УДК 510.6:519.766.2

С.Ю. Леонов

Национальный технический университет «ХПИ», Харьков

К-ЗНАЧНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ИМ ГРАФЫ

В статье рассматриваются методы решения К-значных дифференциальных уравнений для пространства M^m в случае, когда это множество является К-значным множеством с набором векторов. Приводится пример решения К-значного дифференциального уравнения и соответствующий этому решению граф.

Ключевые слова: *К-значные дифференциальные уравнения, пространство M^m, набор векторов, граф решений.*

Введение

Проектируемые вычислительные устройства, как дискретные, так и непрерывные, анализируются в двух режимах работы: статических и динамических. Статические режимы работы описываются, как правило, системами алгебраических уравнений, динамические – системами дифференциальных или разностных уравнений. Двоичные же системы, являясь частным случаем дискретных систем, чаще всего описываются только статической моделью – в виде систем булевых или временных рекуррентных булевых уравнений. Однако такое описание не соответствует уровню развития современных сложных быстродействующих, с высокой степенью интеграции устройств, поскольку не позволяет в полной мере проанализировать их динамические характеристики.

Одним из направлений в описании динамики двоичных систем является булево дифференциальное исчисление, основы которого заложены в [1], а дальнейшие возможные направления развития описаны в [2]. В рамках булевого дифференциального исчисления вводятся аналоги дифференциальных операторов классического дифференциального исчисления – булевы и временные булевы производные, позволяющие описывать изменения логических переменных. С помощью этих операторов можно анализировать динамику проектируемых вычислительных систем при использовании в их моделях значений из булевого алфавита, а также сбойные ситуации в отдельных элементах и узлах на оценку работоспособности всей системы [3, 4].

Анализ тестопригодности и синтез интеллектуальных самотестируемых схем может быть основан на аппарате логического дифференциального исчисления [5, 6]. В этом случае анализируется изменение сигналов в связях между отдельными элементами, которые, в свою очередь, могут описываться аналитическими выражениями [7]. При таком анализе математические модели на основе систем непрерывных обыкновенных дифференциальных уравнений или уравнений в частных производных позволяют детально оценить работу любых цифровых систем, построенных на современной элементной базе. Однако при анализе реальных СБИС это требует чрезмерных вычислительных затрат. В связи с этим в настоящее время учет переходных процессов в СБИС выполняется искусственными путями. Один из них – с помощью представления фронтов сигналов в многозначных алфавитах. Моделирование, основанное на этом подходе, дает возможность более детально, чем при двоичном представлении сигналов, исследовать переходные процессы в цифровых системах. Однако искусственность в представлении цифровых элементов затрудняет анализ цифровых схем и не позволяет исследовать многие динамические эффекты, которые обнаруживаются при описании схем обыкновенными непрерывными дифференциальными уравнениями. В связи с этим имеет определенные преимущества применение математического аппарата, который, с одной стороны, позволял бы, как и с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений, учитывать важные динамические явления в цифровых схемах, а с другой – не требовал бы огромных вычислительных затрат при моделировании. Такое моделирование основано на описании динамических процессов с помощью K-значного ($K > 2$) дифференциального и интегрального исчислений в K-значно-числовых пространствах, имеющих m K-значных и одну, две или большее число целочисленных координат. С помощью K-значного дифференциального исчисления исследуется динамика переходных процессов в сложных современных устройствах с описанием изменений сигналов, которые могут принимать значения из множества $M = \{0, 1, 2, \ldots, K - 1\}$.

В соответствии с таким описанием необходимо использовать K-значные дифференциальные уравнения для исследования проектируемых элементов и устройств вычислительной техники в динамических режимах.

Результаты исследований

Описание моделей в K-значно-числовых пространствах имеет свои особенности [8]. Рассмотрим эти особенности.

Пусть в пространстве M^m имеется два вектора $x = (x_1, ..., x_m)$, $z = (z_1, ..., z_m)$. Переход от вектора x к вектору z можно рассматривать как параллельное, последовательное или параллельно-последовательное изменение компонент вектора x. Рассмотрим изменение одной такой компоненты x_j. В случае, когда M является K-значным множеством, возможны следующие K^2 случаев изменения компоненты x_j с помощью некоторой вспомогательной переменной dx_j (табл. 1).

Таблица 1

Изменение компоненты x_j

x_j	0	0	...	0	1	1	...	1	...	K–1	K–1	...	K–1
dx_j	0	1	...	K–1	0	1	...	K-1	...	0	1	...	K–1
z_j	0	1	...	K–1	1	2	...	0	...	K–1	0	...	K–2

Определение 1. K-значная переменная dx_j, описывающая изменение переменной x_j называется K-значным дифференциалом этой переменной.

Определение 2. K-значный вектор $dx = (dx_1, ..., dx_j, ..., dx_m)$ называется K-значным дифференциалом вектора K-значных переменных x.

Исходный вектор x и его дифференциал определяют измененный вектор

$$z = x \oplus_K dx,$$

где $\oplus_K$ – операция сложения по модулю K.

Множество всех возможных K-значных векторов dx порождает пространство dM^m. Если в пространстве M^m выбрать произвольную точку $x_0 \in M^m$ и затем рассмотреть изменение суммы $x_0 + dx$, когда dx пробегает все точки пространства dM^m, то в пространстве M^m каждой точке пространства dM^m будет соответствовать одна и только одна точка пространства M^m.

Рассмотрим декартово произведение пространств $M^m \times dM^m$. Его элементами являются упорядоченные пары вида

$$((x_1, ..., x_m), (dx_1, ..., dx_m)) \stackrel{\Delta}{=}$$
$$\stackrel{\Delta}{=} (x_1, ..., x_m, dx_1, ...\ dx_m) = (x, dx),$$

где оператор $\stackrel{\Delta}{=}$ означает – "по определению".

Пусть функции F и G отображают пространство $M^m \times dM^m$ в M, тогда уравнение F(x, dx) = G(x, dx) называется K-значным дифференциальным уравнением. Решением этого дифференциального уравнения являются K-значные вектора $(x_1, ..., x_m, dx_1, ..., dx_m) \in M^m \times dM^m$, для которых уравнение превращается в одно из K тождеств: 0 = 0, 1 = 1, ... , K – 1 = K – 1. Частным случаем этого наиболее общего вида K-значного дифференциального уравнения является K-значное уравнение вида

$$F(x, dx) = C,$$

где C – K-значная константа, $C \in M$. Это уравнение чаще записывают в виде F(x, dx) = 0, полагая, что константа может быть внесена под знак функции.

Пусть R ($R \in M^m \times dM^m$) является множеством решений K-значного дифференциального уравнения F(x, dx) = 0. Этому множеству решений можно поставить в соответствие граф g(F), число вершин которого равно K^m. Если положить, что ребро из вершины x в вершину x^* существует тогда и только тогда, когда $x^* = x \oplus_K dx$ является решением дифференциального уравнения F(x, dx), то таким образом можно построить граф g(F), который будет взаимно однозначно соответствовать множеству R. Аналогично может быть построен и граф $\bar{g}(F)$, дополнительный к графу g(F) и взаимно однозначно соответствующий множеству $\bar{R} = (M^m \times dM^m)/R$, содержащему все ребра, которые отсутствуют в графе g(F) и отображают множество “нерешений” дифференциального K-значного уравнения F(x, dx) = 0.

Пример 1. Пусть при K = 3 дифференциальное уравнение имеет вид

$$(x_1 \&_K x_2)dx_1dx_2 = (x_1 \cup_K x_2)dx_2 \oplus_K x_1dx_1.$$

Построим таблицы значений левой и правой частей рассматриваемого уравнения (рис. 1).

По совпадению значений в таблицах для функций f_1 и f_2 определяем множество решений исходного дифференциального трехзначного уравнения. Это множество содержит 27 элементов, приведенных в табл. 2.

Граф $g(h_1, h_2)$ множества решений приведен на рис. 2. Он содержит 9 вершин и 27 ребер и петель. Граф "нерешений" $\overline{g(h_1, h_2)}$, дополнительный к графу $g(h_1, h_2)$ и имеющий те же девять вершин, должен содержать соответственно 27 ребер – столько, сколько элементов содержит соответствующее множество “нерешений” исходного дифференциального уравнения.

$f_1 = (x_1 \&_K x_2)dx_1dx_2$

dx_1	dx_2									
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	2
1	2	0	0	0	0	2	2	0	2	2
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	2	2	0	2	1
2	2	0	0	0	0	1	1	0	1	2
x_2		0	1	2	0	1	2	0	1	2
x_1		0	0	0	1	1	1	2	2	2

$f_2 = (x_1 \cup_K x_2)dx_2 \oplus_K x_1dx_1$

dx_1	dx_2									
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	2	1	1	2	2	2	1
0	2	0	2	1	2	2	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1	2	2	2
1	1	0	1	2	2	2	0	1	1	1
1	2	0	2	1	0	0	2	0	0	0
2	0	0	0	0	2	2	2	1	1	1
2	1	0	1	2	0	0	1	0	0	0
2	2	0	2	1	1	1	0	2	2	2
x_2		0	1	2	0	1	2	0	1	2
x_1		0	0	0	1	1	1	2	2	2

Рис. 1. Значения левой и правой частей дифференциального уравнения

Таблица 2

Множество решений дифференциального уравнения

	x_1	x_2	dx_1	dx_2	f_1, f_2	$x_1 \oplus_K dx_1$	$x_2 \oplus_K dx_2$
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	1
3	0	2	0	0	0	0	2
4	1	0	0	0	0	1	0
5	1	1	0	0	0	1	1
6	1	2	0	0	0	1	2
7	2	0	0	0	0	2	0
8	2	1	0	0	0	2	1
9	2	2	0	0	0	2	2
10	0	0	0	1	0	0	1
11	0	0	0	2	0	0	2
12	0	0	1	0	0	1	0
13	0	0	1	1	0	1	1
14	0	0	1	2	0	1	2
15	0	0	2	0	0	2	0
16	0	0	2	1	0	2	1
17	0	0	2	2	0	2	2
18	0	1	2	0	0	2	1
19	0	2	2	0	0	2	2
20	1	0	1	2	0	2	2
21	1	0	2	1	0	0	1
22	1	1	2	2	1	0	0
23	1	2	1	2	2	2	1
24	2	0	1	2	0	0	2
25	2	0	2	1	0	1	1
26	2	1	1	1	1	0	2
27	2	2	2	2	2	1	1

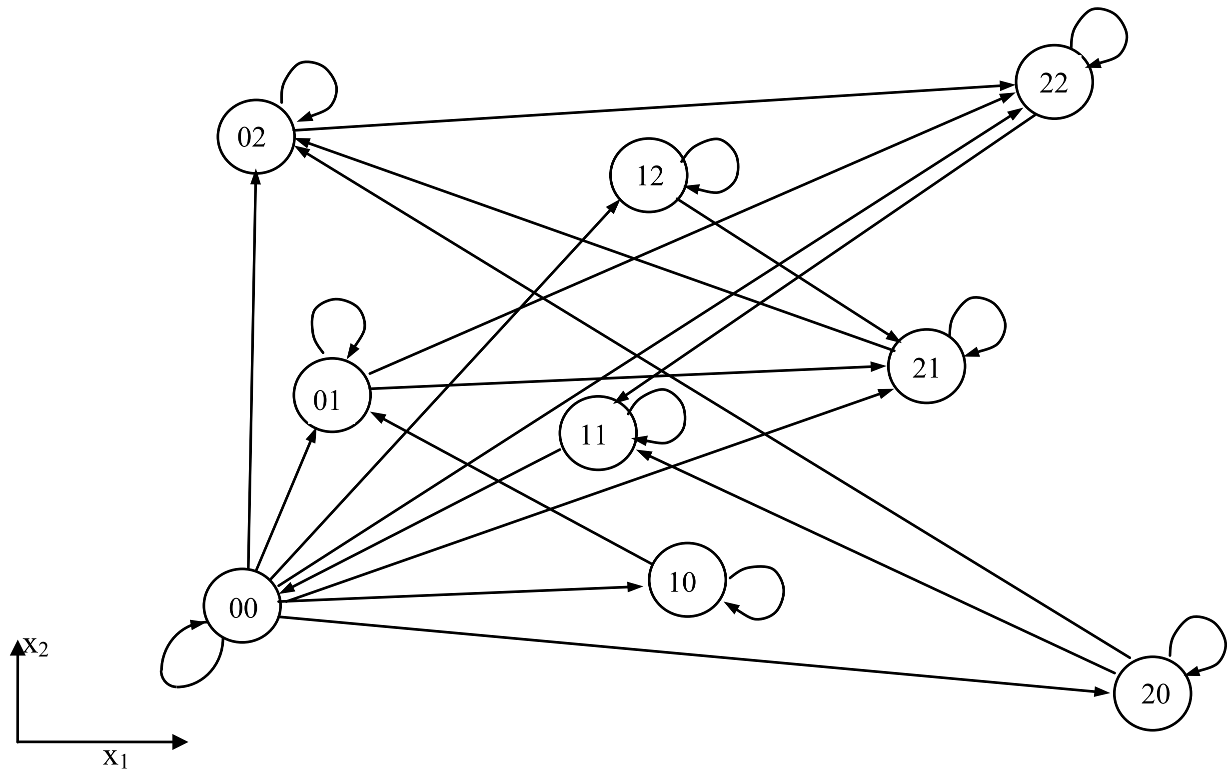

Рис. 2. Граф решений дифференциального уравнения

По аналогии со свойствами булевых дифференциальных уравнений и соответствующих им графов, сформулируем без доказательства ряд теорем, устанавливающих различные взаимосвязи K-значных дифференциальных уравнений и соответствующих им графов.

Теорема 1. Пусть K-значные дифференциальные уравнения $f_1(x, dx) = 0$ и $f_2(x, dx) = 0$ имеют соответственно множество решений M_{f1} и M_{f2}, тогда уравнения

$$f_1(x, dx) \wedge_K f_2(x, dx) = 0,$$

$$f_1(x, dx) \vee_K f_2(x, dx) = 0$$

имеют соответственно множество решений

$$M_{f1\wedge f2} = M_{f1} \vee_K M_{f2} \text{ и } M_{f1\vee f2} = M_{f1} \wedge_K M_{f2}.$$

Доказательство этой теоремы непосредственно следует из определений операций $\wedge_K$ и $\vee_K$ для K-значных функций, а также из свойств операций объединения и пересечения множеств.

Теорема 2. K-значному дифференциальному уравнению

$$f(x, dx) = dx_k \vee_K dx_p = 0, \quad dx = (dx_1, ..., dx_m), \quad p \neq k,$$

соответствует граф, который содержит лишь ребра между вершинами с равными значениями x_k и x_p.

Теорема 3. K-значному дифференциальному уравнению

$$f(x, dx) = dx_1 \vee_K ... \vee_K dx_m = 0,$$

$$x = (x_1, ..., x_m), dx = (dx_1, ..., dx_m),$$

соответствует граф с K^m вершинами, имеющий в качестве ребер только петли.

Теорема 4. K-значному дифференциальному уравнению

$$f(x, dx) = dx_1 \vee_K ... \vee_K dx_m = 1,$$

$$x = (x_1, ..., x_m), dx = (dx_1, ..., dx_m),$$

соответствует граф множества решений, имеющий ребра только между вершинами, отличающимися значениями $x_1, x_2, ..., x_m$ на единицу или нуль.

Теорема 5. K-значному дифференциальному уравнению

$$f(x, dx) = dx_1 \vee_K ... \vee_K dx_m = K - L,$$

$$x = (x_1, ..., x_m), \quad dx = (dx_1, ..., dx_m),$$

$$1 \leq L \leq K - 1,$$

соответствует граф множества решений, имеющий ребра только между вершинами, отличающимися значениями $x_1, x_2, ..., x_m$ от нуля до $(K - L)$.

При $L = 1$ граф содержит все ребра кроме петель, т.е. является иррефлексивным графом.

Теорема 6. K-значному дифференциальному уравнению

$$f(x, dx) = dx_1 dx_2 ... dx_m \neq 0, \ x = (x_1, ..., x_m),$$

$$dx = (dx_1, ..., dx_m),$$

соответствует граф множества решений? не имеющий петель.

С помощью теорем 1 – 6 описание графа можно представить в виде совокупности дифференциальных K-значных уравнений, например, любой граф можно описать двумя K-значными дифференциальными уравнениями, первое из которых описывает все петли графа (теорема 3), а второе – все его остальные ребра (теорема 6).

Выводы

Использование K-значного дифференциального исчислений позволяет найти альтернативные способы вычислений, проще формализовать решаемую задачу с позиций динамических характеристик и на этой основе найти более эффективные пути ее решения. Достаточно часто такие оптимальные методы имеют место при решении задач проектирования цифровых устройств. В частности, таким образом можно определить чувствительность схемы к отдельным или группам сигналов, если известна логическая функция, которую она реализует.

Практическое значение применения K-значного дифференциального исчисления имеет место при проектировании комбинационных схем, при обнаружении неисправностей в произвольных точках схемы. При этом возможно его использование при синтезе и проектировании так называемых полностью тестируемых схем. Использование же K-значного дифференциального исчисления позволяет выполнять декомпозицию K-значных функций, что позволяет получать структуру базовых функций.

Одной из важных задач, решаемых с помощью приведенного математического аппарата, является распознавание симметрий в данной функции. Решение этой задачи позволяет сократить число выводов на кристалле, улучшить характеристики схемы.

Полученные результаты могут быть реализованы в системе моделирования на основе K-значного дифференциального исчисления [9].

Список литературы

1. *Бохманн Д. Двоичные динамические системы / Д. Бохманн, Х. Постхоф. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 400 с.*
2. *Бохманн Д. Логическое дифференциальное исчисление: достижения, тенденции и прилдожения / Д. Бохманн, Р. Станкович, Ж. Тошич, В. Шмерко, С. Янушкевич // Автоматика и телемеханика. – 2000. – № 6. – С. 156 – 170.*
3. *Зайцева Е.Н. Анализ значимости элементов структурно-сложной системы с помощью логического дифференциального исчисления / Е.Н. Зайцева, В.Г. Леващенко // Автоматика и телемеханика. – 2013. – № 2. – С. 6 – 21.*
4. *Zaitseva E. Importance Analysis of Multi-State System by tools of Diferential Logical Calculus / Reliability, Risk and Safety. Theory and Applications. – CRC Press. – 2010. – P. 1579 – 1584.*
5. *Posthoff C. Logic Functions and Equitions. Binary Models for Computer Science / C. Posthoff, B. Steinbach. – Berlin: Sbringer, 2003.*
6. *Steinbach B. Logic Functions and Equitions. Examples and Exercises / B. Steinbach, C. Posthoff. – Berlin: Sbringer, 2009.*
7. *Чернов А.В. Развитие аппарата логического дифференциального исчисления в применении к задачам проектирования и диагностики телекоммуникационных систем / А.В. Чернов // Науч.-техн. ведомости Санкт-Петербургского гос. политехн. ун.-та. – 2008. – № 2. – С. 30 – 48.*
8. *Дмитриенко В.Д. K-значное дифференциальное исчисление и моделирование цифровых устройств // В.Д. Дмитриенко, С.Ю. Леонов. – Х.: Транспорт Украины, 1999. – 223 с.*
9. *Dmitrienko V.D. Research digital devices by means of modeling system on the basis of K-Value differential calculus / V.D. Dmitrienko, S.Yu. Leonov, T.V. Gladkikh // Radioelectronics & Informatics. – № 1. – 2008. – P. 63 – 69.*

Поступила в редколлегию 25.10.2012

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.Д. Дмитриенко, Национальный технический университет «ХПИ», Харьков.

K-ЗНАЧНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ І ВІДПОВІДНІ НИМ ГРАФИ

С.Ю. Леонов

У статті розглядаються методи рішення K-значних диференційних рівнянь для простору M^m у випадку, коли ця множина є K-значною множиною з набором векторів. Наводиться приклад рішення K-значного диференційного рівняння та відповідний цьому рішенню граф.

Ключові слова: *K-значні диференційні рівняння, простір M^m, набор векторів, граф рішень.*

K-VALUE DIFFERENTIAL EQUALIZATIONS WITH THE RESPECTIVE GRAPHS

S.Yu. Leonov

In the article the methods of solving the K-Value differential equations are considered for the range M^m in case when this array is K-Value array with the vectors set. The example of solving K-Value differential equations is given along with the respective graph.

Keywords: *K-Value differential equations, range M^m, vectors set, solving graph.*