УДК 519.8 : 336.71

В.Ю. Дубницкий, Б.В. Самородов

Харьковский институт банковского дела Университета банковского дела НБУ, Харьков

КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ОЦЕНКА РАЗЛИЧИЯ МЕТОДИК ПОСТРОЕНИЯ РЕЙТИНГОВ

Предложено решение задачи сравнения различных методов построения рейтингов на основе введенной меры упорядоченности рейтинга. Предложено решение задачи, как в случае сплошной нумерации объектов, так и совмещённых рангов.

Ключевые слова: *рейтинги, комбинаторика, перестановки, пространство перестановок, ранговые методы.*

Введение

Упорядочение объектов по одному или нескольким признакам – одна из типичных и основных задач исследования операций. Такое упорядочение называют рейтингом. Например, рейтинг Эло, применяемый при оценке уровня игры шахматистов относительно уровня своих коллег.

В работе [1] рассматриваемому термину дано такое определение: «рейтинг [англ. rating – буквально: оценка; положение, класс, разряд] – 1) индивидуальный или групповой числовой показатель оценки спортивных достижений в классификационном списке (рейтинг-лист) сильнейших спортсменов или команд; 2) индивидуальный числовой показатель оценки какого-либо лица, организации, явления относительно других, аналогичных, определяемый на основе оценки экспертов, голосования, социологических опросов, анкет».

В работе [2] понятие «рейтинг заёмщика» определено так: «Рейтинг – показатель кредитоспособности заёмщика или уровня кредитного риска в виде комбинации букв или цифр». В приведенных определениях можно выделить следующие общие черты:

– объекты рейтингования могут быть любой природы;

– объекты должны допускать упорядочение;

– должны существовать правила, по которому это упорядочение осуществляется.

Анализ литературы. Правила составления рейтингов банков, принятые в Украине, описаны в работе [3], обзор правил, принятых в России, приведен в работе [4]. Составителями и пользователями рейтингов было отмечено, что использование различных правил рейтингования приводит к различным результатам. В работе [4] приведен пример того, как рейтинги таких общепризнанных агентств, как Moody's и S&P на выборке из 81 объекта не совпали в 35% случаев. Аналогичные ситуации также были отмечены в работе украинских рейтинговых фирм [5]. В то же время в этих работах отсутствуют сведения о существовании методов количественной оценки расхождения в результатах применения различных правил построения рейтингов.

Постановка задачи. Разработка количественной методики оценки различия результатов применения известных правил рейтингования к одним и тем же совокупностям объектов в форме, позволяющей получать абсолютные и относительные оценки их несовпадения.

Изложение результатов

Пусть $S = s_1, s_2, ..., s_b$ – конечное множество, элементы которого s_i, i=1,2,…,b будем называть объектами рейтингования. В этом случае нижний индекс «i» будет именем объекта.

Пусть П – правило, по которому каждому элементу s_i ставится во взаимно-однозначное соответствие некоторое действительное число r_i, называемое рейтинговым числом. В свою очередь, рейтинговое число r_i – известная однозначная функция рейтинговых переменных p_j, j=1,2,…,m.

Переставим рейтинговые числа так, чтобы они образовали упорядоченное по возрастанию множество $R=\left(r_{ij}\right)$, r_{ij}, i = 1, 2…..n; j = 1,2,…,n. Это множество будем называть рейтингом, введенным на множестве S.

Тогда индекс «j» i-го объекта будем называть рейтинговой позицией i-го объекта, определённой по правилу $П_1$ и введенной на множестве S.

Примем допущение о том, что два правила построения рейтинга одинаковы, если у порождённых ими последовательностей R_{ij} нижние пары индексов совпадают.

Рассмотрим пример, приведенный в табл. 1. Из этой таблицы видно, что неизвестные нам правила построения рейтингов явно различны как по методике получения результата, так и по его оцениванию.

Рейтинговые числа отличаются на пять порядков, правило $П_1$ реализует принцип «больше-лучше», правило $П_2$ реализует принцип «меньше-лучше», но итог применения этих правил одинаковый: рейтинги объектов совпали.

Таблица 1

Варианты построения рейтингов

Имя банка	Правила рейтингования			
	Правило $П_1$		Правило $П_2$	
	Рейтинговое число	Рейтинг	Рейтинговое число	Рейтинг
Б1	0,28	8	283	8
Б2	0,61	3	188	3
Б3	0,25	9	305	9
Б4	0,46	5	211	5
Б5	0,32	7	268	7
Б6	0,41	6	224	6
Б7	0,57	4	205	4
Б8	0,72	2	163	2
Б9	0,17	10	314	10
Б10	0,88	1	129	1

Следовательно, различие в методике не принесло новой информации. Отсюда следует, что правила построения рейтингов можно принять равными, если они не меняют последовательность объектов рейтингования в ряду рейтингов. Различными (неравными) будем называть такие правила построения рейтингов, при которых, в результате их применения к одинаковым объектам, изменяется их последовательность. Иными словами, будем считать правила рейтингования различными, если их применение к объектам множества S приводит к изменению вторых индексов множества R. Рассмотрим пример построения рейтингов, приведенный в табл. 2.

Таблица 2

Пример построения рейтингов

Правило рейтингования	Имя Банка									
	Б10	Б8	Б2	Б7	Б4	Б6	Б5	Б1	Б3	Б9
Правило$П_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Правило $П_3$	1	2	6	4	7	3	5	10	9	8
Правило $П_4$	6	10	5	8	4	3	7	1	9	2
Правило $П_5$	6	10	5	8	3.5	3.5	7	1	9	2

При анализе оценки различия последовательностей полученных рейтинговых чисел исходим из того, что содержательный анализ тех или иных правил рейтингования находится вне рамок данной работы.

Рассмотрим результаты применения правил рейтингования – рейтинг объектов как некоторую произвольную конечную последовательность различных натуральных чисел. Из комбинаторики [6] известно, что такую последовательность называют перестановкой. В работе [7] приведены способы введения метрик в пространстве перестановок.

Метрики, в данном случае, позволяют определить расстояние (меру сходства) между двумя перестановками. Задача определения расстояния между двумя различными объектами имеет прозрачный смысл только при наличии эталона расстояния. Если таковой отсутствует, то тогда необходим, как минимум, третий объект, чтобы расположить их по мере удаления от объекта, принятого в качестве эталона.

Пусть $R = (r_1, r_2, ..., r_i, ..., r_n)$, $K = (k_1, k_2, ..., k_i, ...k_n)$ – перестановки из n символов. Следуя работе [8], будем называть инверсией в данной перестановке ситуацию, когда числа u, v принадлежат данной перестановке, $u > v$, но v стоит в перестановке раньше, чем u. В работе [7] предложено расстояние D(R,K) между перестановками R_1 и R_2 определять как количество всех инверсий перестановки R_2 относительно R_2.

Пример определения количества инверсий для данных, приведенных в строке «Правило $П_3$» из табл. 2, показан в табл. 3.

Таблица 3

Пример определения количества инверсий для данных

Объект рейтингования	1	2	6	4	7	3	5	10	9	8
Множество инверсий	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{4,3,5,\}$	$\{3\}$	$\{3,5\}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{2\}$	$\{8\}$	-
Количество инверсий	0	0	3	1	2	0	0	2	1	-

Общее количество инверсий $I_ф$= 3+1+2+2+1=9. Рассмотрим исходную перестановку чисел A={1,2,…,n,} и противоположную ей перестановку B= {n, n-1, …2,1}.То есть реализуем принцип «И последние станут первыми», именно такой подход рекомендуется в работе [9]. Перестановка B имеет относительно перестановки A наибольшее количество инверсий. Определим их количество, используя приведенный в табл. 3 пример:

$$\mathrm{Inv(B|A)}=$$

$$=(n-1)+(n-2)+...+3+2+1=\frac{n(n-1)}{2}=\mathrm{Inv}_{\text{макс}}(n)\,.\quad(1)$$

Правило $П_3$ определило перестановку, для которой число инверсий $\mathrm{Inv}(П_3)$=9. Правило $П_4$ определило перестановку, для которой число инверсий $\mathrm{Inv}(П_4)$=30. Меру неупорядоченности рейтинга определим в виде коэффициента

$$D(П(n))=\frac{\mathrm{Inv}(П(n))}{\mathrm{Inv}_{\text{макс}}(n)}\,,\qquad(2)$$

где $\mathrm{Inv}(П(n))$ – количество инверсий, порождённых правилом П на множестве из n.

Тогда величину $J=\mathrm{Or}$ назовем мерой упорядоченности и определим в виде:

$$\mathrm{Or}(П(n))=1-D\,.\qquad(3)$$

Правило $П_4$ порождает 30 инверсий, правило $П_3$ – 9, следовательно, мера упорядоченности правила $\mathrm{Or}(П_3(10))=1-\frac{9}{45}=\frac{36}{45}$, мера упорядоченности правила $\mathrm{Or}(П_4(10))=\frac{15}{45}$.

Сравнивая эти результаты, приходим к выводу, что предлагаемые правила существенно различны, так как их применение к одной и той же совокупности данных даёт результаты, отличающиеся по мере упорядоченности более, чем в три раза. В цитированной уже работе [7] в качестве воз-можной метрики в пространстве перестановок предлагается следующая. Предлагается произвольную перестановку рассматривать как вектор n-мерного евклидова пространства. Тогда для уже введенных перестановок

$$R_1=(r_1,r_2,...,r_i,...,r_n),R_2=(k_1,k_2,...,k_j,...k_n)$$

расстояние ρ между ними определим так:

$$\rho(R,K)=\left[\sum(r_1-k_1)^2+...+\left((r_n-k_{1n})^2\right)\right]^{1/2}.\quad(4)$$

Достоинство такого подхода в его простоте, недостаток – плохая сравнимость результатов.

Так как основная задача работы – сравнение двух рейтингов (перестановок одинаковой размерности), то для её решения, по нашему мнению, целесообразно объединение двух подходов.

Воспользуемся для этой цели косинусом угла между векторами **R** и **K**, координаты которых совпадают с последовательностью натуральных чисел, входящих в рейтинги, образованные правилами $П_3$ и $П_4$:

$$\arccos(R\hat{,}K)=\frac{\sum_{i=1}^{n}r_ik_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}r_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}k_i^2}}\,.\qquad(5)$$

Расчёт, выполненный по формуле (5), показал следующий результат: $\arccos(R,K)\approx 46^\circ$. Для получения сравнительных оценок различия рейтингов используем следующий приём. Определим косинус угла между перестановками A и B, то есть между максимально неупорядоченными перестановками. Исходные данные для расчёта показаны в табл. 4.

Таблица 4

Исходные данные для расчёта косинуса угла между максимально неупорядоченными перестановками

Перестановка	Элементы перестановок					
A	1	2	…	i	…	n
B	n	n-1	…	n- i	…	1

В знаменатель выражения (5) входит конечная сумма квадратов натуральных чисел. Известно [6, 10], что:

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,.\qquad(6)$$

Расчёт числителя Q этого выражения несколько сложнее. Из условия (5) следует, что:

$$Q=1\cdot n+2\cdot(n-1)+...+i\cdot(n-i)+...+n\cdot 1\,.\qquad(7)$$

Условие (7) представим в виде :

$$Q=\sum_{i=0}^{i=n-1}(i+1)(n-i)\,.\qquad(8)$$

Это же условие будем использовать в расчётах при чётном n, при n нечётном удобнее использовать равенство:

$$Q=\left(\left[\frac{n}{2}+1\right]\right)^2+2\left(\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(i+1)(n-i)\right).\qquad(9)$$

В условии (9) символ $[\bullet]$ означает целую часть числа, стоящего в скобках. Подставив в (5) полученные результаты, получим значение угла между векторами, образованными двумя взаимно противоположными перестановками.

При n чётном:

$$\arccos(R\hat{,}K)=\frac{6}{n(n+1)(2n+1)}\sum_{i=0}^{i=n-1}(i+1)(n-i)\,,\quad(10)$$

при n нечётном:

$$\arccos(R\hat{,}K)=$$

$$=\frac{6}{n(n+1)(2n+1)}\left(\left(\left[\frac{n}{2}+1\right]\right)^2+2(\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(i+1)(n-i)\right).\quad(11)$$

Преобразуем условие (8) для дальнейшего анализа:

$$Q=\sum_{i=0}^{i=n-1}(i+1)(n-i)=$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\left(in-i^2+n-i\right)=n\sum_{i=0}^{n-1}i-\sum_{i=0}^{n-1}i^2+n(n-1)-\sum_{i=0}^{n-1}i\;\Bigg)=$$

$$=\left(n-1\right)\left[\frac{n^2}{2}-\frac{n(2n-1)}{6}+n-\frac{n}{2}\right]. \qquad (12)$$

Тогда угол между двумя максимально неупорядоченными перестановками можно определить по формуле:

$$\arccos(\hat{R,K})=\frac{6(n-1)}{n(n+1)(2n+1)}\left[\frac{n^2}{2}-\frac{n(2n-1)}{6}+n-\frac{n}{2}\right]. \qquad (13)$$

Определение расстояния между перестановками в виде формул (4) или (5) позволяет разрешить проблему определения расстояния между перестановками, именующими совмещённые ранги. Подобная ситуация возникает в тех случаях, когда некоторые из правил рейтингования различным объектам присваивают одинаковый ранг. Например, сумма активов у сравниваемых банков совпала, спортсмены пробежали дистанцию за одинаковое время. В работе [10] предложен следующий приём. Пусть t объектов имеют одинаковый ранг и индексы в перестановке соответственно: l+1, l+2,…l+t. Тогда ранг каждого из этих объектов r_t определяют по условию:

$$r=l+\frac{t+1}{2}. \qquad (14)$$

Применение этого правила показано на примере Правила Π_5, приведенного в табл. 2. Заметим, что в процессе численного анализа поставленной задачи подобный случай при применении формул (4) или (5) ничего не меняет в процедуре решения задачи в то время, как применение формулы (2) становится невозможным. Учитывая, что работа [10] в настоящее время стала библиографической редкостью, дополним дальнейшее изложение, используя полученные в ней результаты. Общая сумма квадратов рангов при t объединенных рангах уменьшится на величину:

$$\Delta=\left(t^3-t\right)\Big/12. \qquad (15)$$

Если же таких групп Γ, то суммарное уменьшение будет равно:

$$\Phi=\sum_{u=1}^{\Gamma}\Delta_u. \qquad (16)$$

Следовательно, при наличии совмещённых рангов получим, что:

$$\sum_{i=1}^{n}r_i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\Phi. \qquad (17)$$

Следует отметить, условия (5) – (13) при этом приобретают столь сложный и труднообозримый вид, что последующий анализ предпочтительнее выполнять в численном виде.

Выводы

1. Предложено решение задачи сравнения различных методов построения рейтингов.
2. Введена мера упорядоченности рейтинга.
3. Рассмотрено решение задачи в случае сплошной нумерации объектов и совмещённых рангов.

Список литературы

1. Захарченко Е.Н. Новый словарь иностранных слов / Е.Н. Захарченко, Л.Н. Комарова, И.В.Нечаева. – М.: «Азбуковник», 2003. – 308 с.

2. Фёдоров Б.Г. Англо-русский толковый словарь валютно-кредитных терминов / Б.Г. Фёдоров. – М.: Финансы и статистика, 1992. – 240 с.

3. Методология определения кредитного рейтинга банка на основе публичной информации: методическое пособие. – Украинское кредитно-рейтинговое агентство К., 2011. – 8с.

4. Карминский А.М. Модели рейтингов международных агентств / А.М. Карминский, А.А. Пересецкий // Прикладная эконометрика. – 2007. – №1. – С. 19-33.

5. Галасюк В. Почему в XXI веке кредитные рейтинги, присваиваемые рейтинговыми агентствами по методикам XX века, неприемлемы для принятия эффективных экономических решений / В. Галасюк, М. Сорока, Викт. Галасюк. [Электронный ресурс]. – Режим доступа к ресурсу: http://planovik.ru/finance/articles/17.htm – 07.08.2012. – Загл.с экрана.

6. Липский В. Комбинаторика для программистов / В. Липский. – М.: Мир, 1988. – 313 с.

7. Стоян Ю.Г. Решение некоторых многоэкстремальных задач методом сужающихся окрестностей / Ю.Г. Стоян, В.Ю. Соколовский. – К.: Наук.думка, 1980. – 208 с.

8. Курош А.Г. Курс высшей алгебры / А.Г. Курош. – М.: Госуд.изд. физико-математической литературы, 1962. – 424 с.

9. Евангелие от Матфея 20:1-34.

10. Бородкин Ф.М. Статистическая оценка связей экономических показателей / Ф.М. Бородкин. – М.: Статистика, 1968. – 202 с.

Поступила в редколлегию 29.08.2012

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. М.В. Новожилова, Харьковский национальный университет строительства и архитектуры, Харьков.

КІЛЬКІСНА ОЦІНКА ВІДМІННОСТІ МЕТОДИК ПОБУДОВИ РЕЙТИНГІВ

В.Ю. Дубницький, Б.В. Самородов

Наведено розв'язання задачі порівняння різних методів побудови рейтингів на основі міри впорядкованості об'єктів рейтингування. Запропоновано розв'язання задачі, як в разі суцільної нумерації об'єктів, так і поєднаних рангів.

Ключові слова: *рейтинги, комбінаторика, перестановки, простір перестановок, рангові методи.*

QUANTITATIVE ESTIMATION OF DIFFERENCES IN METHODJLOGIKS OF RATINGS CONSTRUCTION

V.Iu. Dubnytskyi, B.V. Samorodov

It is given the task decision of comparison of different methods of rating construction on the basis of efficiency measure of objects of rating. The task solution is offered both in case of continuous numeration of objects and the united ranks.

Keywords: *ratings, combinatorics, transpositions, space of transpositions, rank methods.*