

УДК 623. 021: 005

В.Б. Кононов

Харківський університет Повітряних Сил ім. Івана Кожедуба, Харків

**МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ЗАВДАНЬ ОПТИМІЗАЦІЇ СКЛАДУ РІЗНОРІДНИХ
БОЙОВИХ ЗАСОБІВ НА ОСНОВІ СТАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ
З УРАХУВАННЯМ ПРОТИДІЮЧИХ УГРУПОВАНЬ**

У статті викладені розроблені математичні моделі оптимізації состава однорідних бойових засобів на основі статичних моделей з урахуванням протидії супротивника.

математична модель, протидія, однорідні бойові засоби, статична модель

Вягуп

Постановка завдання. Розрахунок сил і засобів при планування й наступне ведення бойових дій в умовах сучасної конфліктної ситуації являє собою

важливе військово-наукове завдання, актуальність якого визначається необхідністю створення в Збройних Силах України автоматизованої системи керування військами й зброєю.

Аналіз літератури. У відомій літературі, присвяченій дослідженню операцій у військовій справі [1 – 4] розглядаються питання застосування дослідження операцій до рішення завдань керування військами. При цьому основна увага приділена імовірнісним оцінкам, за допомогою яких визначаються ймовірності виконання бойових завдань конфліктуючими сторонами. Однак у цих роботах не передбачаються методи кількісної оцінки состава бойових засобів угруповань протиборчих сторін. У роботі [5] запропоновані математичні співвідношення, що дозволяють визначити состав однорідних бойових засобів на основі статичних моделей з урахуванням протидії супротивника.

Метою статті є розробка математичних моделей завдань оптимізації состава різномірних бойових засобів на основі статичних моделей з урахуванням протидії супротивника

Основний матеріал

Завдання визначення кількісного состава однорідних бойових засобів викладені в [6]. Згідно прийнятої в [6] методики, ймовірність непоразки всіма бойовим засобом супротивника має вигляд:

$$Q = \prod_{k=1}^{\ell} \left(1 - \overline{q_k} \overline{v_k}\right)^{n_k}, \quad (1)$$

де $\overline{q_k}$ – імовірність не знищення своїх бойових засобів;

$\overline{v_k}$ – умовної ймовірності не знищення свого бойового засобу k -м бойовим засобом супротивника, число бойових засобів якого $k = \overline{1, \ell}$ (ℓ – кількість типів бойових засобів супротивника);

n_k – число атак k -м бойовим засобом супротивника.

При однаковому озброєнні бойових засобів при $v_1 = v_2 = \dots = v_N = v$ вражаючі властивості бойових засобів супротивника характеризуються відсутністю нагромадження збитку (показовим законом поразки) $v = \frac{1}{\omega}$, де ω – середнє число неуражених бойових засобів супротивника формула (1) записується як

$$Q = \prod_{j=1}^N \left(1 - \frac{q_j}{\omega}\right). \quad (2)$$

У результаті рішення співвідношення (2) одержимо, що

$$Q \approx e^{-\frac{\mu}{\omega}}, \quad (3)$$

де $\mu = \sum_{j=1}^N q_j = \sum_{j=1}^N (1 - u_j)$ – середня кількість неуражених бойових засобів.

В умові наявності N загальної кількості бойових засобів при $v_N = v$ й $u_N = u$ імовірність непоразки m бойових засобів супротивника задається біноміальним законом розподілу [2]:

$$P_{(m)} = C_N^m u^{N-m} (1-u)^m = C_N^m q^m u^{N-m}.$$

Імовірність збереження своїх бойових засобів при наявності нагромадження збитку дорівнює:

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{m=0}^N P_{(m)} [1 - G_{(m)}] = 1 - \sum_{m=0}^N P_{(m)} G_{(m)} = \\ &= 1 - \sum_{m=0}^N C_N^m q^m u^{N-m} G_{(m)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Середня частка збитку, яка наноситься своєму бойовому засобу N бойовими засобами супротивника, має вигляд:

$$y = 1 - \prod_{j=1}^N (1 - \overline{s_j}), \quad (5)$$

де $\overline{s_j} = 0 \cdot u_j + s_j q_j$ – математичне очікування збитку, який наноситься одному бойовому засобу супротивника, при завданні збитків j -му бойовому засобу супротивника, дорівнює нулю, з імовірністю u_j й відносною часткою збитку s_j , який наноситься своєму бойовому засобу j -м бойовому засобом супротивника, з імовірністю $q_j = 1 - u_j$.

При наявності ℓ типів бойових засобів супротивника, у якого кількість бойових засобів кожного типу дорівнює $n_1 = n_2 = \dots = n_\ell$ формула (5) прийме вигляд:

$$y = 1 - \prod_{k=1}^{\ell} (1 - s_k q_k), \quad (6)$$

де s_k – середня частка збитку, що може заподіяти своєму бойовому засобу один бойовий засіб k -го типу ($k = 1, \dots, \ell$);

$q_{(k)}$ – імовірність не поразки бойового засобу k -го типу ($k = 1, \dots, \ell$).

Попередні зауваження дозволять вирішити завдання для випадку, коли угруповання A складається з m типів різномірних бойових засобів, і нехай їй протистоїть бойові засоби однорідного угруповання B (супротивника).

Завдання визначення оптимального плану розподілу різномірних бойових засобів угруповання A по однорідних бойових засобах угруповання B будемо вирішувати за критерієм мінімуму математичного очікування сумарних вартості різномірних бойових засобів за умови поразки угрупованням A

заданого рівня математичного очікування кількості однорідних бойових засобів угруповання В.

Імовірність поразки одного бойового засобу угруповання В бойовими засобами і-го типу угруповання А, з огляду на протидію, буде дорівнює

$$P_i(x_i) = 1 - [1 - p_i (1 - q_i)]^{x_i / y_0}, \quad (7)$$

де $p_i (i = \overline{1, m})$ – ймовірність поразки одним бойовим засобом і-го типу угруповання А одного бойового засобу угруповання В; $q_i (i = \overline{1, m})$ – ймовірність поразки одним бойовим засобом угруповання В одного бойового засобу і-го типу угруповання А; y_0 – кількість однорідних бойових засобів угруповання В; $x_i (i = \overline{1, m})$ – шукана кількість бойових засобів і-го типу угруповання А, що атакують y_0 бойових засобів угруповання В за рівномірним законом.

Імовірність поразки одного бойового засобу угруповання В бойовими засобами всіх типів угруповання А, з огляду на протидію, буде дорівнює

$$P(x) = 1 - \prod_{i=1}^m [1 - p_i (x_i)] = 1 - \prod_{i=1}^m (1 - p_i + p_i q_i)^{x_i / y_0}, \quad (8)$$

а математичне очікування кількості уражених однорідних бойових засобів угруповання В визначиться за формулою:

$$M_{од}^B(x) = y_0 \left[1 - \prod_{i=1}^m (1 - p_i + p_i q_i)^{x_i / y_0} \right].$$

У такий спосіб математична модель розглянутого завдання прийме наступний вид:

$$C(x) = \sum_{i=1}^m c_i x_i \rightarrow \min; \\ 1 - \prod_{i=1}^m (1 - p_i + p_i q_i)^{x_i / y_0} \geq 0,01r; \\ x_i = [x_i] \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (9)$$

де $c_i, i = \overline{1, m}$ – вартість одного бойового засобу і-го типу;

$r\%$ – задана величина втрат угруповання супротивника;

$C(x)$ – сумарна вартість всіх типів бойових засобів угруповання А при плані їхнього розподілу $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$.

Визначимо математичне очікування сумарних втрат угруповання А при оптимальному плані їхнього розподілу $x^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*]$. Імовірність пора-

зки одного бойового засобу і-го типу угруповання А бойовими засобами угруповання В дорівнює:

$$Q_i(x_i^*) = 1 - (1 - q_i + p_i q_i)^{x_i^* / y_i}, \quad i = \overline{1, m}, \quad (10)$$

де $y = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$ – план розподілу однорідних бойових засобів угруповання В по бойових засобах угруповання А всіх типів.

Тоді математичне очікування кількості уражених бойових засобів і-го типу угруповання А визначиться за формулою:

$$M_i^A(x_i^*) = x_i^* Q_i(x_i^*) = x_i^* \left[1 - (1 - q_i + p_i q_i)^{x_i^* / y_i} \right],$$

а математичне очікування сумарних втрат бойових засобів угруповання А визначиться за формулою:

$$M_H^A(x^*) = \sum_{i=1}^m M_i^A(x_i^*) = \sum_{i=1}^m x_i^* \left[1 - (1 - q_i + p_i q_i)^{x_i^* / y_i} \right]. \quad (11)$$

Розглянемо загальний випадок бою угруповання А, яка складається з m типів різнорідних бойових засобів, і угруповання В, яка складається з n типів різнорідних бойових засобів.

Представляється природним наступна постановка завдання: визначити оптимальний план розподілу різнорідних бойових засобів угруповання А за різнорідних бойових засобах угруповання В за критерієм мінімуму математичного очікування сумарних вартості різнорідних бойових засобів за умови поразки заданого рівня математичного очікування сумарної кількості різнорідних бойові засоби угруповання В з урахуванням їх важливості.

Побудуємо математичну модель завдання. Імовірність поразки одного j -го типу бойових засобам угруповання В бойовими засобами і-го типу угруповання А, з огляду на протидію, буде дорівнює

$$P_{ij}(x_{ij}) = 1 - [1 - p_{ij} (1 - q_{ji})]^{x_{ij} / y_j}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (12)$$

де $p_{ij} (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$ – ймовірність поразки одним бойовим засобом і-го типу угруповання А одного бойового засобу j -го типу угруповання В;

$q_{ji} (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$ – ймовірність поразки одним бойовим засобом j -го типу угруповання В одного бойового засобу і-го типу угруповання А;

$y_j (j = \overline{1, n})$ – кількість бойових засобів j -го типу угруповання В;

x_{ij} ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$) – шукана кількість бойових засобів i -го типу угруповання А, що атакують y_j бойових засобів j -го типу угруповання В за рівномірним законом.

Імовірність поразки одного бойового засобу j -го типу угруповання В бойовими засобами всіх типів угруповання А, з огляду на протидію, буде дорівнювати

$$P_j(X) = 1 - \prod_{i=1}^m [1 - P_{ij}(x_{ij})] = 1 - \prod_{i=1}^m \left(1 - p_{ij} + p_{ij} q_{ji} \right)^{\frac{x_{ij}}{y_j}}, y_j = \overline{1, n}. \quad (13)$$

Математичне очікування кількості уражених бойових засобів j -го типу угруповання В визначиться за формулою:

$$M_j^B(X) = y_j P_j(X) = y_j \left[1 - \prod_{i=1}^m \left(1 - p_{ij} + p_{ij} q_{ji} \right)^{\frac{x_{ij}}{y_j}} \right], y_j = \overline{1, n}, \quad (14)$$

а математичне очікування сумарної кількості уражених різномірних бойових засобів угруповання В, з урахуванням їх важливості, визначиться за формулою:

$$M_H^B(X) = \sum_{j=1}^n w_j M_j^B(X) = \sum_{j=1}^n w_j y_j \left[1 - \prod_{i=1}^m \left(1 - p_{ij} + p_{ij} q_{ji} \right)^{\frac{x_{ij}}{y_j}} \right], \quad (15)$$

де $X = \|x_{ij}\|_{n,m}$ – шуканий план атакуючих дій угруповання А.

Математична модель даного завдання прийме наступний вигляд:

$$C = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_i x_{ij} \rightarrow \min; \sum_{j=1}^n w_j y_j \left[1 - \prod_{i=1}^m \left(1 - p_{ij} + p_{ij} q_{ji} \right)^{\frac{x_{ij}}{y_j}} \right] \geq 0, 0 \leq x_{ij} \leq \frac{n}{m} w_j y_j; \quad (16)$$

$$x_{ij} = [x_{ij}] \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n};$$

$$\sum_{j=1}^n w_j = 1, \quad w_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Визначимо математичне очікування сумарних втрат угруповання А при оптимальному плані їхнього розподілу $X = \|x_{ij}\|_{n,m}$.

Імовірність поразки одного бойового засобу i -го типу угруповання А бойовими засобами j -го типу угруповання В дорівнює

$$Q_{ij}(x_i^*) = 1 - \left(1 - q_{ji} + p_{ij} q_{ji} \right)^{\frac{y_{ji}}{x_i^*}}, \quad (17)$$

$$j = \overline{1, n}, \quad i = \overline{1, m},$$

де $x_i^* = \sum_{j=1}^n x_{ij}^*, \quad i = \overline{1, m};$

$Y = \|y_{ji}\|_{n,m}$ – план розподілу різномірних бойових засобів угруповання В по бойових засобах угруповання А всіх типів.

Імовірність поразки одного бойового засобу i -го типу угруповання А бойовими засобами всіх типів угруповання В дорівнює

$$Q_i(x_i^*) = 1 - \prod_{j=1}^n \left(1 - Q_{ij}(x_i^*)\right) = 1 - \prod_{j=1}^n \left(1 - q_{ji} + p_{ij} q_{ji} \right)^{y_{ji}/x_i^*}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (18)$$

Математичне очікування кількості уражених бойових засобів i -го типу угруповання А визначиться за формулою:

$$M_i^A(X^*) = x_i^* Q_i(X^*) = x_i^* \left[1 - \prod_{j=1}^n \left(1 - q_{ji} + p_{ij} q_{ji} \right)^{y_{ji}/x_i^*} \right], \quad (19)$$

де $i = \overline{1, m}$.

Математичне очікування сумарних втрат уражених бойових засобів угруповання А визначиться за формулою:

$$M_H^A(X^*) = \sum_{i=1}^m M_i^A(X^*) = \sum_{i=1}^m x_i^* \left[1 - \prod_{j=1}^n \left(1 - q_{ji} + p_{ij} q_{ji} \right)^{\frac{y_{ji}}{x_i^*}} \right]. \quad (20)$$

Висновки

1. У статті запропонований формалізований опис завдання визначення різнорідних бойових засобів, що протиборствують угруповань.

2. Запропоновано математичні співвідношення для визначення кількісного состава різнорідних бойових засобів на основі статичних моделей з урахуванням протидії супротивника.

3. Запропоновані математичні моделі можна використати при рішенні завдань, пов'язаних зі створенням автоматизованої системи керування військами й зброєю ВР України.

Список літератури

1. *Основи дослідження операцій у військовій техніці / Під ред. Ю.В. Чуєва – М.: Сов. радіо, 1965. – 383 с.*

2. *Осинский Л.М. Элементы исследования операций и оценка эффективности сил и средств противовоздушной обороны. – К.: КВИРТУ, 1968. – 444 с.*

3. *Чуев Ю.В. Исследования операций у вѣйсковѣй справѣ. – М.: Воениздат, 1970. – 256 с.*

4. *Довѣдник по дослідженню операцій / Під общ. ред. Ф.А. Матвейчука. – М.: Воениздат, 1979. – 368 с.*

5. *Кононов В.Б. Математические модели задач оптимизации состава однородных боевых средств противодействующих группировок // Системы обработки информации. – 2007. – Вып 1 (59). – С. 60-63.*

Надійшла до редколегії 16.02.2007

Рецензент: д-р техн. наук проф. Є.А. Артеменко, Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків.