

УДК 621.327:629.391

І.В. Рубан, С.В. Дуденко, М.М. Колмиков

Харківський університет Повітряних Сил імені Івана Кожедуба, Харків

ОДНОМІРНЕ ЗМІЩЕНЕ ДИСКРЕТНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ХАРТЛІ

Вводяться в розгляд аналітичні вирази зміщеного одномірного дискретного перетворення Хартлі. перетворення Хартлі, цифрова фільтрація зображень, дискретно-косинусне перетворення

Вступ

Постановка задачі. У теперішній час при обробці інформації, зокрема для цифрової фільтрації зображень, широко застосовуються унітарні перетворення, такі як дискретно-косинусне перетворення, перетворення Уолша-Адамара, перетворення Хаара та ін. [3, 4]. Різні властивості даних перетворень дозволяють розробляти на їхній основі алгоритми обробки інформації, спрямовані на рішення широкого спектра наукових задач. Отже, виявлення

раніше невідомих властивостей існуючих унітарних перетворень дозволить розробити нові алгоритми обробки інформації.

Аналіз літератури. В [5] був проведений первинний аналіз способу зміщення фаз і енергії сигналу ДПХ для випадку, коли зміщення проводилося на одну координату.

Мета статті. Дослідження одномірного зміщеного дискретного перетворення Хартлі з метою розробки нових підходів до цифрової обробки зображень.

Основний матеріал

Суть одновимірного дискретного перетворення Хартлі. Перетворення Хартлі має властивість симетричності прямого й оберненого перетворень, що дозволяє використати його для розробки методів і алгоритмів обробки зображень [2].

Пряме й обернене ДПХ визначається співвідношеннями:

$$\begin{aligned} H(v) &= N^{-1} \sum_{\tau=0}^{N-1} f(\tau) \text{cas}(2\pi v\tau / N); \\ f(\tau) &= \sum_{v=0}^{N-1} H(v) \text{cas}(2\pi v\tau / N), \end{aligned} \quad (1)$$

де $\text{cas}(\Theta) = \cos(\Theta) + \sin(\Theta)$.

Особливістю даного перетворення є функція $\text{cas}(\Theta)$, уведена Хартлі в 1942 році (рис. 1).

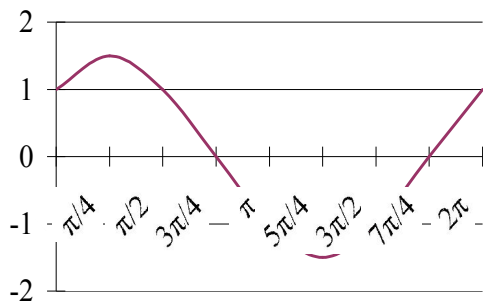


Рис. 1. Графік функції $\text{cas}(\Theta)$

Періодичність функції $\text{cas}(\Theta)$ дозволила одержати аналітичні вираження зміщеного дискретного перетворення Хартлі (ЗДПХ) для випадку, коли зміщення проводилося на одну координату [5]:

$$\begin{aligned} H(v) &= N^{-1} \sum_{\tau=1}^N f(\tau) \text{cas}(2\pi v\tau / N); \\ f(\tau) &= \sum_{v=1}^N H(v) \text{cas}(2\pi v\tau / N). \end{aligned} \quad (2)$$

В [5] також було показано, що вирази (2) не є виразами, породжуваними теоремою про зсув для ДПХ. Подальше дослідження дозволило узагальнити вирази (2) й одержати вирази такого вигляду:

$$\begin{aligned} H(v) &= N^{-1} \sum_{\tau=d}^Z f(\tau) \text{cas}\left(\frac{2\pi(v+d)(\tau+d)}{N}\right), \\ f(\tau) &= \sum_{v=d}^Z H(v) \text{cas}\left(\frac{2\pi(v+d)(\tau+d)}{N}\right), \end{aligned} \quad (3)$$

де $Z = N - 1 + d$, а $d = \overline{0, N-1}$ – використовуване зміщення.

Якщо покласти $d = 0$, одержимо вирази (1). Даний факт говорить про те, що вирази ДПХ є частковим випадком для виразів (3).

Розглянемо всі можливі варіації матриць коефіцієнтів при обробці чотириточкового вектора виразами (1) і (3).

Для ДПХ матриця коефіцієнтів, що формується шляхом підстановки відповідних значень у вирази (1), має вигляд

$${}^4H = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}. \quad (4)$$

В [5] показано, що матриця коефіцієнтів ЗДПХ для $d=1$ має вигляд:

$${}^4H_{CM}^1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}. \quad (5)$$

Порівнявши матриці ${}^4H_{CM}^1$ і 4H , можемо помітити, що в першому випадку енергія сигналу зміщується убік останньої точки.

Решта матриць для ЗДПХ будуть мати вигляд:

$${}^4H_{CM}^2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad (6)$$

$${}^4H_{CM}^3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}. \quad (7)$$

Для матриць ${}^4H_{CM}^2$ і ${}^4H_{CM}^3$ можемо помітити, що енергія сигналу також зміщена й відрізняється від 4H .

Вірогідність отриманих виразів (3) підтверджується проведеними експериментами, результати яких наводяться далі по тексту.

Таблиця 1

Результати дослідження чотириточкових перетворень

4H				
252	253	254	255	Вихідний вектор
253,5	-1	-0,5	0	Перетворений
252	253	254	255	Відновлений
${}^4H_{CM}^1$				
252	253	254	255	Вихідний вектор
0	0,5	1	253,5	Перетворений
252	253	254	255	Відновлений
${}^4H_{CM}^2$				
252	253	254	255	Вихідний вектор
-0,5	0	253,5	1	Перетворений
252	253	254	255	Відновлений
${}^4H_{CM}^3$				
252	253	254	255	Вихідний вектор
-1	253,5	0	0,5	Перетворений
252	253	254	255	Відновлений
${}^4H_{CM}^4$ (повний цикл)				
252	253	254	255	Вихідний вектор
253,5	-1	-0,5	0	Перетворений
252	253	254	255	Відновлений

Аналізуючи результати (табл. 1), можемо помітити, що абсолютні значення точок перетворених векторів зберігаються, відбувається зміна їхніх координат і фаз, що в черговий раз вимагає додаткової перевірки виразів 3 на відповідність теоремі про зсув. Розглянемо результати одного експерименту при дослідженні ^{16}H (табл. 2). У цьому випадку маємо не тільки зміни фаз і координат, але й деяких абсолютних значень. Дані властивості обумовлені періодичністю функції $\cos(\Theta)$, період якої становить величина 2π .

Для чотириточкових перетворень внесені вправлення обумовлюються аргументом функції \cos , який дорівнює $2\pi/4$, тобто $\pi/2$, що відповідає циклічному зсуву на величину d і множенню на 1 або -1.

Для шістнадцятиточкових перетворень ця величина визначається як $2\pi/16$, тобто $\pi/8$, що відповідає циклічному зсуву на величину d і множенню на значення $\cos(x \cdot \pi/8)$, де значення x залежить від v і τ (вирази (1) і (3)). Дані значення відрізняються від значень для чотириточкових перетворень.

Таблиця 2

Результати дослідження шістнадцятиточкових перетворень

Вихідний вектор		255	255	255	255	255	255	255	255	255	0	0	0	0	0	0	
Перетворений вектор з усіма зміщеннями		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0		143,4	80,12	15,94	23,85	15,94	10,65	15,94	3,17	15,94	-3,17	15,94	-10,7	15,94	-23,9	15,94	-80,1
1		43,36	22,54	-12,9	15,94	-13,9	0	-4,14	-15,9	1,72	-22,5	-5,76	-15,9	-31,2	0	-105	143,4
2		15,94	-33,7	-15,9	0	-15,9	4,48	15,94	0	15,94	15,06	-15,9	0	-15,9	-113	143,4	0
3		-12,9	-15,9	13,91	22,54	-4,14	-15,9	-1,72	0	-5,76	15,94	31,16	-22,5	-105	143,4	-43,4	0
4		15,94	-10,7	-15,9	3,17	15,94	3,17	-15,9	-10,7	15,94	23,85	-15,9	-80,1	143,4	-80,1	-15,9	23,85
5		-5,76	0	-1,72	-15,9	-4,14	22,54	13,91	-15,9	-12,9	0	-43,4	143,4	-105	-22,5	31,16	15,94
6		15,94	0	15,94	4,48	-15,9	0	-15,9	-33,7	15,94	0	143,4	-113	-15,9	0	-15,9	15,06
7		1,72	-15,9	-4,14	0	-13,9	15,94	-12,9	22,54	43,36	143,4	-105	0	-31,2	-15,9	-5,76	-22,5
8		15,94	3,17	15,94	10,65	15,94	23,85	15,94	80,12	143,4	-80,1	15,94	-23,9	15,94	-10,7	15,94	-3,17
9		-1,72	-22,5	5,76	-15,9	31,16	0	104,7	143,4	-43,4	22,54	12,91	15,94	13,91	0	4,14	-15,9
10		15,94	-15,1	-15,9	0	-15,9	113,3	143,4	0	15,94	33,73	-15,9	0	-15,9	-4,48	15,94	0
11		5,76	15,94	-31,2	-22,5	104,7	143,4	43,36	0	12,91	-15,9	-13,9	22,54	4,14	-15,9	1,72	0
12		15,94	-23,9	-15,9	80,12	143,4	80,12	-15,9	-23,9	15,94	10,65	-15,9	-3,17	15,94	-3,17	-15,9	10,65
13		12,91	0	43,36	143,4	104,7	-22,5	-31,2	15,94	5,76	0	1,72	-15,9	4,14	22,54	-13,9	-15,9
14		15,94	0	143,4	113,3	-15,9	0	-15,9	-15,1	15,94	0	15,94	-4,48	-15,9	0	-15,9	33,73
15		-43,4	143,4	104,7	0	31,16	-15,9	5,76	-22,5	-1,72	-15,9	4,14	0	13,91	15,94	12,91	22,54

Для ^{16}H (0-я рядок) всі значення точок перетвореного вектора є ненульовими.

Для $^{16}\text{H}_{\text{CM}}^2$ маємо чотири точки

$$v = \{3,7,11,15\},$$

у яких значення дорівнюють нулю.

Зазначений факт не є одиничним і підтверджений для довільного N у випадку, коли $(N/2+1)$ перших точок вихідного вектора рівні між собою, а інші - нульові.

Висновки

Використання зміщеного ДПХ дозволяє змістити енергію перетвореного вектора з першої точки в будь-яку необхідну, що дає можливість його широкого застосування при обробці й передачі дискретних сигналів.

Список літератури

1. Брейсуэлл Р. Преобразование Хартли. – М.: Мир, 1990. – 273 с.
2. Королев А.В., Малахов С.В., Рубан И.В. Метод сжатия видеоданных посредством преобразований // Электрон. моделирование. – 1999. – № 4. – С. 47-55.
3. Прэтт У. Цифровая обработка изображений. – М.: Мир, 1982. – 480 с.
4. Янин В.В. Анализ и обработка изображений. – М.: Машиностроение, 1995. – 240 с.
5. Рубан И.В., Дуденко С.В., Калмыков М.Н. Исследование смещенного одномерного дискретного преобразования Хартли // Системы обработки информации. – Х.: ХВУ, 2004. – Вып. 11 (39). – С. 158-162.

Надійшла до редколегії 11.11.2006

Рецензент: д-р техн. наук, проф. С.В. Смеляков, Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків.