УДК 51

Ю.О. Іванов[1], І.І. Сидоренко[2]

[1] *Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського «ХАІ», Харків*
[2] *Академія внутрішніх військ МВС України, Харків*

ФОРМУЛИ ДЛЯ БАЗИСНИХ ФУНКЦІЙ УЗАГАЛЬНЕНОГО РЯДА ТЕЙЛОРА

В роботі надана зручна для обчислень формула для базисних функцій узагальненого ряду Тейлора – Рвачова В.О., який є зображенням функцій неквазіаналітичного класу.

Ключові слова: *базисні функції, ряд Тейлора-Рвачова.*

Вступ

Постановка проблеми. Неквазіаналітичні класи нескінченно диференційованих функцій знаходять широке застосування в багатьох розділах математичного аналізу. Зокрема, вони виникають при дослідженні гіпоеліптичних рівнянь з частинними похідними, звичайних диференціальних рівнянь нескінченного порядку, функціонально-диференціальних рівнянь, а також у чисельних методах.

У зв'язку з цим актуальним є питання про можливість подання таких функцій у вигляді збіжних рядів, які виступали б аналогом рядів Тейлора для аналітичних функцій. У роботах В.О. Рвачова, продовжених пізніше його учнями І.І. Малицьким, Г.О. Старцем і В.М. Кузніченком, були запропоновані і досліджені узагальнені ряди Тейлора для класів нескінченно диференційованих функцій

$$H_\rho = \left\{ f(x) \in C^\infty[-1,1] : \left| f^{(n)}(x) \right| < C\rho^n 2^{\frac{n(n+1)}{2}},\ n = 0,1,2,... \right\},$$

для $1 < \rho < 2$.

Аналіз останніх публікацій. Функції цього класу зображуються узагальненим рядом Тейлора-Рвачова В.О.[1]. Розклад функції за рядом має вигляд:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{t \in X_n} f^{(n)}(t) \phi_{n,t}(x),$$

де $X_0 = X_1 = \{0, \pm 1\}$, для $n = 1,2,...$:

$$X_{n+1} = \frac{X_n - 1}{2} \cup \frac{X_n + 1}{2};$$

$\phi_{n,t}(x)$ – базисні функції узагальненого ряда Тейлора, подібні до x^n в звичайному ряді Тейлора. Функції $\phi_{n,t}(x)$ визначаються умовами:

$$\phi_{n,t}(x) \in H_1,\ \phi_{n,t}(x) = \delta_{n,k}\delta_{t,x},\ k = 0,1,...,$$
$$n = 0,1,...,\ t \in X_n,\ x \in X_k$$
$$\delta_{a,b} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } a = b, \\ 0, & \text{якщо } a \neq b. \end{cases} \quad (1)$$

В.О. Рвачов довів [1], що такий розклад є єдиним для функцій класу. Зауважимо, що функції неквазіаналітичних класів можуть бути відновленими за значеннями похідних тільки на всюди щільній множині точок. Тож множина $\bigcup_n X_n$ є всюди щільною на сегменті $[-1, 1]$.

Базисні функції були побудовані на основі функції $up(x)$ –розв'язку з компактним носієм функціонально-диференціального рівняння [2]:

$$y'(x) = 2(y(2x+1) - y(2x-1)),$$

а саме є лінійною комбінацією зсувів функції $up(x)$. В.О. Рвачов надає рекурентну формулу для $\phi_{n,t}(x)$ [1].

Метою статті є виведення формули, що виражає базисні функції у вигляді лінійної комбінації n зсувів up(x) на двох інтервалах.

Виклад основного матеріалу

Для функцій $\phi_{n,0}(x)$ такі формули отримані [3]:

$$\phi_{n,0}(x) = 2^{-\frac{n(n+1)}{2}} \Big(up\left(x - 1 + 2^{-n}\right) - $$
$$- J_0 up\left(x - 1 + 2^{-n+1}\right) - \ldots - J_{n-1} up(x) \Big), \quad (2)$$

де $J_n = up_{n+1} - J_0 up_n - \ldots - J_{n-2} up_2 - J_{n-1} up_1$,

$$J_i = \int_{-1}^{0} \phi_i(t)\,dt,\ up_i = up\left(-1 + \frac{1}{2^i}\right),\ n = 1,2,\ldots,$$

Базисні функції мають очевидні властивості, що вибігають із означення:

1.
$$\phi_{n,t}(x) = (-1)^n \phi_{n,-t}(-x) \quad \forall\ n \in N,\ t \in X_n,\ x \in R. \quad (3)$$

2. $\phi_{n,t}(x) = 0 \quad \forall\ n \in N,\ t \in X_n,\ tx < 0.$ (4)

З цих властивостей випливає, що достатньо отримати формули для t < 0 та x < 0.

3. $\phi_{n,t}(x) = (-1)^n \phi_{n,-1-t}(-1-x),$ (5)

4.
$$\phi_{n,\,(t-1)/2}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{n-1}} \left[\begin{array}{l} \int_{-1}^{x} \phi_{n-1,t}(2t+1)\,dt - \\ -up(x) \int_{-1}^{0} \phi_{n-1,t}(2t-1)\,dt \end{array} \right], & x \le 0, \\ 0 & x > 0. \end{cases} \quad (6)$$

Використовуючи формулу (2) і властивості (3) – (6), можна отримати формули для інших базисних функцій. Наведемо деякі з них:

$$\phi_{n,-1}(x)=up(x+1), \quad \phi_{n,1}(x)=up(x-1). \qquad (7)$$

$$\phi_{n,-\frac{1}{2}}(x)=2^{-\frac{n(n+1)}{2}}\times$$
$$\times\left(up\left(x-\frac{1}{2}+2^{-n}\right)-J_0 up\left(x-\frac{1}{2}+2^{-n+1}\right)-\ldots\right.$$
$$\left.-\left(J_{n-2}+J_{n-1,0}\right)up(x)\right) \text{ для } x\le-\frac{1}{2} \qquad (8)$$

$$\phi_{n,-\frac{1}{2}}(x)=2^{-\frac{n(n+1)}{2}}(-1)^n\times$$
$$\times\left(up\left(x+\frac{3}{2}-2^{-n}\right)-J_0 up\left(x+\frac{3}{2}-2^{-n+1}\right)-\ldots\right.$$
$$\left.-\left(J_{n-2}+J_{n-1,0}\right)up(x+1)\right) \text{ для } x>-\frac{1}{2}, \qquad (9)$$

де $J_{i,0}=\int_{-1}^{1}\phi_{i,0}(t)dt$, $J_{i,0}=\left(1+(-1)^i\right)J_i$.

$$\phi_{n,-\frac{3}{4}}(x)=\frac{1}{2^{\frac{n(n+1)}{2}}}\times$$
$$\times\left(up\left(x-\frac{1}{4}+2^{-n}\right)-J_0 up\left(x-\frac{1}{4}+2^{-n+1}\right)-\ldots\right.$$
$$\left.-J_{n-4}up\left(x-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)-\left(J_{n-3}+J_{n-2,0}+J_{n-1,-\frac{1}{2}}\right)up(x)\right),$$

для $$x\in\left[-1,-\frac{3}{4}\right], \qquad (10)$$

$$\phi_{n,-\frac{3}{4}}(x)=\frac{1}{2^{\frac{n(n+1)}{2}}}\times$$
$$\times\left(up\left(x+\frac{7}{4}-2^{-n}\right)-J_0 up\left(x+\frac{7}{4}-2^{-n+1}\right)-\ldots\right.$$
$$\ldots-J_{n-4}up\left(x+\frac{7}{4}-\frac{1}{8}\right)-\left(J_{n-3}+J_{n-2,0}\right)up\left(x+\frac{3}{2}\right)-$$
$$\left.-J_{n-1,-\frac{1}{2}}up(x+1)\right)$$

для $$x\in\left[-\frac{3}{4},0\right], \qquad (11)$$

де $$J_{n-1,-\frac{1}{2}}=\left(1+(-1)^{n-1}\right)\begin{pmatrix}J_{n-1}+J_{n-2}up\left(-\frac{1}{2}\right)-\\ -\left(J_{n-3}+J_{n-2,0}\right)up\left(-\frac{3}{4}\right)\end{pmatrix}.$$

Отже, маємо формули для базисних функцій ряда Рвачова $\phi_{n,0}(x)$, $\phi_{n,-\frac{1}{2}}(x)$, $\phi_{n,-\frac{3}{4}}(x)$. Таким чином, враховуючи (3) – (5) можна сказати, що одночасно отримані формули для $\phi_{n,\frac{1}{2}}(x)$, $\phi_{n,\frac{3}{4}}(x)$, $\phi_{n,-\frac{1}{4}}(x)$, $\phi_{n,\frac{1}{4}}(x)$.

Так само можна отримати формули для решти $\phi_{n,t}(x)$ в явному вигляді, але із зростанням n вони матимуть все більш громіздкий вид. Надамо формули, що зображують $\phi_{n,t}(x)$ лінійною комбінацією зсувів функцій $up(x)$ окремо на інтервалах $x\le t$ і $x>t$ іншим способом, що не використовує рекурентні співвідношення (6). Як приклад розглянемо функцію $\phi_{5,-\frac{9}{16}}(x)$.

Функцію $\phi_{5,-\frac{9}{16}}(x)$ можна зобразити у вигляді:

$$\phi_{5,-\frac{9}{16}}(x)=$$
$$\begin{cases} a_1up\left(x-\frac{13}{32}\right)+a_2up\left(x-\frac{3}{8}\right)+ \\ \quad +a_3up\left(x-\frac{1}{4}\right)+a_4up(x), \quad x\le-\frac{9}{16} \\ b_1up\left(x+1+\frac{17}{32}\right)+b_2up\left(x+1+\frac{1}{2}\right)+ \\ \quad ++b_3up(x+1), \qquad x>-\frac{9}{16} \end{cases}$$

Це дійсно так, тому що всі зсуви $up(x)$, які беруть участь у формулі задовольняють умові (1) для всіх точок, крім точки $x=-\frac{9}{16}$, в якій дорівнюють нулю похідні зсувів, починаючи з шостої похідної. Решті умов ми задовольнимо, якщо визначимо сім коефіцієнтів a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3 із семи умов:

$$\lim_{x\to-\frac{9}{16}-0}\phi^{(5)}_{5,-\frac{9}{16}}\left(-\frac{9}{16}\right)=\lim_{x\to-\frac{9}{16}+0}\phi^{(5)}_{5,-\frac{9}{16}}\left(-\frac{9}{16}\right)=1,$$

$$\lim_{x\to-\frac{9}{16}-0}\phi^{(i)}_{5,-\frac{9}{16}}\left(-\frac{9}{16}\right)=\lim_{x\to-\frac{9}{16}+0}\phi^{(i)}_{5,-\frac{9}{16}}\left(-\frac{9}{16}\right),$$

$i=4,3,2,1,0$

або

$$\begin{cases} a_1up^{(5)}\left(-\frac{31}{32}\right)=1; \\ b_1up^{(5)}\left(\frac{31}{32}\right)=1; \\ a_1up^{(i)}\left(-\frac{31}{32}\right)+a_2up^{(i)}\left(-\frac{15}{16}\right)+a_3up^{(i)}\left(-\frac{13}{16}\right)+ \\ +a_4up^{(i)}\left(-\frac{9}{16}\right)=b_1up^{(i)}\left(\frac{31}{32}\right)+b_2up^{(i)}\left(\frac{15}{16}\right)+ \\ +b_3up^{(i)}\left(\frac{7}{16}\right), \quad i=4,3,2,1,0. \end{cases}$$

Значення похідних $up(x)$ можна знайти за формулою [2]:

$$up^{(n)}(x)=2^{\frac{n(n+1)}{2}}\sum_{k=1}^{2^n}\delta_k up\left(2^n x+2^n+1-2k\right),$$

де $\delta_1=1$, $\delta_{2k}=-\delta_k$, $\delta_{2k-1}=\delta_k$.

Маємо сім рівнянь з сьома невідомими, розв'язуючи їх, знаходимо:

$$a_1=\frac{1}{32768},\ a_2=-.1525878906\cdot10^{-4},$$

$$a_3=.1907348633\cdot10^{-5},\ a_4=-.3390014171\cdot10^{-6},$$

$$b_1=-\frac{1}{32768},\ b_2=.1287460327\cdot10^{-4},$$

$$b_3=-.1378358410\cdot10^{-6}.$$

Тепер застосуємо цю методику для знаходження функції $\phi_{n,t}(x)$ при довільних n і $t<0$. Функцію $\phi_{n,t}(x)$ можна представити у вигляді:

$$\phi_{n,t}(x)=\begin{cases} a_0 up(x)+ \\ +\sum_{i=1}^{n} p_i a_i up(x-0.p_1p_2...p_i), & x\le t, \\ b_0 up(x)+ \\ +\sum_{i=1}^{n} q_i b_i up(x+1+0.q_1q_2...q_i), & x>t, \end{cases},$$

де p_i – двійкові цифри числа $t-\frac{1}{2^n}+1$, q_i – двійкові цифри числа $t+\frac{1}{2^n}$.

Для функції, що задається таким чином виконується:

$\phi^{(k)}_{n,t}(x)=0$ для $x\in X_k$, $k=n+1,\ n+2,...$ і для $k=0,1,...,n$ при $x\ne t$.

Відповідні умови в точці $x=t$ задовольняються за рахунок вибору коефіцієнтів a_i і b_i, тобто коефіцієнти вибираються з умов:

$$\lim_{x\to t-0}\phi^{(n)}{}_{n,t}(t)=\lim_{x\to t+0}\phi^{(n)}{}_{n,t}(t)=1,$$

$$\lim_{x\to t-0}\phi^{(k)}{}_{n,t}(t)=\lim_{x\to t+0}\phi^{(k)}{}_{n,t}(t)=0,$$

$$k=s+1,\ ...\ ,n-1,$$

$$\lim_{x\to t-0}\phi^{(k)}{}_{n,t}(t)=\lim_{x\to t+0}\phi^{(k)}{}_{n,t}(t),\quad k=0,1,...,s$$

або

$$\begin{cases} a_n up^{(n)}\left(\frac{1}{2^n}-1\right)=b_n up^{(n)}\left(\frac{1}{2^n}-1\right)=1 \\ \sum_{i=1}^{n-1} p_i a_i up^{(k)}(x-0.p_1p_2...p_i)+a_n up^{(k)}\left(\frac{1}{2^n}-1\right)= \\ =\sum_{i=1}^{n-1} q_i b_i up^{(k)}(x+1+0.q_1q_2...q_i)+\left(\frac{1}{2^n}-1\right)\times \\ \times b_n up^{(k)}=0, \qquad k=s+1,\ ...\ ,n-1, \\ a_n up^{(k)}\left(\frac{1}{2^n}-1\right)+\sum_{i=1}^{n-1} p_i a_i up^{(k)}(x-0.p_1p_2...p_i)= \\ =b_n up^{(k)}\left(\frac{1}{2^n}-1\right)+\sum_{i=1}^{n-1} q_i b_i up^{(k)}(x+1+0.q_1q_2...q_i), \\ \qquad k=0,\ ...,\ s, \end{cases}$$

де s – номер молодшого двійкового розряду числа t, інакше таке число, що $t=\frac{2l+1}{2^s}$ $(l\in N)$.

Висновки

Таким чином, можна отримати формули для всіх $\phi_{n,t}(x)$. Функцію $up(x)$ можна обчислити за допомогою розкладання у ряд, що швидко збігається [2]. Тому надана формула є дуже зручною і ефективною. Вона може бути застосована як для досліджень базисних функцій, так і для створення ефективних програм розкладання функцій в узагальнений ряд Тейлора-Рвачова В.О.

Список літератури

1. *Рвачёв В.А. Финитные решения функционально-дифференциальных уравнений / В.А. Рвачёв // Успехи мат. Наук. – 1990. – 45. – Вып. 1(271). – С. 77-103.*
2. *Рвачёв В.Л. Неклассические методы теории приближений в краевых задачах / В.Л. Рвачёв, В.А. Рвачёв. – К.: Наук. думка, 1979. – 139 с.*
3. *Иванов Ю.А. Об оценке базисных функций обобщённого ряда Тейлора / Ю.А. Иванов // Прикладная математика и техническая кибернетика. – Х., 1987. – С. 5-8.*

Надійшла до редколегії 3.09.2012

Рецензент: канд. фіз.-мат. наук, доцент В.Д. Душкін, Академія ВВ МВС України, Харків.

ФОРМУЛЫ ДЛЯ БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ ОБОБЩЕННОГО РЯДА ТЕЙЛОРА

Ю.А. Иванов, И.И. Сидоренко

В работе выведена удобная для вычислений формула для базисных функций обобщенного ряда Тейлора – Рвачева В.А., который является изображением функций неквазианалитического класса.

Ключевые слова: *базисные функции, ряд Тейлора-Рвачева.*

FORMULAS FOR BASIS FUNCTIONS OF GENERALIZED TALOR-RVACHOV V.A. SERIES

Y.A. Ivanov, I.I. Sydorenko

The article contains a convenient formula for computing basis functions for generalized Taylor – Rvachev V.A. series, which is the image of functions of a nonquasianalytical class.

Keywords: *base functions, Teylor-Rvachev row.*