УДК 519.81:621.372

А.А. Засядько

Черкаський університет банківської справи УБС НБУ, Черкаси

ЗНИЖЕННЯ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ СКЛАДНОСТІ ЗА ДОПОМОГОЮ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ В ЗАДАЧІ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Для зменшення обчислювальної складності при вирішенні задач нелінійного програмування великої розмірності пропонується використовувати багатокритеріальну оптимізацію. Цільова функція, яка задається у вигляді нелінійної схеми компромісів, дозволяє класифікувати обмеження задачі по ступеню конфліктності. Це дозволяє додатково спростити задачу, в подальшому не враховуючи неконфліктні критерії.

Ключові слова: *обчислювальна складність, задача нелінійного програмування, багатокритеріальна оптимізація, нелінійна схема компромісів*

Вступ

Постановка проблеми і аналіз публікацій. При розв’язанні задачі нелінійного програмування (ЗНП) великої розмірності для планування об’єктів АСУ доводиться мати справу з проблемою багатоекстремальності цільової функції в області обмежень, або, іншими словами, “ефектом лабіринту” [1, 2]. Щоб знайти глобальний екстремум цільової функції, необхідно за допомогою комбінаторного пошуку організувати повний перебір усіх екстремумів, що є обчислювально складною процедурою [1, 2].

Багатокритеріальні методи оптимізації дозволяють ефективно вирішувати задачі досить широкого класу [3 – 5]. Особливе місце в цих методах займає нелінійна схема компромісів або згортка А.Н. Вороніна, уведена в [3, 4]. Вона являє собою скалярний критерій особливого вигляду, у який згортаються частинні критерії, і в багатокритеріальній оптимізації відіграє таку саму роль, що і цільова функція в ЗНП. Відомо, що, на відміну від інших скалярних критеріїв, нелінійна схема компромісів дозволяє знайти розв’язок, що неполіпшується (оптимальний по Парето), а у випадку опуклих частинних критеріїв – унімодальний (єдиний) розв’язок.

Тому **мета** даної роботи – зменшити обчислювальну складність ЗНП за допомогою багатокритеріальної оптимізації на основі нелінійної схеми компромісів.

Постановка задачі. Нехай R^n– n-мірний простір векторів $y=(y_1, y_2,\dots,y_n)$,$g(y)$ і $\varphi(y)$ – задані вектори-функції, визначені на R^n:

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2,\dots,y_n),$$

$$g(y)=\{g_1(y),g_2(y),\dots,g_m(y)\}=0 \text{ –} \tag{1}$$

обмеження у формі рівностей,

$$\varphi(y) = \{\varphi_1(y), \varphi_2(y),\dots,\varphi_r(y)\} \geq 0 \text{ –}$$

обмеження у формі нерівностей,

де $g_i(y)$ і $\varphi_i(y)$ – скалярні функції.

Позначимо через G множину векторів у простору $\mathbf{R}^n$, для яких $g(y)=0$ і $\varphi(y)\geq 0$, тобто

$$G\equiv\{y;\ g(y)=0;\ \varphi(y) \geq 0\}.$$

Нехай F(y) – задана скалярна функція. ЗНП полягає у знаходженні вектора $\tilde{y}$ на $\mathbf{R}^n$, мінімізуючого функцію F(y) на множині G, тобто такого, що

$$F(\tilde{y}) = \min_{y\in G} F(y). \tag{2}$$

Функція F(y) називається цільовою функцією задачі (1).

Якщо в ЗНП функції F(y), g(y) і φ(y) – лінійні, то вона називається задачею лінійного програмування (ЗЛП). Задачі оптимального планування, як правило, також є ЗЛП.

Багатокритеріальна модель задачі нелінійного програмування

Нехай задана множина можливих розв’язків Y, яка складається з векторів

$$y = \{y_i\}_{i=1}^{n}$$

n-мірного евклідового простору. Якість розв’язку оцінюється по сукупності суперечливих частинних критеріїв, що утворюють s-мірний вектор

$$I(y) = \{I_k(y)\}_{k=1}^{S} \subset F,$$

який визначений на множині Y, і який належить класові F допустимих векторів ефективності. Вектор частинних критеріїв обмежений допустимою областю: $I\in M$.

Для обмежень, що утворюють допустиму область M у формі рівностей $g(x)=0$, де $x=y$, складемо частинний критерій суми квадратів нев’язок

$$I_{рівн} = \sum_{i=1}^{m} g_i^2(x) \leq m\varepsilon_1^2 .$$

Для обмежень у формі нерівностей $\varphi(x)\geq 0$ перетворимо обмеження у вигляді нерівностей у рівності за допомогою введення нової змінної v_i, що має розмірність r:

$$\phi_i(x) - v_i^2 = 0\,, \qquad (3)$$

Такий підхід використовується для методу множників Лагранжа, при перетворенні умовної задачі оптимізації в безумовну.

Для методу множників Лагранжа це перетворення запишемо як

$$I(x,\lambda,v) = \\ = F(x) + \sum_{i=1}^{r}\lambda_i\left[\phi_i(x) - v_i^2\right] + \\ + \sum_{j=r+1}^{r+m}\lambda_j g_j(x);\ j = \overline{1,r+m};\ i = \overline{1,n}, \qquad (4)$$

де задача мінімізації зведеться до розв'язання системи нелінійних рівнянь (СНР) розмірності 2r+m+n рівнянь:

$$\frac{\partial I(x)}{\partial \lambda_j} = 0\,;\ \frac{\partial I(x)}{\partial x_i} = 0\,;\ \frac{\partial I(x)}{\partial v_l} = 0\,,$$

$$j = \overline{1,r+m},\ \ i = \overline{1,n},\ \ l = \overline{1,r}\,, \qquad (5)$$

Для обмежень у формі нерівностей $\varphi(x)\geq 0$ складемо частинний критерій суми квадратів нев'язок

$$I_{\text{нерівн}} = \sum_{i=1}^{r}\left[\varphi_i(x) - v_i^2\right]^2 \leq r\varepsilon_2^2. \qquad (6)$$

Отже, багатокритеріальна задача для (1) запишеться в такий спосіб.

$$\begin{cases} \min I_1 = F(x);\ 0 \leq I_1 \leq I_{1m}; \\ \text{при}\ \ g(x) = 0; \\ \min I_2 = \sum_{i=1}^{m} g_i^2(x);\ \ 0 \leq I_2 \leq I_{2m}, \\ I_{2m} = m\varepsilon_1^2; \\ \text{при}\ \ \varphi(x) \geq 0; \\ \min I_3 = \sum_{i=1}^{r}\left[\varphi_i(x) - v_i^2\right]^2; \\ 0 \leq I_3 \leq I_{3m},\ \ I_{3m} = r\varepsilon_2^2. \end{cases} \qquad (7)$$

Для векторного критерію I, компонентами якого є частинні критерії:

кількість перемінних: r+m+n,

n – розмірність перемінних $x_1, x_2, \ldots x_n$;

m – розмір обмежень вигляду рівностей;

r – розмір обмежень вигляду нерівностей.

Задача зводиться до розв'язання системи нелінійних рівнянь.

Багатокритеріальна задача (7) зводиться до розв'язання однієї задачі оптимізації нелінійної схеми компромісів [3, 4]

$$I^* = \sum_{j=1}^{3}\frac{1}{\left(1 - \frac{I_j}{I_{j\max}}\right)^g} \qquad (8)$$

при умовах з (7), де g_j — позитивні константи. Коли критерії рівнозначні, $g_j = 1,\ \ j = \overline{1,3}$.

Якщо необхідно ввести пріоритет одних критеріїв над іншими і мати різну чутливість до варіації параметрів задачі, то замість одиниці в чисельнику виразу (8) уводять вагові коефіцієнти α_j, на які накладаються обмеження

$$\sum_{j=1}^{3}\alpha_j = 1\,.$$

Необхідні умови мінімуму скалярного критерію I* дають систему кінцевих рівнянь низької розмірності

$$\frac{\partial I^*}{\partial y_i} = 0, i = \overline{1,n}\,, \qquad (9)$$

яка зводиться, наприклад, з використанням методу Ньютона до СЛАР.

У роботах [3, 4] показано, що багатокритеріальна модель (8) забезпечує вибір точки розв'язку на множині рішень, оптимальних по Парето (далі – множина Р), з урахуванням заданих обмежень на припустиму область зміни векторного критерію, якщо множина Р належить цієї області.

Тому для розв'язання багатокритеріальних задач, у яких задані обмеження з формули (7) на компоненти векторного критерію, варто рекомендувати модель (8).

Вкажемо недоліки нелінійної схеми компромісів (8), яка складається з частинних критеріїв (7) :

- громіздкість рівнянь при великій розмірності;
- Якщо розв'язок знаходиться на обмеженні, то воно буде знайдено з погрішністю, хоча і менше необхідної. За допомогою формули (8) неможливо досягнути принципово точного розв'язку, інакше знаменники доданків будуть обертатися в нуль.

Переваги нелінійної схеми компромісів (8):

- Система нелінійних рівнянь для згортки Вороніна має розмірність r+m+n рівнянь, у той час як для методу невизначених множників Лагранжу - 2r+m+n.
- Унімодальність згорнутого критерію. Нелінійна схема компромісів при опуклих частинних критеріях гарантує один дійсний корінь у межах обмежень.
- Нелінійна схема компромісів зводить задачу (2) з обмеженнями (1) до опуклої ЗНП, якщо частинні критерії – опуклі.

Після застосування формули (8) скалярну ЗНП (2) можна розв'язувати також як і безумовну задачу оптимізації, але знайти всі значення $\tilde{y}$, при яких

$$F(\tilde{y}) = \min_{y \in G} F(y).$$

і вибрати з них тільки один, який задовольняє обмеженням на частинні критерії. Загальні методи безумовної оптимізації, реалізовані програмно, в даному випадку неприйнятні, тому що знаходять локальні мінімуми поза обмеженнями, тому краще користуватися загальними методами і програами розв'язку ЗНП.

В роботі [5] запропонована методика, в якій використовується нелінійна схема компромісів для гнучкої адаптації у відповідності до напруженості критеріїв, тобто коли $I_i \to I_{im}$.

Ця методика дозволяє виявити конфліктні критерії, відсортувати критерії за ступенем конфліктності і в подальшому використовувати тільки конфліктні критерії.

Неконфліктні критерії можна не враховувати як такі, що не впливають на результати розв'язку.

Тому такий підхід можна використати також для додаткового спрощення початкової задачі (2) з обмеженнями (1). По аналогії з [5] можна стверджувати, що нелінійна схема компромісів може слугувати для класифікації обмежень (1) за ступенем конфліктності.

Неконфліктні обмеження не враховуються в подальшому розв'язку задачі (2).

На простому прикладі покажемо алгоритм, на підставі якого ЗНП розв'язується за допомогою багатокритеріальної оптимізації.

Приклад

Знайти мінімум цільової функції F(y) при обмеженні φ(y), g(y):

$$\min F(y) = y_1^2 + y_2^2 \;;$$

$$\varphi(y):\ (y_1-2)^2+(y_2-2)^2 \le 2; \qquad (10)$$

$$g(y):\ y_1+2y_2=4.$$

Дана задача має два невідомих, два обмеження і тому легко розв'язується за допомогою методу невизначених множників Лагранжа і не вимагає переводу її в більш складний клас багатокритеріальної оптимізації.

Однак у загальному випадку (наприклад, для некоректних задач при великій розмірності), це може виявитися необхідним з висловлених раніше думок.

Застосуємо цей метод для отримання розв'язку (10).

$$F^* = y_1^2 + y_2^2 + \lambda_1[(y_1-2)^2+(y_2-2)^2 - 2 - v^2] +$$
$$+\lambda_2[y_1+2y_2-4];$$

$$\frac{\partial F^*}{\partial y_1} = 2y_1 + 2\lambda_1(y_1-2) + \lambda_2 = 0 \;;$$

$$\frac{\partial F^*}{\partial y_2} = 2y_2 + 2\lambda_1(y_2-2) + 2\lambda_2 = 0 \;;$$

$$\frac{\partial F^*}{\partial \lambda_1} = y_1^2 - 4y_1 + 6 + y_2^2 - 4y_2 - v^2 = 0 \;;$$

$$\frac{\partial F^*}{\partial \lambda_2} = y_1 + 2y_2 - 4 = 0 \;;$$

$$\frac{\partial F^*}{\partial v} = 2\lambda_1 v = 0 \;;$$

$$\tilde{y} = (0{,}8;\ 1{,}6).$$

Для того, щоб застосувати модель багатокритеріальної оптимізації на основі нелінійної схеми компромісів, необхідно довизначити задачу (10). Тут потрібно знайти верхні значення критеріїв I_{imax}, тому що значення критеріїв повинні задовольняти умовам $0 \le I_i \le I_{imax}$. Для визначення I_{1m} потрібно знайти максимум (мінімум) цільової функції F у заданих межах зміни її аргументів, але відкидаючи всю систему обмежень типу рівностей і нерівностей. З нерівності $(y_1-2)^2+(y_2-2)\ ^2 \le 2$ можна визначити область допустимих значень (ОДЗ) аргументів $0 \le y_1 \le 3$, $0 \le y_2 \le 3$.

У загальному випадку ОДЗ аргументів визначається з технічного завдання реальних ЗНП.

1. Знаходимо I_{1m} в ОДЗ аргументів $0 \le y_1 \le 3$, $0 \le y_2 \le 3$.

$$\max I_1 = y_{1max}^2 + y_{2max}^2 = 9 = I_{1m}\,.$$

2. Знаходимо I_{2m}. Обмеження у вигляді нерівностей утворить частинний критерій (якщо нерівностей багато, то береться їхня сума), і права частина нерівності (2 у нерівності для (10)) визначає їхнє максимальне значення

$$I_2=(y_1-2)^2+(y_2-2)^2;\ 0 \le I_2 \le I_{2max}=2.$$

3. Знаходимо I_{3m}. Обмеження у вигляді рівностей утворить частинний критерій (а якщо рівностей багато, то також береться їхня сума). Права частина нерівності визначає точність, з якою буде проводитися знаходження невідомих. Як було зазначено раніше, не можна знайти за формулою (9) точний розв'язок, тому рівність буде обчислюватися з заданою похибкою.

$$I_3 = y_1+2y_2-4 \le 10^{-3},\ 0 \le I_3 \le I_{3max}=10^{-3}.$$

Тому частинні критерії для ЗНП (10) мають вигляд:

$$I_1 = y_1^2 + y_2^2;\ 0 \le I_1 \le 9;\ I_2=[(y_1-2)^2+(y_2-2)-v^2]^2;$$
$$0 \le I_2 \le 2^2.$$
$$I_3=[y_1+2y_2-4]^2;\ 0 \le I_3 \le (10^{-3})^2.$$

3. Згортаємо отримані частинні критерії в скалярний критерій за допомогою формули (9):

$$\min_y I^*(y) =$$

$$= \frac{1}{1-\dfrac{y_1^2+y_2^2}{9}} + \frac{1}{1-\left[\dfrac{y_1+2y_2-4}{10^{-3}}\right]^2} +$$

$$+ \frac{1}{1-\left[\dfrac{(y_1-2)^2+(y_2-2)^2-v^2}{2}\right]^2};$$

$$0 \le I_1 \le 9,$$

$$0 \le I_2 \le 2^2,$$

$$0 \le I_3 \le (10^{-3})^2$$

або

$$0 \le y_1^2 + y_2^2 \le 9;$$

$$0 \le [(y_1-2)^2+(y_2-2)^2]^2 \le 2^2;$$

$$0 \le [y_1+2y_2-4]^2 \le (10^{-3})^2. \qquad (11)$$

Знаходимо розв’язок (11). Цей розв’язок буде наближеним.

Наприклад, замість вже отриманих точних значень $\tilde{y}$ =(0,8; 1,6) методом невизначених множників Лагранжа, за допомогою оптимізаційних програм можна одержати

$$\tilde{y} = (0{,}799993259;\ 1{,}60000337).$$

Якщо важлива точність, то цей розв’язок можна взяти як початкове наближення й уточнити відомими методами. Зауважимо, що оптимізаційні програми для розв’язку ЗНП, як правило, самі одержують наближений розв’язок $\tilde{y}$.

Визначимо степінь конфліктності критеріїв даної задачі [5]. Тоді при розв’язанні (11) значення критеріїв:

$$I_1=3{,}2;\ I_2=-7{,}2\times10^{-6};\ I_3=2{,}81\times10^{-9}.$$

Критерії I_2, I_3 конфліктують з критерієм цільової функції I_1, спростити початкову задачу (10) зменшенням кількості критеріїв неможливо.

Висновки

Представлення ЗНП більш складною багатокритеріальною задачею виправдане зниженням обчислювальної складності задач оптимального планування об’єктів АСУ високої розмірності, через регуляризацію некоректної задачі і зменшення її розмірності.

По суті, отримана багатокритеріальна модель ЗНП є квазіаналогом відносно ЗНП. Можна стверджувати, що здійснюється редукція ЗНП великої розмірності в ЗНП меншої розмірності, яку можна розв’язувати звичайними оптимізаційними методами.

Список літератури

1. *Черноруцкий И.Г. Оптимальный параметрический синтез / И.Г. Черноруцкий. – Л.: Энергоатомиздат, 1987. – 126 с.*
2. *Юдин Д.Б. Число и мысль. Вып.8 / Д.Б. Юдин, А.Д. Юдин. – М.: Знание, 1985. – 192 с.*
3. *Векторная оптимизация динамических систем / А.Н. Воронин, Ю.К. Зиатдинов, О.И. Козлов, В.С. Чабанюк; под ред. А.Н, Воронина. – К.: Техніка, 1999. – 284 с.*
4. *Воронин А.Н. Многокритериальный синтез динамических систем / А.Н. Воронин. – К.: Наук.думка, 1992.—160 с.*
5. *Засядько А.А. Два этапа в методике гибкой адаптации в задачах многокритериальной оптимизации / А.А. Засядько // Вісник ЧДТУ. – 2002. – № 2 – С. 14 -17.*

Надійшла до редколегії 2.10.2012

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.О. Філатов, Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків.

ПРИМЕНЕНИЕ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ УМЕНЬШЕНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СЛОЖНОСТИ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

А.А.Засядько

Для снижения вычислительной сложности при решении задач нелинейного программирования высокой размерности предлагается использовать многокритериальную оптимизацию. Целевая функция, заданная в виде нелинейной схемы компромиссов позволяет классифицировать ограничения задачи по степени конфликтности. Это позволяет дополнительно упростить задачу, не учитывая при решении неконфликтные ограничения.

***Ключевые слова**: вычислительная сложность, задача нелинейного программирования, многокритериальная оптимизация, нелинейная схема компромиссов.*

USING MULTI-CRITERIA OPTIMIZATION FOR DECREASING I N COMPUTING COMPLEXITY OF THE PROBLEMS OF NONLINEAR PROGRAMMING

A.A. Zasjad’ko

Decrease in computing complexity of high-order problem of nonlinear programming is reached due to application the multi-criteria optimization. The non-linear schema of compromise is offered to use for equalizing partial criteria that implement the reduction of tensed situation to the calm one are suggested. The numerical implementation on the base of this scheme does not demand additional limitations by the calm criteria though these limitations are necessary by tensed criteria.

***Key words:** computing complexity, problems of nonlinear programming, multi-criteria optimization, nonlinear schema of compromise.*