УДК 514.753

А.В. Панкратов

*Институт проблем машиностроения НАН Украины, Харьков*

# ИНФОРМАЦИОННАЯ СИСТЕМА РЕШЕНИЯ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ НЕОРИЕНТИРОВАННЫХ 2D-ОБЪЕКТОВ

*Рассматривается информационная система 2D-Arrangtment, предназначенная для решения задач оптимального размещения произвольных неориентированных 2D phi-объектов. Приводится архитектура системы, основанная на конструктивных средствах математического моделирования задач размещения и современных методах оптимизации.*

***Ключевые слова:*** *phi-объекты, непрерывные вращения, допустимые расстояния, phi-функции, математическое моделирование, генерация пространства решений, стартовые точки, оптимизация.*

## Введение

Оптимизационные задачи размещения (Packing and Cutting), представляющие большой практический и теоретический интерес [1, 2], относятся к классу NP-трудных задач. В связи с этим в большинстве публикаций, посвященных решению задач раскроя и упаковки, используются эвристические методы. Разработка информационных систем решения задач размещения, основанных на автоматическом построении математических моделей, является актуальным направлением научных исследований в данной предметной области.

Задачи оптимального размещения сводятся к поиску наилучшего в соответствии с некоторым критерием качества размещения произвольных объектов $A_i \subset R^2$, $i = 1,2,...,N$ в заданной области размещения $\Omega$ при соблюдении набора технологических ограничений.

Вид технологических ограничений и критерия качества зависит от конкретной постановки задачи.

## Раздел основного материала

### Математическая модель основной задачи размещения

Поскольку область $\Omega$ в общем случае несвязна, представим ее как набор подобластей размещения $\Omega_j \subset R^2$, $j = 1,2,...,M$. Такое представление $\Omega$ в виде набора подобластей также позволит формализовать описание нестандартных областей с переменными метрическими характеристиками (например, выпуклой многоугольной оболочки для набора размещаемых объектов).

Объекты $A_i$, $i = 1,2,...,N$, и $\Omega_j$, $j = 1,2,...,M$, принадлежат к классу $\varphi$-объектов [2], ограниченных дугами окружностей и отрезками прямых. В рамках данного исследования рассматриваются области, которые могут быть представлены в виде объединения и\или пересечения выпуклых многоугольников, кругов и полуплоскостей.

Для описания размещения объектов в области $\Omega$ и формализации технологических ограничений введем: матрицу $\aleph = (n_{ij})_{i=1,j=1}^{N,N}$, элемент $n_{ij}$ которой равен 1, если пересечение объектов $A_i$ и $A_j$ недопустимо, и нулю в противном случае и матрица $\Xi = (b_{ij})_{i=1,j=1}^{N,M}$, элемент $b_{ij}$ которой равен 1, если объект $A_i$ должен принадлежать подобласти $\Omega_j$ и нулю в противном случае. Вектор переменных параметров объекта $A$ в общем случае имеет вид $u_A = (x_A, y_A, \theta_A, t_A)$, где $(x_A, y_A)$ – вектор трансляции, $\theta_A$ – угол поворота и $t_A$ – коэффициента гомотетии объекта.

Для формализации технологических ограничений и ограничений на значения переменных метрических характеристик объектов вводится вектор $v = (v_1, v_1, ..., v_L)$ вспомогательных переменных, а также системы дополнительных ограничений вида

$$\lambda_1(u) = 0,\ \lambda_2(u) \ge 0,$$

где $u = \{u_{\Omega_1}, u_{\Omega_2}, ..., u_{\Omega_M}, u_{A_1}, u_{A_2}, \quad ..., u_{A_N}, v) = \{u_1, u_2, ..., u_\delta)$, $\delta = 4(M+N)+L$ – вектор параметров задачи. Для описания отношений между phi-объектами в аналитическом виде используется метод phi-функций Стояна [3, 4].

Phi-функцией $\Phi^{A_1A_2}$ для двух неориентированных phi-объектов $A_1 = A_1(u_{A_1})$ и $A_2 = A_2(u_{A_2})$, с переменными метрическими характеристиками называется непрерывная всюду определенная функция, для которой выполняются следующие свойства: $\Phi^{A_1A_2} < 0$, если $\mathrm{int}\,A_1 \cap \mathrm{int}\,A_2 \ne \varnothing$, $\Phi^{A_1A_2} = 0$, если $\mathrm{int}\,A_1 \cap \mathrm{int}\,A_2 = \varnothing$, $A_1 \cap A_2 \ne \varnothing$, $\Phi^{A_1A_2} > 0$, если $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, при условии $t_A > 0, t_B > 0$.

**Замечание.** Если по технологическим ограничениям между объектами и/или между объектами и границами областей размещения заданы минимально допустимые расстояния, то phi-функции заменяются на псевдонормализованные phi-функции [5].

С применением метода phi-функций математическая модель основной задачи размещения может быть записана в виде:

$$\underset{u\in W\subset R^{\sigma}}{\operatorname{extr}} F(u), \tag{1}$$

$$\begin{gathered} W=\{u\in R^{\sigma}:\Phi^{A_i\Omega_j^*}\geq 0, \forall i,j, b_{ij}>0, \\ \Phi^{A_iA_j}\geq 0, \forall i,j, n_{ij}>0, \lambda_1(u)=0, \lambda_2(u)\geq 0, \\ t_i^A\geq 0, i=1,2,...,N, t_j^{\Omega}\geq 0, j=1,2,...,M\}, \end{gathered} \tag{2}$$

где $\Omega^*=R^2\setminus \operatorname{int}\Omega$, $\operatorname{int}\Omega$ – внутренность $\Omega$.

В [4] показано, что произвольный phi-объект A всегда может быть представлен в виде

$$A=B_1\bigcup B_2\bigcup ...\bigcup B_n, \tag{3}$$

где $B_j$ принадлежат семейству базовых объектов $\Im=\{K, D, H, V\}$. Здесь $K$ – выпуклый многоугольник, $D$ – круговой сегмент, $H$ – «шапка» и $V$ – «рожок» (рис. 1).

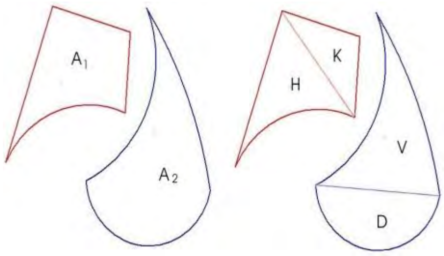


Рис. 1. Пример объектов, представленных в виде объединения базовых объектов

В [3] показано, что, с учетом (3), phi-функция для произвольных phi-объектов $A_1$ и $A_2$ может быть представлена как минимум базовых phi-функций, построенных для всех пар базовых объектов, формирующих phi-объекты $A_1$ и $A_1$, т.е.

$$\Phi^{A_1A_2}=\min\{\Phi^{B_{1i}B_{2j}}, i=1,2,...,n_1, j=1,2,...,n_2\},$$

где $\Phi^{B_{1i}B_{2j}}$ – базовые phi-функция для множеств $B_{1i}\in\Im$, $B_{2j}\in\Im$.

Полный класс базовых phi-функций для неориентированных объектов построен в [4].

Базовые phi-функции (а значит и phi-функции для произвольных объектов) в общем случае являются композицией минимумов и максимумов гладких функций $f(u)$ без радикалов. В этой связи пространство решений $W$ описывается структурой неравенств, обусловленной наличием максимумов, что выводит задачу (5) – (6) за класс задач математического программирования и, как следствие, делает невозможным непосредственное применение методов локальной оптимизации для ее решения.

Следует отметить, что если $A_i\equiv C$, $i=1,2,...,N$, то условие (2) описывает систему нелинейных неравенств и задача (1) – (2) представляет собой классическую задачу математического программирования.

Отдельного внимания заслуживает случай $A_i\in\{C,K\}$, $i=1,2,...,N$, для которого также можно сформулировать математическую модель задачи размещения, описывающую классическую задачу математического программирования.

Для построения модели поставим в соответствие каждому ненулевому элементу $n_{ij}$ матрицы непересечений $\aleph$, для которого $A_i\equiv K$ и/или $A_j\equiv K$ дополнительный объект – полуплоскость $P_{ij}$, ограниченную прямой $\alpha_{ij}^2+\beta_{ij}^2+\gamma_{ij}=0$ с переменными коэффициентами. Пусть таких пар $N_1$ и, соответственно, в вектор переменных $u$ добавляется $3N_1$ переменных, а в ограничения задачи – $N_1$ равенств вида $\alpha_{ij}^2+\beta_{ij}^2=1$.

Тогда математическая модель задачи размещения может быть записана в виде:

$$\underset{u\in W\subset R^{\sigma+N_1}}{\operatorname{extr}} F(u), \tag{4}$$

$$\begin{gathered} W=\{u\in R^{\sigma+N_1}:\Phi^{A_i\Omega_j^*}\geq 0, \forall i,j, b_{ij}>0, \\ \Phi^{A_iA_j}\geq 0, \forall i,j, n_{ij}>0, (A_i\equiv C)\wedge(A_j\equiv C), \\ F_{ij}\geq 0, \forall i,j, n_{ij}>0, (A_i\equiv K)\vee(A_j\equiv K), \\ \lambda_1(u)=0, \lambda_2(u)\geq 0, \alpha_{ij}^2+\beta_{ij}^2=1, \\ t_i^A\geq 0, i=1,2,...,N, t_j^{\Omega}\geq 0, j=1,2,...,M\}, \end{gathered} \tag{5}$$

$$F_{ij}=\min\{\Phi^{A_iP_{ij}},\Phi^{A_jP_{ij}^*}) .$$

### Генерация пространства решений задачи

Для построения пространства решений задачи (1) – (2) используются phi-функции “непересечения” для всех пар базовых объектов: {$\Phi^{VV}$, $\Phi^{HV}$, $\Phi^{HH}$, $\Phi^{DV}$, $\Phi^{DH}$, $\Phi^{DD}$, $\Phi^{KV}$, $\Phi^{KH}$, $\Phi^{KD}$, $\Phi^{KK}$} и phi-функции “включения” базовых объектов в области $\Omega$: $\{\Phi^{\Omega^*K},\Phi^{\Omega^*D},\Phi^{\Omega^*H},\Phi^{\Omega^*V}\}$.

Сопоставим каждому неравенству $\Phi^{AB}\geq 0$ для базовой phi-функции $\Phi^{AB}$ phi-дерево, концевым вершинам которого соответствуют неравенства вида $f(u)\geq 0$, а рёбрам – теоретико-множественные операции пересечения и объединения. На основе phi-деревьев, свойств теоретико-множественных операций и операций булевой алгебры строится дерево решений задачи (1) – (2). Концевым вершинам дерева решений задачи (1) – (2) соответствуют системы неравенств, описывающие всевозможные подобласти области допустимых решений задачи.

Таким образом, пространство решений $W$ можно представить в виде $W = \bigcup\limits_{i=1,2,...,\eta} W_i$, где $\eta$ – число концевых вершин дерева решений задачи, $\eta$ равно произведению количества концевых вершин всех phi-деревьев, участвующих в формировании $W$.

Таким образом, задача (1) – (2) сводится к задаче

$$F(u^*) = \min\{F(u_1^*), F(u_2^*), ..., F(u_\eta^*)\}, \qquad (6)$$

$$F(u_k^*) = \min_{u \in W_k \subset R^\sigma} F(u), \;\; k = 1, 2, ..., \eta. \qquad (7)$$

Число $\eta$ чрезвычайно быстро растет с ростом числа базовых объектов, участвующих в формировании размещаемых объектов. Поэтому предусмотрено два способа генерации пространства решений задачи (6) – (7).

*Первый способ* предполагает последовательную генерацию всех подобластей $W_i$, $i=1,\ldots,\eta$. Данный подход применим для поиска приближения к глобальному экстремуму только для задач с небольшим числом объектов.

Модификация первого подхода состоит в комбинации метода генерации подобластей $W_i$ и локальной оптимизации на подобластях $W_i$ – в этом случае можно реализовать метод ускоренного перебора.

*Второй способ* заключается в построении допустимой стартовой точки $u^0 \in W$ и генерации одного из подмножеств $W_i \subset W$, содержащих эту точку. При этом поиск локального экстремума на области $W$ сводится к циклически повторяющимся процедурам: генерации $W_i \subset W$, используя стартовую точку $u^0 \in W$ и локальной оптимизации. Процесс прерывается, когда стартовая точка является точкой локального экстремума для всех выделенных подобластей $W_i \subset W$.

**Декомпозиция задач размещения (7)**

Рассмотрим модификацию метода генерации подмножеств $W_i$ из (7) и множества $W$ для задачи (4) – (5) при наличии допустимой точки $u^0 \in W$.

Как правило, матрица условий задачи $W_i$ является разреженной и имеет довольно большую размерность, однако вид неравенств, формирующих $W$ такой, что матрицу невозможно привести к блочно-диагональному виду.

Идея предлагаемого подхода основана на учете особенностей задачи (6) – (7) и состоит в том, чтобы ограничить $\xi$-окрестностью параметры размещения каждого объекта. Простейшая (но не самая эффективная в смысле числа дополнительных ограничений) реализация предложенного метода состоит в том, что для каждого из объектов $A_i$ формируется дополнительный круговой контейнер $\Omega_i^+$ с фиксированными параметрами размещения и диаметром, на $\xi$ превышающим диаметр объекта, при этом $A_i \subset \Omega_i^+$. Это позволяет исключить ограничения на непересечение всех пар объектов, у которых «индивидуальные» контейнеры не пересекаются. В систему ограничений задачи (7) добавляется $N$ ограничений вида $\Phi^{A_i\Omega_i^+}(u) > 0$.

Процессы работы модифицированного генератора ограничений и локальной оптимизации производятся циклически до тех пор, пока среди активизированных ограничений в точке локального экстремума присутствует хотя бы одно «искусственное» ограничение на принадлежность размещаемого объекта «индивидуальному» контейнеру.

В результате осуществляется декомпозиция исходной задачи с числом ограничений порядка $O(N^2n^2)$ на последовательность задач с числом ограничений порядка $O(Nn)$, где $n$ – среднее число базовых объектов, участвующих в формировании размещаемых объектов согласно (3).

**Архитектура системы**

Информационная система *2D-Arrangment* содержит в себе следующие логические модули:

– модуль ввода данных об объектах и области;

– модуль анализа корректности и преобразования данных об объектах и области;

– модуль ввода матриц непересечения и принадлежности для случая размещения в несвязных областях;

– модуль автоматической генерации матриц непересечения и принадлежности в случае, если информация не входит в постановку задачи;

– модуль задания функции цели с возможностью выбора варианта из галереи стандартных функций либо вводом произвольной полиномиальной функций цели на AMPL-подобном языке;

– модуль задания системы дополнительных ограничений с возможностью выбора варианта из галереи стандартных систем дополнительных ограничений и/или ввода системы произвольных полиномиальных ограничений на AMPL-подобном языке;

– модуль анализа исходных данных;

– модуль выбора метода решения (1) – (2) (автоматический с предоставлением ЛПР возможности выбора);

– модуль генерации дополнительных ограничений для объектов с переменными метрическими характеристиками;

– модуль формирования составных 2D-объектов в виде объединения базовых на основании исходных данных о 2D-объектах, заданных отрезками прямых и дугами окружностей;

– модуль построения эквидистантных 2D-объектов для задач с заданными минимально допустимыми расстояниями;

– модуль, содержащий библиотеку базовых 2D-phi-функций;

– модуль генерации пространства решений задачи (1) – (2) для глобальной оптимизации;

– модуль генерации допустимых стартовых точек $u^0 \in W$;

– модуль декомпозиции области допустимых решений $W$ на подобласти $W_i$;

– модуль генерации $W_i$ с возможностью импорта описания в файл формата AMPL;

– модуль локальной оптимизации;

– модуль глобальной оптимизации;

– модуль рендеринга полученных результатов.

**Программная реализация**

Наиболее важной компонентой информационной системы является модуль генерации пространства решений, который реализован как в виде независимой исполнимой программы, так и в виде DLL.

Используется три типа данных об объекте.

**Исходные данные** могут быть представлены как произвольное множество замкнутых и незамкнутых полигонов, полилиний или круговых (“*выпуклых*” и “*вогнутых*”) дуг и отрезков в случайном порядке, заданных в файле формата DXF (AutoCad). В системе реализованы коррекция малых разрывов и неточностей контура, выделение внешнего и внутренних контуров. Кроме того, осуществляется контроль правильности данных об объекте – исключаются объекты с самопересечением границ, взаимным пересечением контуров.

**Обработанные данные** об объекте – список дуг окружностей (выпуклых и вогнутых) и линейных сегментов, упорядоченный в порядке обхода против часовой стрелки.

**Преобразованные данные –** объект представляется как объединение произвольного количества базовых объектов, объектов-примитивов и дополнительных объектов. Всего используется четыре типа базовых объектов, что достаточно для точного покрытия любого φ-объекта. Примитивы используются в качестве вспомогательных объектов при работе с базовыми объектами (могут быть использованы непосредственно). Дополнительные объекты могут быть введены для ускорения вычисления phi-функций и/или для упрощения систем неравенств, описывающих область допустимых решений.

**Преобразование данных –** процесс осуществляется в два этапа. На первом осуществляется точное покрытие каждого из заданных объектов набором базовых объектов. На втором, если заданы ненулевые минимальные и/или максимальные допустимые расстояния, строятся эквидистантные объекты на основе информации о заданном расстоянии и внешнем контуре исходных объектов (рис. 2).

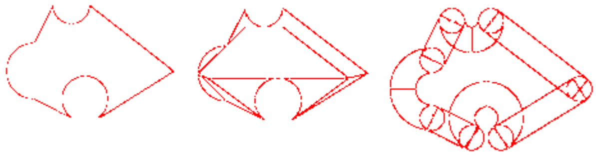

Рис. 2. Преобразование данных об объекте

**Учет дополнительных ограничений на параметры объектов** – допустимость трансляции, вращения и масштабирования (изменение коэффициента гомотетии) объектов включаются в систему дополнительных ограничений $\lambda_1(u) = 0$.

Поскольку в общем случае неравенство зависит от восьми параметров, то существует 256 варианта вида каждого из неравенств для пары объектов в зависимости от наложенных на объекты ограничений.

**Символьное представление неравенств** – неравенства $I$, описывающие пространство решений, генерируются в символьном виде и в общем случае зависят от восьми параметров

$$I = I(x_i, y_i, x_j, y_j, \theta_i, \theta_j, t_i, t_j) =$$
$$= (\sum_{k=1}^{K} M_k(x_i, y_i, x_j, y_j, \theta_i, \theta_j, t_i, t_j))^p \ge 0,$$

K>0 – положительное целое, $M_K$ и p – произвольные числа.

Вводится два вида неравенств $I$:

**простое**

$$M_k(x_i, y_i, x_j, y_j, \theta_i, \theta_j, t_i, t_j) =$$
$$= a_k \cdot x_i^{p_{1k}} \cdot y_i^{p_{2k}} \cdot x_j^{p_{3k}} \cdot y_j^{p_{4k}} \cdot \sin(\theta_i)^{p_{5k}} \cdot$$
$$\cdot \cos(\theta_i)^{p_{6k}} \cdot \sin(\theta_j)^{p_{7k}} \cdot \cos(\theta_j)^{p_{8k}} \cdot t_{i1}^{p_{9k}} \cdot t_j^{p_{10k}},$$
$$p_{lk} \in \{-2, -1, 0, 1, 2\},\ \ l = 1, ..., 10,\ \ k = 1, ..., K-1,$$

**и составное**

$$M_k(x_i, y_i, x_j, y_j, \theta_i, \theta_j, t_i, t_j) =$$
$$= a_k \prod_{l=1}^{L_k} I_{lk}(x_i, y_i, x_j, y_j, \theta_i, \theta_j, t_i, t_j)^{p_{lk}},$$
$$l = 1, ..., L_k, k = 1, ..., K-1,\ L_k = 1, ..., 30,\ p_{lk} \in \{0, 1\}.$$

Для введенных видов неравенств реализован ряд символьных операций:

• приведение подобных членов;

• определение формы I-неравенства – линейная, квадратичная или нелинейная (по классификации задачи оптимизации);

• расчет числа и получение списка ненулевых частных производных (для построения Якобиана);

• расчет числа и получение списка ненулевых смешанных частных производных и вторых частных производных (для построения Гессиана);

• представление I в виде текстовой строки (для просмотра в режиме отладки);

• сохранение в файл и чтение из файла, в том числе сохранение в файл на языке AMPL.

Реализован также ряд специализированных операций для символьного описания геометрических примитивов (точки, прямые, окружности, дуги, отрезки) с учётом их трансляции на вектор $(u, v)$, вращения на угол $\theta$ и масштабирования с коэффициентом гомотетии $t$, а также символьного описания расстояний между геометрическими примитивами.

Также реализован модуль для символьного описания произвольных полиномиальных неравенств, включая

• расчет числа и получение списка ненулевых частных производных (для построения Якобиана);

• расчет числа и получение списка ненулевых смешанных частных производных и вторых частных производных (для построения Гессиана);

• представление в виде текстовой строки (для просмотра в режиме отладки);

• сохранение в файл и чтение из файла, в том числе сохранение в файл на языке AMPL.

Таким образом, модуль генератора пространства решений задачи (1) – (2) может работать как автономно, при этом формировать файлы постановки задач на языке AMPL, так и в составе программного комплекса, включающего в себя программы локальной оптимизации. Так, в анонсируемой системе реализован интерфейс генератора пространства решений с библиотекой нелинейной оптимизации IPOPT [6] и интерфейс с r-алгоритмом Шора.

## Выводы

Информационная система 2D- Arrangment может быть использована для решения широкого класса прикладных 2D-задач размещения, возникающих в машиностроении (в частности, судостроении, ракетостроении), легкой промышленности (в частности, текстильной, кожевенной), стекольной промышленности и многих других.

**A. Pankratov acknowledges the support of the Science and Technology Center in Ukraine and the National Academy of Sciences of Ukraine, grant 5710.**

## Список литературы

1. *Wascher G. An improved typology of cutting and packing problems / G. Wascher, H. Hauner, H. Schumann // European Journal of Operational Research. – 183(3, 16): 2007. – 1109-1130.*

2. *Chernov N. Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem / N. Chernov, Y. Stoyan, T. Romanova // Computational Geometry: Theory and Applications, vol. 43:5 (2010). – P. 535-553.*

3. *Bennell J. Tools of mathematical modelling of arbitrary object packing problems / J. Bennell, G. Scheithauer, Yu. Stoyan, T. Romanova // J. Ann. Oper. Res., 179 (2010). – P. 343-368.*

4. *Chernov N. Phi-Functions for 2D Objects Formed by Line Segments and Circular Arcs / N. Chernov, Y. Stoyan, T. Romanova, A. Pankratov // Advances in Operations Research, vol. 2012, Article ID 346358, 26 pages, 2012. doi:10.1155/2012/346358.*

5. *Стоян Ю.Г. Математическое моделирование ограничений на допустимые расстояния между геометрическими объектами / Ю.Г. Стоян, А.В. Панкратов, Т.Е. Романова // Кибернетика и системный анализ. – 2012. – Т. 48, № 3. – С. 12-17.*

6. *Wächter A. On the Implementation of a Primal-Dual Interior Point Filter Line Search Algorithm for Large-Scale Nonlinear Programming / A. Wächter, L.T. Biegler // Mathematical Programming 106(1). 2006. – P. 25-57.*

9. *Шор Н.З. Использование модификации r -алгоритма для нахождения глобального минимума полиномиальных функций / Н.З. Шор, П.И. Стецюк // Кибернетика и системный анализ. – 1997. – 4. – С. 28-49.*

*Поступила в редколлегию 28.11.2012*

**Рецензент:** д-р техн. наук, доц. В.В. Шляхов, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

### ІНФОРМАЦІЙНА СИСТЕМА ВИРІШЕННЯ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ РОЗМІЩЕННЯ ДОВІЛЬНИХ НЕОРІЄНТОВАНИХ 2D-ОБ'ЄКТІВ

О.В. Панкратов

*Розглядається інформаційна система 2D-Arrangment, призначена для вирішення задач оптимального розміщення довільних неорієнтованих 2D phi-об'єктів. Наводиться архітектура системи, заснована на конструктивних засобах математичного моделювання задач розміщення і сучасних методах оптимізації.*

***Ключові слова:*** *phi-об'єкти, безперервні обертання, допустимі відстані, phi-функції, математичне моделювання, генерація простору рішень, стартові точки, оптимізація.*

### INFORMATION SYSTEM FOR SOLVING OPTIMIZATION PLACEMENT PROBLEMS FOR ARBITRARY UNDIRECTED 2D-OBJECTS

A.V. Pankratov

*The paper considers information system 2D-Arrangment, intended for solution of optimal placement of arbitrary rotated 2D phi-objects. We present a system architecture based on a design by means of mathematical modeling of accommodation and modern methods of optimization.*

***Keywords****: phi-objects, continuous rotation, Clearances, phi-function, mathematical modeling, generation of the solution space, the starting point, optimization.*