УДК 681.324:621.325

О.О. Можаєв, А.О. Подорожняк, С.Ю. Стасєв

Харківський університет Повітряних Сил імені І. Кожедуба, Харків

ОЦІНКА ПАРАМЕТРІВ НЕГАУСОВИХ СТОХАСТИЧНИХ ПРОЦЕСІВ

Розглянуті результати аналізу негаусових стохастичних процесів. Вивчена проблема застосовності методу максимальної правдоподібності для випадкових процесів. Запропонований метод оцінки числових характеристик випадкової величини.

стохастичні процеси, максимальна правдоподібність, негаусовий розподіл

Вступ

Постановка задачі та аналіз літератури. Статистичний аналіз стохастичних процесів займає суттєве місце в теоретичних дослідженнях явищ, що мають різну фізичну природу (радіолокація, розсіяння радіохвиль на неоднорідностях, флуктуації параметрів сигналу, дослідження телекомунікаційного трафіка тощо). Вирішенню завдання статистичного аналізу присвячена значна кількість робіт [1 – 5]. У них розглядаються алгоритми статистичного аналізу випадкових величин і пропонуються оптимальні алгоритми ухвалення рішень при заданих критеріях якості. Одним з найбільш поширених у теперішній час критеріїв є критерій максимальної правдоподібності, згідно з яким при спостереженні вибірки приймається та з гіпотез, якій відповідає більше значення функції правдоподібності вибірки. Алго-

© О.О. Можаєв, А.О. Подорожняк, С.Ю. Стасєв

ритм, який ґрунтується на цьому критерії, одержав назву алгоритму максимальної правдоподібності, і у ряді випадків (наприклад, для гаусового розподілу стохастичної величини) достатньо повно збігається з оптимальним алгоритмом. Але останнім часом значний практичний інтерес здобули процеси, які не можна описувати як нормальні випадкові процеси, і для таких процесів, які підлягають негаусовим розподілам (наприклад, гіперболічний, ступеневий, Вейбулла та ін.) [6 – 8], застосовність алгоритму максимальної правдоподібності викликає сумніви. От чому аналіз негаусових розподілів випадкових величин і аналіз поведінки оцінки параметрів такого розподілу є **актуальним науковим завданням**.

Метою даної статті є аналіз застосовності методу максимальної правдоподібності та розробка методів оцінювання невідомих параметрів.

Результати теоретичних досліджень

Розглянемо ряд прикладів, до яких метод максимальної правдоподібності не придатний, і слід проводити оцінки невідомих параметрів іншими методами. Уявимо, що проводиться прийом або подовжньої, або поперечної складової вектора поляризації електромагнітного поля $\vec{E}$. Припустимо, що можливо зміряти тільки подовжню компоненту даного вектора (рис. 1) E_t, яка може набувати значень від $E = \left|\vec{E}\right|$ до 0.

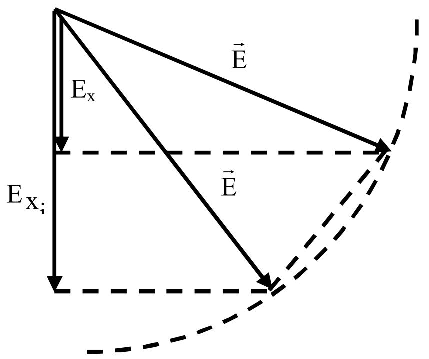

Рис. 1. Розклад вектора поляризації
на подовжню компоненту електромагнітного поля

Як легко бачити з простих геометричних міркувань, щільність імовірності того, що в довільний момент часу значення подовжньої компоненти E_t дорівнює E_x, має вигляд:

$$p(E;E_x)=\begin{cases}\dfrac{1}{E} & \text{при} \quad 0 \le E_x \le E; \\ 0 \quad \text{при} & E_x > E. \end{cases} \qquad (1)$$

Припустимо, що ми вимірювали подовжню компоненту вектора електромагнітного поля N разів, тобто одержали такий набір вимірювань:

$$\widetilde{E}_x = E_{x_1}, E_{x_2}, \ldots, E_{x_N}.$$

Імовірність одержати набір $\widetilde{E}_x$ дорівнює:

$$p\left(E,\widetilde{E}_x\right)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{E}\right)^N & \text{при } 0 \le \widetilde{E}_x \le E; \\ 0 & \text{при } \widetilde{E}_x > E. \end{cases} \qquad (2)$$

Застосуємо для оцінки (2) принцип максимальної правдоподібності:

$$p\left(E';\widetilde{E}_x\right) = \max \text{при} \quad E' = \overline{E}. \qquad (3)$$

Із співвідношення (3) випливає умова:

$$\overline{E} = E_{x_{max}},$$

де $E_{x_{max}}$ – найбільша з компонент величини $\widetilde{E}_x$.

Насправді, із спаданням E' ймовірність $p\left(E';\widetilde{E}_x\right)$ зростає доти, поки E' не стане меншим за яке-небудь зміряне значення E_{x_i}.

Очевидно, що оцінка (3) дає прийнятне значення $\overline{E}$, але в той же час цей результат є випадковим, оскільки даний розподіл істотно відрізняється від гаусового, і тому умову максимальної правдоподібності не можна строго обґрунтувати, як це зроблено в [1]. Крім того, значення величини E більше значення $E_{x_{max}}$ через те, що ймовірність появи серед усіх можливих значень компонент вектора $E_{x_{max}}$ компоненти, яка в точності дорівнює E, нульова.

Для отримання більш обґрунтованої оцінки величини E розглянемо ймовірність того, що всі N значень величини E_x лежать у заданому інтервалі

$$0 \le E_{x_i} \le E_x < E \quad \text{при} \quad i = 1,2,\ldots,N. \qquad (4)$$

Імовірність виконання нерівності (4) має вигляд:

$$p_N(E;E_x) = \left(\frac{E_x}{E}\right)^N.$$

Введемо дві величини $E_{x_1}(\varepsilon)$ і $E_{x_2}(\varepsilon)$ такі, що імовірність виконання кожної з умов

$$E_{x_{max}} < E_{x_2}(\varepsilon) \quad \text{та} \quad E_{x_{max}} > E_{x_1}(\varepsilon)$$

дорівнює $1-\varepsilon$.

Тоді маємо:

$$\left(\frac{E_{x_1}(\varepsilon)}{E}\right)^N = \varepsilon \quad \text{та} \quad \left(\frac{E_{x_2}(\varepsilon)}{E}\right)^N = 1-\varepsilon,$$

звідки з урахуванням того, що $-\ln\varepsilon << N$, можна одержати такі співвідношення:

$$E_{x_1} = E\varepsilon^{1/N} \sim E\left(1 + \frac{\ln\varepsilon}{N}\right);$$

$$E_{x_2} = E(1-\varepsilon)^{1/N} \sim E\left(1 - \frac{\varepsilon}{N}\right).$$

Тому можна стверджувати, що з великою імовірністю виконується нерівність:

$$E_{x_{max}}(1-\varepsilon)^{-1/N} < E < E_{x_{max}}\varepsilon^{-1/N},$$

якщо припустити, що

$$-\frac{\ln\varepsilon}{N} << 1.$$

Також можна скласти і таке співвідношення:

$$E_{x_{max}}\left(1 + \frac{\varepsilon}{N}\right) < E < E_{x_{max}}\left(1 - \frac{\ln\varepsilon}{N}\right). \qquad (5)$$

Одержана оцінка (5) при достатньо великих N виявляється дуже точною. Особливо цікаво те, що інтервал (5) спадає пропорційно, а не як $1/\sqrt{N}$, що характерне для розподілу Пуассона.

Знайдемо ще одну оцінку, використовуючи середнє значення $\overline{E}_x$ результатів вимірювань. Якщо визначити середнє значення як:

$$\overline{E}_x = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E_{x_i}$$

і враховуючи незалежність всіх значень E_{x_i}, можна набути значення математичного сподівання і дисперсії величини $\overline{E}_x$:

$$M\left[\overline{E}_x\right] = \frac{1}{2}E, \quad D\left[(\overline{E}_x)\right] = \frac{E^2}{12N}.$$

Розподіл величини $\overline{E}_x$ (при не дуже малих N) схожий на гаусовий розподіл, і тому можна припустити:

$$\left|\overline{E}_x - \frac{E}{2}\right| < \frac{\alpha E}{\sqrt{12N}}, \quad \text{при } \alpha = 3 \quad \text{або } \alpha = 4,$$

і тоді, цілком імовірно, можна одержати такі оцінки для величини E:

$$2\overline{E}_x \Big/ \left(1 + \frac{\alpha}{\sqrt{3N}}\right) < E < 2\overline{E}_x \Big/ \left(1 = \frac{\alpha}{\sqrt{3N}}\right). \qquad (6)$$

Межі помилки визначення модуля напруженості електричного поля, одержані в результаті оцінки N вимірювань його подовжньої складової, представлені на рис. 2, як функції від кількості вимірювань при фіксованому значенні $\varepsilon = 3 \cdot 10^{-3}$.

Внутрішні криві графіка одержані на підставі співвідношення (5), а зовнішні – співвідношення (6). Відмітимо, що оцінка (5), що дає інтервал значень, який змінюється обернено пропорційно до кількості вимірювань N, не враховує помилку вимірювання величини E. Урахування такої помилки призводить до того, що для великих значень N інтервал значень визначається в основному стандартною помилкою вимірювання величини E і змінюється обернено пропорційно до квадратного кореня з кількості вимірювань.

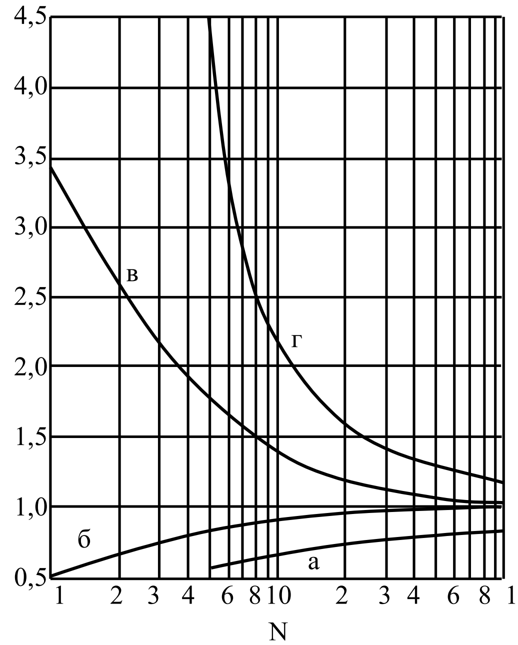

Рис. 2. Межі помилки визначення модуля напруженості електричного поля:
а, г – межі помилки при N~3·10 – 3·10²
б, в – межі помилки при N> 3·10³

Висновки

У результаті проведених досліджень установлено. що:

– для випадкової величини, функція розподілу якої описується показовою функцією, метод максимальної правдоподібності не може бути застосовний;

– запропонований спосіб визначення невідомих параметрів розподілу дозволив провести оцінки математичного сподівання та дисперсії стохастичної величини;

– у результаті аналізу наведеного розподілу встановлено, помилка вимірювання невідомої величини змінюється обернено пропорційно до квадратного кореня з кількості вимірювань, а не обернено пропорційно до кількості вимірювань, що характерне для нормального розподілу.

Список літератури

1. *Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Кн. 1. – М.: Сов. радио, 1974. – 552 с.*

2. *Кучук Г.А. Фрактальный гауссовский шум в трафиковых трассах // Системи обробки інформації. – Х.: ХВУ, 2004.– Вип. 3. – С. 91-99.*

3. *Стрелков А.И.,. Можаев А.А., Марченко В.В. К вопросу о разрешающей способности монохроматических радиосигналов по частоте акустооптических спектроанализаторов // Системи обробки інформації. – Х.: ХВУ, 2002. – Вип. 6 (22). – С. 46-50.*

4. *Кучук Г.А. Метод дослідження фрактального мережного трафіка // Системи обробки інформації. – Х.: ХУ ПС, 2005. – Вип. 5 (45), – С. 74-84.*

5. *Можаев А.А. Оценка достоверности определения параметров телекоммуникационнного трафика // Системи обробки інформації. – Х.: ХУ ПС, 2006. – Вип. 9(58). – С. 59-61.*

6. Фрактальный анализ процессов, структур и сигналов // Кучук Г.А., Можаев А.А., Пащенко Р.Э, Рук кас К.М. Коллективная монография. – Х.: ЭкоПерспектива, 2006. – 360 с.

7. Кучук Г.А., Можаєв О.О., Воробйов О.В. Метод прогнозування фрактального трафіка // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. – 2006. – № 6(18). – С. 181-188.

8. Кучук Г.А., Можаєв О.О., Воробйов О.В. Аналіз та моделі самоподібного трафіка // Авиационно-космическая техника и технология. – 2006. – № 9(35). – С. 173-180.

Надійшла до редколегії 16.08.2006

Рецензент: доктор технічних наук, професор І.І. Обод, Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків.