УДК 621.396.253

А.А. Смирнов

Кировоградский национальный технический университет, Кировоград

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ СИНТЕЗА ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ С ОСОБЫМИ КОРРЕЛЯЦИОННЫМИ СВОЙСТВАМИ

Исследуются методы синтеза дискретных сигналов с особыми корреляционными свойствами. Определено, что наиболее перспективными являются методы синтеза на основе сечения циклических орбит группового кода, которые позволяют сформировать множество последовательностей с заранее заданными дистанционными свойствами и алгебраически строить большие ансамбли дискретных сигналов с многоуровневой функцией авто- и взаимной корреляции.

Ключевые слова: *цифровая связь, кодовое разделения каналов, дискретные сигналы с особыми корреляционными свойствами.*

Постановка проблемы в общем виде и анализ литературы

Проведенный анализ показал, что обеспечение требуемых показателей качества цифровой связи, повышение абонентской емкости множественного доступа, обеспечение помехозащищенности, имитостойкости и скрытности радиоканалов управления может быть достигнуто за счет использования дискретных сигналов с улучшенными ансамблевыми, корреляционными и структурными свойствами [1 – 12]. Перспективным направлением дальнейших исследований в этом смысле является разработка методов синтеза дискретных сигналов с особыми корреляционными свойствами [8, 9]. Величины боковых выбросов функции корреляции для таких сигналов определяются строгими аналитическими соотношениями и непосредственно связаны со структурными и групповыми свойствами ансамблей дискретных последовательностей.

Целью данной статьи является анализ и сравнительные исследования методов синтеза дискретных сигналов с особыми корреляционными свойствами, обоснование путей их дальнейшего развития.

Методы синтеза дискретных сигналов с особыми корреляционными свойствами

К дискретным сигналам с особыми корреляционными свойствами относятся [4, 8, 10 – 12]:

– ортогональные дискретные сигналы, в том числе сигналы Уолша-Адамара, симплексные последовательности, для которых коэффициент корреляции равен нулю. Боковые выбросы функций авто- и взаимной корреляции аналитически не определены;

– m-последовательности, субортогональные сигналы, для которых боковые выбросы периодической функции автокорреляции принимают одно значение $-1/n$, где n – длина последовательности. Боковые выбросы функций взаимной корреляции аналитически не определены;

– биортогональные дискретные сигналы, для которых коэффициент взаимной корреляции равен нулю или –n. Этот ансамбль дискретных сигналов можно рассматривать как расширение ансамбля ортогональных сигналов за счет добавления множества противоположных последовательностей. Боковые выбросы функций авто- и взаимной корреляции биортогональных дискретных сигналов аналитически не определены;

– последовательности Лежандра, Пели-Плоткина, сигналы Баркера, синтезируемые на основе m-последовательностей и для которых получены аналитические соотношения для величин боковых выбросов некоторых функций корреляции;

– последовательности Голда, малое и большое множество сигналов Касами. Эти классы сигналов обладают улучшенными (по сравнению с m-последовательностями) ансамблевыми свойствами, для них получены аналитические соотношения для величин боковых выбросов некоторых функций корреляции.

Последовательности Лежандра, сигналы Баркера и последовательности Пэли-Плоткина

Зафиксируем конечное поле $GF(p)$ и примитивный полином $f(x)$ степени m с коэффициентами из $GF(p)$. Линейный регистр сдвига с обратными связями, заданными соответствующими коэффициентами $f(x)$, формирует МЛРП (m-последовательность) $s=(s_0,s_1,\ldots,s_{n-1})$, $\forall i : s_i \in GF(p)$ с периодом $n=p^m-1$ [4, 8].

Каждому p-ичному символу $s_i, i=0,..n-1$ МЛРП $s=(s_0,s_1,\ldots,s_{n-1})$ поставим в соответствие символ:

$$\lambda_i = F(s_i) = \begin{cases} 1, \\ 0, \\ -1. \end{cases}$$

Как следует из [4, 8] последовательность $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_{n-1})$ является периодической, с периодом меньшим или равным n.

Если правило $F(s_i)$ построить таким образом, что нулевой символ последовательности $s = (s_0, s_1, \ldots s_{n-1})$ заменить нулем, любые $(p-1)/2$ символов заменить +1, оставшиеся $(p-1)/2$ символов заменить на –1, тогда корреляционный вектор будет равен нулю.

Действительно, если $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}$ – элементы $GF(p)$, тогда среди пар s_j, s_{j+i} пары вида $\alpha_i \alpha_j (i \neq 0, j \neq 0)$ встречаются p^{m-2} раза. Поэтому [4, 8]:

$$p^{m-2} \sum_{i,j=1}^{p-1} F(\alpha_i) F(\alpha_j) = 0 .$$

Значения корреляционного вектора при $i = 0 (\mathrm{mod}\ M = \frac{p^n - 1}{p - 1})$ зависят от того, какие именно $(p-1)/2$ символов заменить на +1 [8].

Предположим теперь, что:

$$\lambda_j = F(s_i) = \left(\frac{s_i}{p}\right),$$

где $\left(\frac{s_i}{p}\right)$ – символ Лежандра числа s_j, вычисленный по правилу:

$$\left(\frac{s_i}{p}\right) = \begin{cases} +1, (s_i)^{(p-1)/2} = 1 \mathrm{mod}(p), \\ -1, (s_i)^{(p-1)/2} \neq 1 \mathrm{mod}(p). \end{cases}$$

Если k – первообразный корень единицы модуля p имеем $s_{j+M} = k s_j$. Таким образом, последовательность $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_{n-1})$ распадается на $(p-1)/2$ периодов, причем каждый период состоит из двух полупериодов, соответствующие символы которых отличаются только знаком [4, 8].

Следовательно, максимальный уровень боковых лепестков нормированной периодической функции корреляции последовательностей Лежандра определяется соотношением [4, 8]:

$$\rho = \frac{p^{m-1}}{n}, \ n \leq (p^m - 1), \ p, m \in Z^+ .$$

Рассмотрим корреляционные свойства последовательностей символов Лежандра с $m = 2$. Пусть $s = (s_0, s_1, \ldots s_{n-1})$ – МЛРП с периодом $n = p^2 - 1$ и $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_{n-1})$ – соответствующая ей последовательность символов Лежандра с полупериодом $\frac{p^2 - 1}{p - 1} = p + 1$. В качестве сигнала целесообразно использовать любой полупериод последовательности $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_{n-1})$.

Число различных МЛРП равно $\varphi(p^2 - 1)/2$, где $\varphi(x)$ – функция Эйлера числа x [4, 8]. Каждой последовательности соответствует характеристический полином $M(x) = x^2 + \mu x + \nu$, причем ν – первообразный корень единицы модуля p. Некоторые максимальные μ, однако, приводят к одинаковым последовательностям символов Лежандра. Число различных сигналов данного класса определяется соотношением [4, 8]:

$$\Omega = \frac{p+1}{8} \frac{\varphi(p^2 - 1)}{\varphi(p - 1)} .$$

При p = 3, 5, 7, 11, 13 последовательности Лежандра соответствуют сигналам Баркера, для которых $\rho = \frac{1}{p}$ [4, 8].

Рассмотрим теперь МЛРП с $n = p$, имеющие правило кодирования

$$s_j = \mu + s_{j-1} \qquad (\mu \neq 0) \qquad (1)$$

При $\mu = 1$ правило (1) формирует натуральный ряд чисел, взятых по модулю p. Пэли и Плоткиным [4, 8] показано, что если:

$$\lambda_j = \left(\frac{s_j}{p}\right),$$

нулевой символ заменяется на +1 или –1, то:

$$\sum_{j=0}^{p-1} \lambda_j \lambda_{j+i} = \begin{cases} -1, & i \neq 0, \quad \mathrm{mod}\, p, \\ p, & i = 0, \quad \mathrm{mod}\, p. \end{cases}$$

Последовательности Пэли-Плоткина обладают тем свойством, что среди пар $(\upsilon_j, \upsilon_{j+i})$ $j = 0, \ldots, p-1$ пары вида (1,1), (1, –1), (–1, 1) встречаются k раз, пары вида (–1, –1) встречаются k – 1 раз. Таким образом, максимальный уровень боковых лепестков периодической функции корреляции последовательностей Пэли-Плоткина определяется соотношением $\rho = \frac{1}{p}$, $p \in Z^+$. При данном p имеется $\Omega = p$ сигналов Пэли-Плоткина, образующих ансамбль сигналов с особыми корреляционными свойствами.

Ортогональные, биортогональные, субортогональные, производные ортогональные и составные сигналы. Рассмотрим групповые коды, состоящие из N N-позиционных векторов $S^{(l)} = (\bar{s}_0^{(l)}, \ldots, \bar{s}_{n-1}^{(l)})$. Два вектора $S^{(k)}$ и $S^{(l)}$ являются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю [1 – 9]:

$$s^{(k)} S^{(l)*} S^{(l)} = \sum_{i=0}^{n-1} \bar{s}_i^{(k)} \bar{s}_i^{(l)*} = \sum_{i=0}^{n-1} \bar{s}_i^{(k)*} \bar{s}_i^{(l)} = 0.$$

Матрица, состоящая из комплексных элементов порядка N × N, называется обобщенной матрицей Адамара, если любые ее две строки ортогональны.

Пусть $A=\left[\bar{a}_{ij}\right]=\begin{bmatrix}A_0\\ \vdots \\ A_{n-1}\end{bmatrix}=\left[B_0,\dots,B_{n-1}\right]$ – обобщенная матрица Адамара. Если групповой сигнал построен по одному из двух правил $S^{(i)}=A_i$; $s^{(i)}=B_j$, то компоненты (коэффициенты) вектора корреляции равны нулю.

Задача построения группового сигнала, состоящего из n n-позиционных импульсов, сведена таким образом к задаче построения обобщенной матрицы Адамара. В работах [1 – 3, 5, 7, 9] показано, что если найден вектор, периодическая корреляция которого имеет боковые компоненты, равные нулю, то этот вектор вместе со своими циклическими перестановками образует обобщенную матрицу Адамара. Т.е. в качестве строк матрицы Адамара можно использовать циклические перестановки вектора $(\bar{s}_0,\dots,\bar{s}_{n-1})$, соответствующего периоду $n=2^{m}$-1 двоичной МЛРП или периоду последовательности Пэли-Плоткина (n = p = 4к – 1), причем соответствие между s_q и $\bar{s}_q$ должно быть установлено таким образом, чтобы боковые компоненты вектора циклической корреляции равнялись нулю.

Легко видеть также, что в качестве строк матрицы Адамара можно использовать «циклические» перестановки полупериода последовательности символов Лежандра, связанных с МЛРП:

$$A=\begin{bmatrix}\lambda_0, & \lambda_1, & \dots, & \lambda_{M-2}, & \lambda_{M-1},\\ \lambda_1, & \lambda_2, & \dots, & \lambda_{M-1}, & -\lambda_0,\\ \dots & \dots & & \dots & \dots\\ \lambda_{M-1}, & -\lambda_0 & ,\dots, & -\lambda_{M-3}, & -\lambda_{M-2},\end{bmatrix}, \qquad (2)$$

$$M=\frac{p^n-1}{p-1}.$$

Элементы матрицы (2) являются троичными числами, принимающими значения –1, 0, 1.

В случае, если элементы матрицы A принимают значения +1, –1 и строки матрицы ортогональны, матрица A является матрицей Адамара. Матрицы Адамара изучены во многих работах, в том числе в основополагающей работе Пэли [1 – 3, 5, 7, 9]. Обзор результатов для различных n дан в [8]. Матрица Адамара существует для всех n = 4k, k = 1, 2, ... [1 – 9].

Ансамбль биортогональных дискретных сигналов является расширением ортогональных последовательностей за счет противоположных сигналов. На практике биортогональные сигналы строятся из полудлины строк матрицы Адамара. Симплексные сигналы соответствуют последовательностям, равноудаленным друг от друга в метрике Хемминга. Ортогональные сигналы Уолша-Адамара принадлежат к классу симплексных последовательностей. Коэффициент корреляции субортогональных дискретных сигналов равен -1/n, эти последовательности также могут быть синтезированы из строк матрицы Адамара посредством вычеркивания первого столбца матрицы [1 – 9].

Очевидно, что ортогональные, биортогональные, симплексные и субортогональные сигналы образуются через строки матрицы Адамара, соответственно мощность ансамблей таких сигналов не может превышать числа M_A неизоморфных матриц Адамара. В [1 – 3, 5, 7, 9] получены некоторые оценки мощности этого множества, которые приведены в таблице 1. Приведенные оценки мощности M_A дают оценку числа ансамблей дискретных сигналов Уолша-Адамара и некоторых других последовательностей.

Для повышения мощности ансамблей дискретных сигналов в работах [1 – 3, 5, 7, 9] предложены процедуры синтеза производных систем сигналов (ПОС), которые основаны на использовании матрицы G_A :

$$G_A=\begin{pmatrix}w_{11}h_1 & w_{12}h_2 & \dots & w_{1n}h_n\\ w_{21}h_1 & w_{22}h_2 & \dots & w_{2n}h_n\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ w_{n1}h_1 & w_{n2}h_2 & \dots & w_{nn}h_n\end{pmatrix},$$

где w_{ij} – элементы матрицы Адамара, h_j элементы вектора-шаблона, задающего свойства синтезируемой системы производных сигналов.

Ансамблевые и корреляционные свойства ПОС приведены в таблице 2, из которой видно, что они обладают улучшенными показателями. В тоже время боковые выбросы функции корреляции аналитически не определены, оценки ρ, приведенные в таблице 2, получены статистическими методами, т.е. производные ортогональные сигналы не принадлежат к классу последовательностей с особыми корреляционными свойствами [1 – 3, 5, 7, 9].

Составные сигналы предложены в работах [1 – 9], в основе их синтеза лежит объединение (составление) отдельных последовательностей в длинный дискретный сигнал. Корреляционные и ансамблевые свойства составных сигналов определяются через соответствующие характеристики образующих их последовательностей. По своим свойствам составные последовательности близки к производным ортогональным сигналам и также не принадлежат к классу последовательностей с особыми корреляционными свойствами [1 – 3, 5, 7, 9].

Таблица 1

Число неизоморфных матриц Адамара

n	64	100	256	512	1024	2000	4000	10000
M_A	19	1	54	102	162	9	16	10

Таблица 2

Ансамблевые и корреляционные свойства ПОС

n	64	128	256	512	1024	2048	4096
M	$\approx 10^3$	$\approx 10^4$	$\approx 10^6$	$\approx 10^7$	$\approx 10^8$	$\approx 10^9$	$\approx 10^{10}$
ρ	$\frac{2.1}{\sqrt{n}}$	$\frac{2.5}{\sqrt{n}}$	$\frac{2.9}{\sqrt{n}}$	$\frac{3.2}{\sqrt{n}}$	$\frac{3.5}{\sqrt{n}}$	$\frac{3.8}{\sqrt{n}}$	$\frac{3.9}{\sqrt{n}}$

Последовательности Голда и сигналы Касами. Дискретные последовательности Голда и Касами формируются на основе использования МЛРП. Так, в работах [1 – 9] показано, что для формирования последовательностей Голда с трехуровневой функцией корреляции необходимо выбрать некоторую «предпочтительную» пару примитивных многочленов $f_1(x)$, $f_2(x)$ степени m с коэффициентами из поля $GF(2)$. Используя два линейных регистра сдвига, функции обратной связи которых заданы соответствующими коэффициентами $f_1(x)$ и $f_2(x)$ соответственно, формирование последовательностей Голда осуществляется посредством поэлементного сложения двух формируемых МЛРП, при этом одна из МЛРП циклически сдвигается на произвольное число элементов. Другими словами последовательности Голда синтезируются посредством суммирования по модулю 2 двух m-последовательностей одинаковой длины, сдвинутых относительно друг друга на произвольное число элементов. Результирующие коды Голда имеют ту же длину $n = 2^m - 1$, что и исходные m-последовательности, мощность формируемых ансамблей дискретных сигналов равна $2^m + 1$, где m-длина регистра сдвига [1 – 3, 5, 9].

В табл. 3 приведены предпочтительные пары m-последовательностей для синтеза кодов Голда, число М сформированных последовательностей и величины боковых выбросов (БВ) периодической функции корреляции. Предпочтительные пары m-последовательностей представлены в виде соответствующих примитивных многочленов $f_1(x)$, $f_2(x)$ степени m. Также в таблице приведен уровень боковых выбросов функции корреляции в процентом соотношении к длине последовательности. Анализ таблицы 3. показывает, что последовательности Голда обладают трехуровневой периодической функцией корреляции. Уровень боковых лепестков по отношению к длине последовательности с увеличением длина кода снижается.

Таблица 3

Ансамблевые и корреляционные свойства кодов Голда

m	n	M	Пары m-последовательностей	БВ			Уровень
5	31	33	[5,3][5,4,3,2]	7	-1	-9	-29%
6	63	65	[6,1][6,5,2,1]	15	-1	-17	-27%
7	127	129	[7,3,2,1][7,5,4,3,2,1]	15	-1	-17	-13%
8	255	257	[8,7,6,5,2,1][8,7,6,1]	31	-1	-17	+12%
9	511	513	[9,4][9,6,4,3] [9,6,4,3][[9,8,4,1]	31	-1	-33	-6%
10	1023	1025	[10,9,8,7,6,5,4,3][10,9,7,6,4,1] [10,8,7,6,5,4,3,1][10,9,7,6,4,1] [10,8,5,1][10,7,6,4,2,1]	63	-1	-65	-6%
11	2047	2049	[11,2][11,8,5,2] [11,8,5,2][11,10,3,2]	63	-1	-65	-3%

Математический аппарат теории колец многочленов используется также и для синтеза сигналов Касами длины $n = 2^{m-}1$ [1 – 3, 5, 7, 9].

Каждая последовательность из этого класса формируется посредством суммирования периодических выборок из m-последовательностей с циклически сдвигаемыми последовательностями. Выборки берутся через каждые $s = 2^{m/2} + 1$ элементов m-последовательности, чтобы сформировать периодическую последовательность. После чего сформированная последовательность суммируется по модулю 2 к первоначальной m-последовательности. Мощность ансамбля последовательностей Касами $s = 2^{m/2}$, взаимная корреляционная функция двух последовательностей Касами принимает значения [-1, -s, s – 2].

Таким образом, применение элементов теории конечных полей позволяет синтезировать дискретные сигналы с особыми корреляционными свойствами. Мощность ансамбля формируемых дискретных сигналов и величины боковых выбросов функций корреляции определяются свойствами используемых примитивных многочленов.

Выводы

Проведенный анализ методов синтеза дискретных сигналов с особыми корреляционными свойствами показал, что применение формируемых последовательностей позволяет обеспечить заданный уровень помехоустойчивости связи. Боковые выбросы функции корреляции дискретных сигналов с особыми свойствами принимают конечные заранее известные значения, что позволяет использовать их на различных этапах организации цифровой связи. В тоже время основным недостатком подобных методов является небольшая мощность ансамблей формируемых последовательностей. Так, например, число МЛРП, последовательностей Лежандра, Пэли-Плоткина и др. определяется числом неприводимых полиномов, задающих правило формирования последовательностей. Улучшенными ансамблевыми свойствами обладают последовательности Голда, малое и большое множество последовательностей Касами. Их построение основано на использовании развитого математического аппарата теории конечных полей и, в частности, теории колец многочленов, что позволяет связать корреляционные свойства формируемых последовательностей с групповыми и структурными свойствами ансамблей сигналов. Наиболее перспективными в этом смысле являются методы синтеза на основе сечения циклических орбит группового кода, которые позволяют сформировать множество последовательностей с заранее заданными дистанционными свойствами и алгебраически строить большие ансамбли дискретных сигналов с многоуровневой функцией авто- и взаимной корреляции.

Список литературы

1. *Stasev Y., Kuznetsov A., Sai V., Karpenko O. Discrete Signals with Multi-Level Correlation Function // Statistical Methods of Signal and Data Processing (SMSDP-2010): Proceedings. – Kiev: National Aviation University "NAU-Druk" Publishung House – 2010. – pp. 176 – 179.*
2. *Stasev Y., Naumenko N., Kuznetsov A. The Derivative Orthogonal Signals Systems // International Journal of Engineering Practical Education. IJEPE Volume 1, Issue 1, August 2012 PP. 15-20*
3. *Горбенко И.Д. Анализ производных ортогональных систем сигналов / И.Д. Горбенко, Ю.В. Стасев // Радиотехника. – 1989. – № 9. – С. 16 – 18.*
4. *Стасєв Ю.В. Основи теорії побудови сигналів / Ю.В. Стасєв. – Х.: ХВУ, 1999. – 87 с.*
5. *Варакин Л.Е. Теория систем сигналов / Л.Е. Варакин. – М.: Сов. радио, 1978. – 304 с.*
6. *Цифровые методы в космической связи / Под ред. С. Голомба. – М.: Связь, 1969. – 272 с.*
7. *Горбенко И.Д. Теория дискретных сигналов. Ортогональные сигналы / Горбенко И.Д., Стасев Ю.В., Замула А.А. – М.: МО СССР, 1988. – 119 с.*
8. *Гряник М.В. Технология CDMA – будущее сотовых систем в Украине / М.В. Гряник, В.И. Фролов. – Мир связи. – 1998. – № 3. – С. 40-43.*
9. *Свердлик М.Б. Оптимальные дискретные сигналы / М.Б. Свердлик. – М.: Сов. радио, 1975. – 200 с.*
10. *Амиантов И.Н. Избранные вопросы статистической теории связи / И.Н. Амиантов. – М.: Сов. радио, 1971. – 416 с.*
11. *Науменко М.І. Теорія сигнально-кодових конструкцій / М.І. Науменко, Ю.В. Стасев, О.О. Кузнецов, С.П. Євсеєв. – . Х.:ХУ ПС, 2008. – 489 с.*
12. *Кузнецов А.А. Формирование дискретных сигналов с многоуровневой функцией корреляции / А.А. Кузнецов, А.А. Смирнов, В.Н. Сай // Системи обробки інформації. – Х.: ХУ ПС, 2011. – Вип. 5(95). – С. 50-60.*

Поступила в редколлегию 17.10.2012

Рецензент: д-р техн. наук, проф. А.А. Кузнецов, Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков.

ДОСЛІДЖЕННЯ МЕТОДІВ СИНТЕЗУ ДИСКРЕТНИХ СИГНАЛІВ З ОСОБЛИВИМИ КОРЕЛЯЦІЙНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ

О.А. Смірнов

Досліджуються методи синтезу дискретних сигналів з особливими кореляційними властивостями. Визначено, що найбільш перспективними є методи синтезу на основі перетину циклічних орбіт групового коду, які дозволяють сформувати безліч послідовностей із заздалегідь заданими дистанційними властивостями й алгебраїчно будувати більші ансамблі дискретних сигналів з багаторівневою функцією авто- і взаємної кореляції.

Ключові слова: *цифровий зв'язок, кодовий поділ каналів, дискретні сигнали з особливими кореляційними властивостями.*

RESEARCH THE METHODS OF SYNTHESIS DISCRETE SIGNALS WITH SPECIAL CORRELATION PROPERTIES

A.A. Smirnov

Research the method of synthesis of digital signals with special correlation properties. Determined that the most promising method of synthesis based on the orbits of the group of cyclic sections of code that allow to generate a set of sequences with given properties and remote algebraically build large ensembles of discrete signals with multi-function auto-and cross-correlation.

Keywords: *digital communication, code division multiple, digital signals with special correlation properties.*