УДК 623:378

П.П. Чабаненко

Севастопольський військово-морський інститут імені П.С. Нахімова

ПОРІВНЯННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ СИСТЕМ ЗА КРИТЕРІЄМ ПЕРШОЇ СЕРІЇ УСПІХІВ

Розглядається порівняльна оцінка ефективності систем, мета функціонування яких досягається при появі першої серії успіхів, на основі розподілу числа застосувань системи до появи такої серії.

ефективність системи, критерій першої серії успіхів

1. Особливості систем з досягненням мети при появі першої серії успіхів (невдач)

Показник ефективності системи, згідно з принципом А.М. Колмогорова [1], повинен відповідати меті системи. Його не можна призначити або вибрати довільно, а слід **виявити**, виходячи з мети системи. Наочний історичний приклад важливості цього принципу наведений [2, с. 13].

Для ряду систем природним показником ефективності, об'єктивно відповідаючим меті системи, є імовірність появи першої серії k успіхів (підряд k успіхів). Наприклад:

– достовірні відомості про систему відновлення зв'язку й управління супротивника свідчать про те, що після k поразок підряд його пунктів управління структура управління буде зруйнована, оскільки уражені об'єкти не можуть бути відновлені;

– розрахунок концентрації шкідливих домішок у стічних водах, які скидаються у водоймище, показує, що після k їх скидань підряд гранично допустима концентрація завислих речовин у водоймищі буде перевищена;

– аналіз операцій, проведених командувачам протиборчої сторони, і його психологічних особливостей приводить до упевненого висновку, що після віддзеркалення k його легко – штурмових атак підряд він відмовиться від їх продовження.

Характерним тут є **накопичення наслідків один за одним дій до переходу кількості в якість, при якій досягається мета** тієї або іншої системи. Урахування такого типу підсумовуваних наслідків особливо важливе при оцінці ефективності оборонних операцій і, як бачимо, доцільне при вдосконаленні захисту навколишнього середовища, а також систем іншого призначення.

Критерій першої серії успіхів (або невдач) застосовується на практиці досить часто, але інтуїтивно, без суворого наукового обґрунтування.

Так, при перевірці боєготовності з'єднання за бойовими нормативами, після виконання на «відмінно» нормативів k підрозділами підряд подальша перевірка може бути визнана недоцільною і з'єднанню виставляється загальна оцінка «відмінно». Аналогічно, при появі серії k бракованих виробів в конвеєрному виробництві терміново вживається заходи для з'ясування й усунення причини браку. Автор даної статті брав участь у з'ясуванні причини чотирьох підряд неуспішних стрільб крилатими ракетами з підводних човнів ВМФ, що проводяться за планом бойової підготовки. Причина виявилася в тому, що при модернізації ракет лінія контактів блока вироблення сигналу «самонаведення у вертикальній площині» була помилково сполучена з бортрозніманням ракети. На всіх штатних перевірках ракет цей конструктивний дефект не виявлявся, оскільки вони здійснюються при живленні ракети від зовнішніх джерел через бортрознімання. У польоті ракети на її бортрозніманні повітря, тому самонаведення по вертикалі не здійснювалося. Із з'ясуванням причини стрільби цими ракетами за планом бойової підготовки були припинені до усунення на всіх ракетах дефекту конструкції.

З цих прикладів видно, що поява серії певних подій є важливою ознакою якісного стану системи або його зміни. При достатніх k прийняття рішень за цим правилом є цілком переконливим. У цьому, мабуть, причина звернення до нього на практиці.

Дійсно, порівняємо дві вибірки даних (1 – успіх, 0 – невдача) дванадцяти випробувань (рис. 1).

1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1

а

0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1

б

Рис. 1. Порівняння вибірок даних

З погляду «6 з 12», при незалежних випробуваннях Бернуллі, ці вибірки еквівалентні, тому що ймовірність кожної з них однакова: $924 \times p^6(1-p)^6$, де p – імовірність успіху в одному випробуванні. Але вибірка б принципово відрізняється від вибірки а, що змушує задуматися над причиною зміни постійних невдач серією успіхів. Логічніше пошукати залежність, що пояснила б відзначену особливість, чим приписати її сліпому випадку. Якщо, приміром, вибірка б отримана при оцінці правильності дій бойового розрахунку зброї в 12 тренуваннях, то розумніше припустити, що за перші 6 тренувань розрахунок освоїв свої функції й далі виконує їх без помилок на основі вміння, а не випадково.

Таким чином, поширений клас систем, природним показником ефективності яких виступає імовірність появи серії успіхів (невдач) деякого розміру k або математичне очікування числа застосувань системи до появи цієї серії. Для порівняльної оцінки ефективності таких систем за критерієм першої серії успіхів потрібно мати у своєму розпорядженні адекватні математичні моделі. Завданню їх отримання присвячена дана стаття.

2. Наближення В. Феллера для розподілу числа незалежних випробувань до першої серії успіхів

Заздалегідь приведемо цікавий приклад оцінки таланту полководців у діалозі Е. Ферма з генералом Гровсом у Лос-Аламосі. Ферма запитав Гровса, скільки перемог підряд повинен отримати полководець, щоб він був визнаний талановитим. Генерал відповів: приблизно п'ять. Потім Ферма запитав його думку про те, скільки із ста генералів талановиті, і одержав відповідь: приблизно три. Ферма задається імовірністю перемоги в одній незалежній битві p = 0,5 і при k = 5 одержує 0,03, питаючи: при чому тут талант? – Дійсно, виявляється, що п'ять перемог підряд, при рівних силах і однотипних незалежних битвах, чисто випадково отримають приблизно три із ста полководців. Відмітимо, що О.В. Суворов, за найскромнішими оцінками, отримав не менше 10 перемог у битвах над супротивником, який мав чисельну перевагу, і не мав жодної поразки. При рівноймовірному успіху в одній битві такий результат випадково міг би одержати один з тисячі полководців. Якщо прийняти власну оцінку кількості перемог Наполеоном (k > 50), то випадковий шанс такого результату складає менше одного з 10^{15}. Нас, звичайно, цікавить не оцінка талановитості полководців, а об'єктивність кількісної оцінки імовірності першої появи серії успіхів (першої k-серії) на відміну від чисто суб'єктивної думки про це.

Асимптотичний розподіл числа i **незалежних** випробувань Бернуллі до першої k-серії успіхів одержано В. Феллером [3, с. 337-339] у вигляді функції імовірності (q = 1 – p):

$$\tilde{P}_i = \frac{(x-1)(1-p\,x)}{(k+1-k\,x)\;q\cdot x^{i+1}}\,. \qquad (1)$$

Тут відношення лівої до правої частини при $i \to \infty$ прагне до одиниці.

В. Феллером відзначаються «дивовижно хороші наближення цієї апроксимації навіть при дуже малих, та точність апроксимації швидко збільшується із зростанням i». Справедливості ради відзначимо, що це не зовсім так: після швидкого зниження похибки вона трохи зростає, потім поволі зменшується. У цілому якість апроксимації висока.

Недоліки виразу (1) в іншому:

1. При зовнішній його простоті він містить деяку складність другого плану, а саме – необхідність обчислення x як найменшого дійсного кореня рівняння (k + 1)-го порядку

$$x = 1 + x^{k+1}\cdot q\,p^k\,. \qquad (2)$$

Якщо k велике, то знаходження цього кореня x складне, а без його значення не можна скористатися формулою (1). Навіть при k = 3 і p = 0,8 корінь x = 1,43858 з точністю 10^{-5} знаходиться тільки на сороковій ітерації.

2. Розподіл (1) не задовольняє умову нормування, оскільки

$$\sum_{i=k}^{\infty}\tilde{P}_i = \frac{1-p\,x}{(k+1-k\,x)q\cdot x^k} \qquad (3)$$

і в загальному випадку ця сума менше одиниці. Так, при k = 3, p = 0,8 і x = 1,43858 вона дорівнює 0,8025.

3. Розподіли числа залежних (незалежних) випробувань до першої серії успіхів

Звернемося до послідовності випробувань, **не обов'язково незалежних**, з імовірністю p_i успіху у випробуванні i (імовірністю невдачі $q_i = 1 - p_i$). Одержимо вираз для імовірності P_i появи першої – серії успіхів у випробуванні i.

До появи цієї події приводить сумісна появу двох подій (рис. 2): A_1 – непоява k-серії успіхів у $i-k-1$ випробуваннях; A_2 – невдача з подальшими k успіхами підряд в наступних k + 1 випробуваннях.

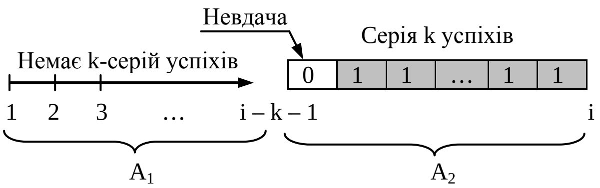

Рис. 2. Поява першої серії k успіхів

Імовірність події A_1, очевидно, доповнює до одиниці імовірність появи першої k-серії успіхів на будь-якому з випробувань j < i – k:

$$P_i(A_1) = 1 - \sum_{j=1}^{i-k-1} P_j \ .$$

Імовірність події A_2 дорівнює добутку імовірності невдачі у випробуванні і $i-k$ на імовірності успіхів у випробуваннях від $i-k+1$ до i:

$$P_i(A_2) = q_{i-k} \prod_{j=1}^{k} p_{i-k+j} \ , \qquad (4)$$

де p_{i-k+j} – імовірність успіху у випробуванні i – k + j, $q_{i-k} = 1 - p_{i-k}$.

За теоремою множення ймовірностей маємо (i > k):

$$P_i = P_i(A_1) \cdot P_i(A_2) = \left(1 - \sum_{j=1}^{i-k-1} P_j\right) q_{i-k} \prod_{j=1}^{k} p_{i-k+j} \ , \qquad (5)$$

що і є розподілом, що цікавить нас.

Формула (5) рекурентна. Скористатися нею можна, знаючи ряд розподілу, за початкових умов

$$P_i = 0 \text{ при } i < k; \quad P_i = \prod_{j=1}^{k} p_j \text{ при } i = k.$$

Її достоїнство – точність, а недолік – великі обчислювальні витрати: при обчисленні ймовірності на кроці і доводиться послідовно знаходити її значення для всіх попередніх кроків j < i (для вирішення конкретних завдань їх знання часто не потрібне).

При незалежних випробуваннях і $p_i = p = \text{const}$ перша частина (4) дорівнює $q \cdot p^k$ і (5) запишеться як

$$P_i = \left(1 - \sum_{j=k}^{i-k-1} P_j\right) \cdot P \ , \qquad (6)$$

де $P = q \cdot p^k$.

Оскільки при $i < k$ поява k-серії неможлива, а при $i = k$ імовірність її появи очевидно є p^k, то початкові умови для рекурсії (6) є такими:

$$P_i = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad i < k \ , \\ p^k & \text{при} \quad i = k \ . \end{cases} \qquad (7)$$

Відмітимо, що при $i < k$ сума по j у (6) дорівнює нулю, тому для $k < i \le 2k$ справедливо

$$P_i = P = q \cdot p^k \ . \qquad (8)$$

Можна показати, що у наступному інтервалі $2k < i \le 3k$ має місце лінійний відрізок

$$P_i = P \ \left[1 - p^k + (2k+1)P\right] - P^2 \cdot i \ . \qquad (9)$$

Подальший її характер нелінійний із зміною і ускладненням закономірності через період завдовжки k. Приклад розподілу (6) наведений на рис. 3. Скорочено називатимемо його «ПЛ – розподілом» (за деякою схожістю форми з силуетом підводного човна).

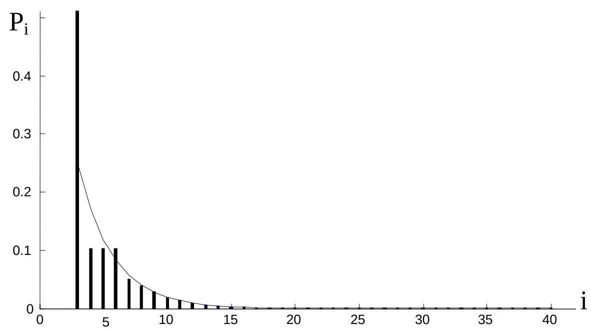

Рис. 3. Розподіл числа незалежних випробувань до появи першої серії k = 3 успіхів при p = 0,8

4. Апроксимація розподілу числа випробувань до першої серії успіхів за мінімумом інформаційної міри

Повернемося до апроксимації (1). Пронормуємо її, помноживши на величину, обернену сумі (3). При цьому одержимо

$$P_i^* = p^* \left(q^*\right)^{j-1}, \qquad (10)$$

де $i \ge k$; $p^* = 1 - 1/x$, $q^* = 1/x$.

Відмітимо також, що (2) еквівалентно запису

$$(1 - 1/x) \ (1/x)^k = q \cdot p^k \ . \qquad (11)$$

Порівнявши (11) і (10), переконуємося, що розподіл (6) апроксимується **зсунутим на** $k-1$ **випробування геометричним розподілом** з таким параметром, при якому в крапці $i = 2k$ наближений і точний розподіли **збігаються** і дорівнюють P.

Відмовимося від цієї умови, визначивши p^* так, щоб мінімізувати інформаційну міру відмінності істинного і апроксимуючого розподілів

$$J = \sum_{i=k}^{3k,>} P_i \left(\ln P_i - \ln P_i^*\right) = \min \ . \qquad (12)$$

Границі в (12) означають, що при цьому використовується істинний розподіл у вигляді (7), (8), (9) і значення площі під ним при I > 3k.

Опускаючи проміжні перетворення, наведемо остаточний результат:

$$p^* = R/(G+R) \ , \qquad (13)$$

де $R = p^k + k(2-p^k)P - 0{,}5\,k(k-1)P^2$; $G = (2k+1)\times$ $\times(1-p^k) - 0{,}5k\left[2(k+2)-(k+1)p^k\right]P + k(k^2-1)P^2/6$.

При обчисленні p^* за (13) **відпадає необхідність розв'язання рівняння (2) порядку** $(k+1)$, а інформація, яку містить апроксимуючий розподіл (10) про істинний розподіл (6), максимальна. На рис. 2 експоненціальною згладжуючою залежністю показана апроксимація (10) з параметром (13).

Можна також показати, що замінивши в (13) межу $(3k,>)$ на $(2k,>)$, коли точні значення P_i в інтервалі $2k < i \le 3k$ не використовуються, у формулі (13) одержимо інші:

$$R = p^k + k\,P, \quad G = (k+1)(1-p^k - 0{,}5\,k\,P),$$

що простіше, але точність апроксимації трохи нижча.

Легко переконатися, що при $k = 1$ має місце $p^* = p$. Це узгоджується з фізичним сенсом випробувань до першого успіху: початковий геометричний розподіл з параметром p «апроксимується» при k = 1 самим собою.

Таким чином, маємо у своєму розпорядженні розподіл числа випробувань до першої k-серії: для загального випадку у вигляді (5), для випробувань за схемою Бернуллі у формі (6) і простою його апроксимацією (10) з легко обчислюваним параметром (13).

Звернемося до прикладу: керівникам об'єктової оборони пропонується вибрати з двох її варіантів з параметрами з табл. 1 при постановці задачі «чим довше функціонує об'єкт, що обороняється, тим краще».

Таблиця 1

Параметри варіантів системи оборони

ПАРАМЕТРИ	ВАРІАНТИ	
	1	2
Ймовірність p ураження об'єкта в одному ударі	0,635	0,722
Число k уражень підряд – умова неможливості відновлення об'єкта	4	6

Розв'язання. Розглядатимемо процес функціонування системи оборони як послідовність незалежних ударів, з відновленням об'єкта між ударами, до зриву процесу при нанесенні йому серії уражень. Відмітимо, що за параметрами варіантів важко віддати перевагу одному з них: у одного варіанта краще захищеність об'єкта, а в іншого краще його відновлюваність. Постановка завдання відноситься до другого типа завдань А.М. Колмогорова «чим більше, тим краще», тому як об'єктивний показник ефективності системи виступає математичне сподівання числа ударів до зриву процесу.

Відомо, що математичне сподівання числа випробувань, що підлягають геометричному розподілу, обернене його параметру. Тому при розподілі (10) воно дорівнює $m = k + q^*/p^*$. За формулою (13) знаходимо: $p_1^* = 0{,}0847$; $p_2^* = 0{,}0558$. Для порівнюваних варіантів одержуємо: $m_1 = 14{,}8$ уд.; $m_2 = 22{,}9$ уд. Оскільки $m_2 > m_1$, висновок на користь варіанта 2, який до зриву функціонування витримує на 8 ударів більше.

Розв'язання за оцінкою в середньому може виявитися недостатнім, оскільки є ризик у кожному окремому застосуванні системи з відхиленнями від середнього, як у велику, так і в меншу сторони. Слідуючи рекомендації [4, с. 21], обчислимо додатково дисперсії числа ударів до зриву процесу:

$$D_1 = q_1^*/(p_1^*)^2 = 127{,}6 \text{ уд}^2; \ D_2 = q_2^*/(p_2^*)^2 = 303{,}2 \text{ уд}^2.$$

Порівняння дисперсій породжує лише сумніви, оскільки $D_2 >> D_1$, і розкид відносно середнього у варіанта 2 багато більше.

Звернемося до методу порівняння площ переваги систем за ефективністю [5]. Для розподілу (10) імовірність зриву процесу не раніше i-го удару буде

$$Q^*(i) = 1 - F^*(i) = 1 - \sum_{j=k}^{i-1} p^*(q^*)^{j-k} = (q^*)^{i-k}, \ i \ge k$$

і для порівнюваних варіантів складає:

$$Q_1^*(i) = (0{,}9153)^{i-4}; \qquad Q_2^*(i) = (0{,}9442)^{i-6}.$$

Тому: до $i = k_1 = 4$ вони еквівалентні, оскільки $Q_1^* = Q_2^* = 1$, а при всіх $i > k_1$ другий з них краще, оскільки $Q_2^* > Q_1^*$ при будь-якому можливому допустимому числі ударів $i_д > k_1$.

Розглянутий приклад демонструє простоту і переконливість результатів порівняльної оцінки ефективності систем за критерєм першої k-серії успіхів з використанням одержаних математичних моделей у випадку, якщо функціонування систем зводиться до схеми незалежних випробувань з $p = \text{const}$. У разі залежних випробувань з p_i = const оцінка систем здійснюється на основі рекурентного розподілу (5) з чисельним розрахунком необхідних показників.

Висновкия

1. Для оцінки ефективності систем, досягненню мети функціонування яких співвідноситься поява першої серії успіхів заданого розміру, одержані аналітичні вирази для точного (рекурентний) і наближеного (проксимуючий) розподілу числа застосувань системи до появи такої серії. На відміну від асимптотики В. Феллера одержане наближення простіше і не нижче за точністю.

2. Довжина серії встановлюється, виходячи з природи зв'язку накопичення наслідків наступних один за одним успіхів з переходом кількості в якість (досягненням мети системи).

3. Один з актуальних напрямів подальших досліджень пов'язаний, на нашу думку, з розробкою методики оцінки підготовленості операторів систем «людина-техніка» за критерієм першої серії безпомилкового і своєчасного розв'язання властивих їм задач із залученням методу моделювання навчання, запропонованого в [6].

Список літератури

1. Колмогоров А.Н. Число попаданий при нескольких выстрелах и общие принципы оценки эффективности систем стрельбы. – Труды Математического института им. В.А. Стеклова. – Вып. 12. – 1945.

2. Чуев Ю.В., Мельников П.М., Петухов С.И. и др. Основы исследования операций в военной технике. – М.: Сов. радио, 1965. – 591 с.

3. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения, т. 1. – М.: Мир, 1984. – 527 с.

4. Вентцель Е.С. Исследование операций. – М.: Сов. радио, 1972. – 552 с.

5. Чабаненко П.П. Обоснование показателей при сравнительной оценке эффективности вооружения и техники // Зб. наук. праць. – Вип. 2 (5). – Севастополь: СВМІ ім. П.С. Нахімова. – 2004. – С. 7-16.

6. Чабаненко П.П. Методология и техника разработки структурных моделей обучения операторов человеко-машинных систем // Зб. наук. праць „Проблеми інженерно-педагогічної освіти". – Х.: УІПА. – 2004. – №7. – С. 73-85.

Надійшла до редколегії 22.11.2006

Рецензент: д-р техн.. наук, проф.. Ю.В. Стасєв, Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків