используемых для определения состава вооружений, представляет собой военно-научную задачу, актуальность решения которой определяется необходимостью разработки подсистемы поддержки принимаемых решений, входящих в создаваемую автоматизированную систему управления войсками и оружием.

Анализ литературы. В известной литературе, посвящённой исследованию операций в боевых действиях [1 – 3], рассматриваются вопросы применения методов исследования операций при решении задач управления ресурсами в ходе боевых действий. При этом основное внимание уделено статическим динамическим моделям, с помощью которых определяется эффект операции. В [4] рассмотрено математическое описание задач оптимального управления распределением боевых средств в ходе операции и предложены методы их решения. Статические и динамические модели, с помощью которых описываются боевые действия, рассмотрены в [5]. Однако в работах [1 – 5] не рассматривались модели, которые возможно применить для определения состава вооружений оперирующей группировки войск, для получения максимального результата в операции при фиксированных ресурсах, отводимых на создание оперирующей группировки войск и оптимальном их распределении.

Целью статьи является разработка математической модели, используемой для определения состава вооружений оперирующей группировки войск, обеспечивающий получение максимального результата в операции при фиксированных ресурсах, отводимых на создание оперирующей группировки войск и оптимальном их распределении. Разрабатываемая модель должна быть универсальной и применимой при обосновании вооружений группировки в случае их замены, наращивания, частичной замены и наращивания.

Основной материал

Приведём формализацию рассматриваемой задачи. Прежде всего, изложим условия проведения операции, в которой группировке A противостоит группировка B, и определим задачи оперирующей группировки. Необходимо найти оптимальный состав вооружений группировки A, перед которой поставлена задача обеспечить максимум математического ожидания уничтоженных боевых средств группировки B, с учётом их важности, при заданном бюджете финансовых средств для группировки A и с учётом противодействия противника. В ходе боевых действий принято, что:

– группировка B наносит удар первой;

– группировка A наносит ответный удар сохранившимися боевыми средствами.

При этом примем, что считаются заданными следующие параметры:

m – количество типов боевых средств группировки A;

n – количество типов боевых средств группировки B;

$p_{ij}\left(i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n}\right)$ – вероятность поражения боевым средством i-го типа группировки A боевого средства j-го типа группировки B, причём, если боевое средство i-го типа группировки A в силу своих характеристик не может поразить боевое средство j-го типа группировки B, то очевидно, что $p_{ij}=0$;

$q_{ji}\left(i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n}\right)$ – вероятность поражения боевым средством j-го типа группировки B боевого

© В.Б. Кононов, Ю.И. Кушнерук, А.В. Коваль

средства i-го типа группировки A, причём $q_{ji} = 0$ в случае невозможности такого поражения;

$y_j \left(j = \overline{1, n}\right)$ – количество боевых средств j-го типа группировки B;

$d_i \left(i = \overline{1, m}\right)$ – количество средств поражения i-го типа группировки A в боекомплекте;

C_0 – выделенный бюджет для группировки A;

$c_i \left(i = \overline{1, m}\right)$ – стоимость боевого средства i-го типа группировки A, включающая стоимость боекомплекта;

$w_j \left(j = \overline{1, n}\right)$ – коэффициент важности боевых средств j-го типа группировки B.

В качестве искомых управляющих параметров рассматриваются следующие:

$x_{ij} \left(i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}\right)$ – количество боевых средств i-го типа группировки A, воздействующих на y_j боевых средств j-го типа группировки B.

При разработке соответствующей стоимостной модели, используемой для определения состава вооружения, будем исходить из необходимости решения следующей задачи математического программирования, предложенной в [4]:

$$M(X) = \sum_{j=1}^{n} w_j y_j \left[1 - \prod_{i=1}^{m} \left(1 - p_{ij} + p_{ij} q_{ji}\right)^{\frac{x_{ij}}{y_j}} \right] \to \max;$$

$$\sum_{i=1}^{m} c_i \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le C_0; \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} k_{ij} y_i \le d_i \sum_{j=1}^{n} x_{ij}; \quad i = \overline{1, m};$$

$$x_{ij} = \left[x_{ij}\right] \ge 0; \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n},$$

где $1 - p_{ij} + p_{ij} q_{ji}$ – вероятность непоражения боевым средством i-го типа группировки A боевого средства j-го типа группировки B при условии, что боевое средство j-го типа группировки B наносит удар первой;

$\left(1 - p_{ij} + p_{ij} q_{ji}\right)^{\frac{x_{ij}}{y_j}}$ – вероятность непоражения боевого средства j-го типа группировки B при условии, что x_{ij} боевых средств i-го типа группировки A равномерно распределено для поражения y_j боевых средств j-го типа группировки B с учётом того, что противодействующая группировка B наносит удар первой;

$1 - \left(1 - p_{ij} + p_{ij} q_{ji}\right)^{\frac{x_{ij}}{y_j}}$ – вероятность поражения боевого средства j-го типа группировки B при условии, что x_{ij} боевых средств i-го типа группировки A равномерно распределено для поражения y_j боевых средств j-го типа группировки B с учётом того, что противодействующая группировка B наносит удар первой;

$1 - \prod_{i=1}^{m} \left(1 - p_{ij} + p_{ij} q_{ji}\right)^{\frac{x_{ij}}{y_j}}$ – вероятность поражения боевого средства j-го типа группировки B при условии, что x_{1j} боевых средств 1-го типа, x_{2j} боевых средств 2-го типа, и т.д. x_{mj} боевых средств m-го типа группировки A равномерно распределено по каждому типу в отдельности для поражения y_j боевых средств j-го типа группировки B с учётом того, что противодействующая группировка B наносит удар первой;

$y_j \left[1 - \prod_{i=1}^{m} \left(1 - p_{ij} + p_{ij} q_{ji}\right)^{\frac{x_{ij}}{y_j}} \right]$ – математическое ожидание количества поражённых боевых средств j-го типа группировки B при условии, что $x_{ij} \left(i = \overline{1, m}\right)$ боевых средств каждого типа группировки A равномерно распределено для поражения y_j боевых средств j-го типа группировки B с учётом того, что противодействующая группировка B наносит удар первой;

$M(X) = \sum_{j=1}^{n} w_j y_j \left[1 - \prod_{i=1}^{m} \left(1 - p_{ij} + p_{ij} q_{ji}\right)^{\frac{x_{ij}}{y_j}} \right]$ – математическое ожидание суммарного количества поражённых боевых средств всех типов группировки B с учётом их важности и при условии, что $x_{ij} \left(i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}\right)$ боевых средств каждого типа группировки A равномерно распределено для поражения всех типов боевых средств $y_j \left(j = \overline{1, n}\right)$

группировки B с учётом того, что боевые средства всех типов группировка B наносят удар первыми;

$\sum_{i=1}^{m} c_i \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le C_0$ – ограничение на выделенный бюджет;

$\sum_{j=1}^{n} k_{ij} y_j \le d_i \sum_{j=1}^{n} x_{ij}; \quad i = \overline{1, m}$ – ограничение на количество средств поражения для всех боевых средств i – го типа;

$x_{ij} = \lfloor x_{ij} \rfloor \ge 0; \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}$ – ограничения на целочисленность и неотрицательность управляющих параметров;

$X = \left\| x_{ij} \right\|_{m,n}$ – матрица, определяющая план распределения разнородных боевых средств группировки A по разнородным боевым средствам группировки B.

В модели (1) принято, что количество выстрелов, проводимых боевым средством i-го типа группировки A, необходимых для поражения боевого средства j-го типа группировки B с заданной вероятностью поражения $p_з$

$$k_{ij} = \left\lfloor \frac{\lg\left(1 - p_з\right)}{\lg\left\{1 - \left(1 - q_{ji}\right) p_{ij}\right\}} \right\rfloor = 0 \text{, если } p_{ij} = 0.$$

Таким образом, если $X^* = \left\| x_{ij}^* \right\|_{m,n}$ – оптимальное решение задачи (1), то соотношения

$$x_i^* = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^*, \quad i = \overline{1, m} \tag{2}$$

позволяют определить оптимальный количественный и качественный состав вооружения группировки A.

Модель (1) может быть применима для решения следующих разновидностей задач выбора оптимального состава вооружения группировки A:

– замены состава вооружения (определения качественного изменения состава вооружения);

– наращивания состава вооружения (определения количественного изменения состава вооружения);

– частичной замены и наращивания состава вооружения (определения количественного и качественного изменения состава вооружения).

Задача замены состава вооружения состоит в том, что осуществляется замена одних типов вооружения на вооружения других типов. Эта задача может возникнуть в ситуации, когда при моделировании боевых действий в ходе учений выявляется непригодность определённых типов вооружения и принимается решение об их замене.

Для решения этой задачи с помощью модели (1) дополнительно введём обозначения:

$I = \{1, 2, \cdots, m\}$ – множество номеров типов боевых средств, имеющихся на вооружении группировки A;

I_1 – подмножество номеров типов боевых средств, подлежащих замене из состава вооружения группировки A, причём $I_1 \subseteq I$.

В рассматриваемой постановке модель (1) необходимо преобразовать к следующему виду:

$$M(X) = \sum_{j=1}^{n} w_j y_j \left\lfloor 1 - \prod_{i=1}^{m} \left(1 - p_{ij} + p_{ij} q_{ji}\right)^{\frac{x_{ij}}{y_j}} \right\rfloor \to \max;$$

$$\sum_{i \in I_1} c_i \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le C_0; \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = x_i^п; \quad i \in I \setminus I_1;$$

$$x_{ij} = \left[x_{ij} \right] \ge 0; \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n},$$

где $\sum_{i \in I_1} c_i \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le C_0$ означает, что средства бюджета выделяются только для замены боевых средств i – х типов для $i \in I_1$ на другие типы боевых средств данного вида вооружения под теми же номерами, а ограничение $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = x_i^п; \quad i \in I \setminus I_1$, означает, что оставшиеся типы боевых средств группировки A замене не подлежат, где $x_i^п$ – количество боевых средств сохранившихся типов.

При полной замене боевых средств всех типов имеем $I_1 = I$, причём ограничения $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = x_i^п$; $i \in I \setminus I_1$ отсутствуют.

Отметим также об изменении некоторых исходных данных в модели (3) по сравнению с моделью (1):

– изменение элементов в матрице $P = \left\| p_{ij} \right\|_{m,n}$ вероятностей поражения боевых средств группировки B, боевыми средствами группировки A, соответствующих новым типам боевых средств:

$$p_{ij} = \begin{cases} p_{ij}^н, i \in I_1; j = \overline{1, n}; \\ p_{ij}^п, i \in I \setminus I_1; j = \overline{1, n}, \end{cases} \tag{4}$$

где $p_{ij}^{н}$ – соответствующие вероятности поражения боевых средств группировки B для боевых средств нового типа группировки A;

$p_{ij}^{п}$ – прежние значения вероятностей поражения для сохранившихся типов боевых средств группировки A (для модели (1) имеем $p_{ij} = p_{ij}^{п}; i = \overline{1,m};$ $j = \overline{1,n}$);

– изменение параметров в матрице вероятностей $Q = \left\| q_{ji} \right\|_{n,m}$ поражения боевых средств группировки A, соответствующих поражению боевых средств группировки A нового типа:

$$q_{ji} = \begin{cases} q_{ji}^{н}, i \in I_1; j = \overline{1,n}; \\ q_{ji}^{п}, i \in I \setminus I_1; j = \overline{1,n}, \end{cases} \qquad (6)$$

где $q_{ji}^{н}$ – соответствующие вероятности поражения боевых средств нового типа группировки A для боевых средств группировки B;

$q_{ji}^{п}$ – прежние значения вероятностей поражения для сохранившихся типов боевых средств группировки A (для модели (1) имеем $q_{ji} = q_{ji}^{п}; j = \overline{1,n};$ $i = \overline{1,m}$);

– изменение стоимостей для боевых средств нового типа группировки A:

$$c_i = \begin{cases} c_i^{н}, i \in I_1; \\ c_i^{п}, i \in I \setminus I_1, \end{cases} \qquad (7)$$

где $c_i^{н}$ – соответствующие стоимости боевых средств нового типа группировки A;

$c_i^{п}$ – прежние значения вероятностей поражения для сохранившихся типов боевых средств группировки A (для модели (1) имеем $c_i = q_i^{п}; i = \overline{1,m}$).

Задача наращивания состава вооружения характеризуется увеличением количества боевых средств при сохранении вооружения всех типов, имеющихся в составе группировки A и задаваемого в виде вектора $X^0 = \left[x_1^0, x_2^0, \cdots, x_m^0 \right]$, где x_i^0 $\left(i = \overline{1,m} \right)$ – количество имеющихся боевых средств i – го типа группировки A. В этом случае модель наращивания состава вооружения группировки A имеет вид:

$$M(X) = \sum_{j=1}^{n} w_j y_j \left[1 - \prod_{i=1}^{m} \left(1 - p_{ij} + p_{ij} q_{ji} \right)^{x_{ij}/y_j} \right] \to \max;$$

$$\sum_{i=1}^{m} c_i \left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - x_i^{п} \right) \le C_0;$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \ge x_i^{п}; \quad i = \overline{1,m}; \qquad (8)$$

$$x_{ij} = \left[x_{ij} \right] \ge 0; \quad i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,n},$$

где ограничение $\sum_{i=1}^{m} c_i \left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - x_i^{п} \right) \le C_0$ означает, что средства бюджета предназначены только для наращивания комплексов боевых средств;

ограничение $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \ge x_i^{п}; \quad i = \overline{1,m}$ означает, что количество боевых средств после их наращивания не меньше, чем их первоначальный состав.

При этом

$$p_{ij} = p_{ij}^{п}; i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n};$$

$$q_{ji} = q_{ji}^{п}; j = \overline{1,n}; i = \overline{1,m}; \qquad (9)$$

$$c_i = q_i^{п}; i = \overline{1,m}$$

Задача частичной замены и наращивания состава вооружения состоит в изменении количественного и качественного состава вооружения и фактически является обобщающей из рассмотренных задач. Соответствующая модель этой задачи имеет следующий вид:

$$M(X) = \sum_{j=1}^{n} w_j y_j \left[1 - \prod_{i=1}^{m} \left(1 - p_{ij} + p_{ij} q_{ji} \right)^{x_{ij}/y_j} \right] \to \max;$$

$$\sum_{i \in I_1} c_i \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{i \in I \setminus I_1} c_i \left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - x_i^{п} \right) \le C_0; \qquad (10)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \ge x_i^{п}; \quad i \in I \setminus I_1;$$

$$x_{ij} = \left[x_{ij} \right] \ge 0; \quad i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,n},$$

где соотношение

$$\sum_{i \in I_1} c_i \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{i \in I \setminus I_1} c_i \left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - x_i^{п} \right) \le C_0$$

ограничивает расходование бюджетных средств на приобретение боевых средств новых типов и наращивание боевых средств прежних типов;

ограничение $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \ge x_i^{п}; \quad i \in I \setminus I_1$ означает, что количество боевых средств после их наращивания не меньше, чем их количество в первоначальном составе.

Статические модели (3) – (7), (8) – (9) и (10), (4) – (7) соответствуют постановке задачи определения оптимального состава вооружений оперирующей группировки войск, обеспечивающий получение максимального результата в операции при фиксированных ресурсах, отводимых при создании группировки войск.

Выводы

1. Сформулирована постановка задачи определения оптимального состава вооружений оперирующей группировки войск, обеспечивающего получение максимального результата в операции при фиксированных ресурсах, отводимых при создании группировки войск.

2. Приведены математические модели задач наращивания состава вооружений, замены состава вооружений и задач частичной замены состава вооружений.

3. Сформулированную постановку задачи и приведенные математические модели задач целесообразно использовать при разработке подсистемы поддержки принимаемых решений, входящей в создаваемую автоматизированную систему управления войсками и оружием.

Список литературы

1. Основы исследования операций в военной технике / Под ред. Ю.В. Чуева. – М.: Сов. радио, 1965. – 383 с.

2. Осинский Л.М. Элементы исследования операций и оценка эффективности сил и средств противовоздушой обороны / Л.М. Осинский. – К.: КВИРТУ, 1968. – 444 с.

3. Чуев Ю.В. Исследование операций в военном деле / Ю.В. Чуев. – М.: Воениздат, 1970. – 256 с.

4. Кононов В.Б. Теоретические основы математического моделирования ресурсного обеспечения в конфликтных ситуациях: дис. ... докт. техн. наук / Кононов Владимир Борисович. – Х.: МОУ, ХУ ВС, 2010. – 369 с.

5. Кононов В.Б. Математические модели процессов военных действий и их применение для планирования и управления распределением боевых средств: Монография / В.Б. Кононов. – Х.: МОУ, ХУ ВС, 2007. – 280 с.

Поступила в редколлегию 18.07.2012

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.М. Бильчук, Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков.

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ВИЗНАЧЕННЯ ОПТИМАЛЬНОГО СКЛАДУ ОЗБРОЄНЬ ОПЕРУЮЧОГО УГРУПУВАННЯ ПРИ ФИКСОВАНИХ РЕСУРСАХ

В.Б. Кононов, Ю.Й. Кушнерук, О.В. Коваль

У статті розглянуті питання, які пов`язані з математичною моделлю задачі вибору складу озброєння оперуючого угрупування військ при фіксованих ресурсах.

Ключові слова: *склад озброєння, угрупування військ, бюджетні обмеження.*

MATHEMATICAL MODEL of DETERMINATION OPTIMUM COMPOSITION OF ARMAMENTS OF OPERATING GROUPMENTS AT THE FIXED RESOURCES

V.B. Kononov, Yu.I. Kushneruk, A.V. Koval'

Questions, related to the mathematical model of task of choice of composition of armament of operating groupment of troops at the fixed resources, are considered in the article.

Keywords: *composition of armament, groupment of troops, budget constraints.*