

# Обробка інформації в складних технічних системах

УДК 519.218+620.92

Е.Б. Ахиезер, Р.С. Певный, Е.Л. Пиротти

Национальный технический университет "ХПИ", Харьков

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ ЭЛЕКТРОПОТРЕБЛЕНИЯ ОТ ВРЕМЕННОГО ФАКТОРА

Рассмотрена возможность использования нестационарного стохастического процесса как математической модели посуточного потребления электрической энергии, а также сделан прогноз потребления электроэнергии отдельным регионом на протяжении одного месяца. С помощью регрессионного анализа определены доверительные интервалы для индивидуальных средних значений этого потребления. Полученные экспериментально значения подтверждают эффективность построенной математической модели.

**Ключевые слова:** энергопотребление, нестационарный стохастический процесс, спектральное разложение, корреляционная функция, прогноз, статистические методы анализа.

### Введение

В условиях энергорынка лимитирование потребления электроэнергии, по крайней мере, теоретически отсутствует. Потребитель может заказывать любые объемы электрической энергии, но при этом он должен быть готовым к тому, что пуск дополнительных мощностей увеличит предельные затраты на выработку энергии, и поэтому цена может возрасти. Рост цен на энергоносители поставили задачу решения проблемы энергосбережения в ряд важнейших вопросов. Как один из аспектов этого вопроса рассматривается задача повышения точности прогноза потребления электрической энергии.

Очевидно, что в рабочие и выходные дни недели нормальное потребление электроэнергии будет разным по форме суточного профиля. Поэтому для любого календарного дня должны быть рассмотрены прогнозы, учитывающие тот случай, что в текущем году этот день окажется рабочим, а в каком-то другом – выходным. В связи с увеличением промышленного производства и увеличением количества электрического транспорта, особый интерес приобретает прогноз профиля суточного потребления в рабочие дни недели. Для того, чтобы исключить влияние сезонной динамики долготы светлого времени дня на уровень электропотребления, в работе рассмотрен месяц февраль. В этот период года ежедневные приросты долготы светлого времени дня очень малы и равномерны, поэтому из факторов, связанных с естественной освещенностью, только облачность может вносить некоторые коррективы в объемы потребления электрической энергии.

Рассмотрено потребление электроэнергии в Харькове в течение рабочих дней в феврале 2005 го-

да. Из полученных архивных данных в этот период не было пиковых отклонений в температурном режиме. Февраль содержал 20 рабочих дней.

### Основной материал

Рассмотрим случайный процесс

$$x_{cp}(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(t), \quad (1)$$

который является усреднением данного ансамбля реализаций  $x_i(t)$  ( $0 \leq t \leq 24$ ,  $i = \overline{1, 20}$ ) случайного процесса  $\{x_i(t)\}$ .

Проверка гипотезы об отсутствии тренда у данного случайного процесса с уровнем значимости  $\alpha = 0,05$  показала, что она должна быть отвергнута.

В силу теоремы Вейерштрасса, любую непрерывную кривую на заданном конечном промежутке можно описать с любой наперед заданной точностью полиномом некоторой степени  $m$ . Проведенные исследования показали, что для моделирования тренда достаточно взять полином шестой степени. Параметры тренда определены методом наименьших квадратов [1] (рис. 1):

$$x_{тр}(t) = 0,0002t^6 - 0,0219t^5 + 0,7915t^4 - 13,661t^3 + 113,15t^2 - 354,11t + 1132,7. \quad (2)$$

Наличие тренда в значениях уровней говорит о нестационарном состоянии процесса. Это же подтверждается и аналитически при помощи корреляционной разности последовательности значений  $x(t)$ :

$$W(n, n + \tau) = K(n, n + \tau) - K(n + 1, n + \tau + 1), \quad (3)$$

$$K(n, n + \tau) = (x_n(t), x_{n+\tau}(t)) = \quad (4)$$

где

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_n(t_i) x_{n+\tau}(t_i).$$

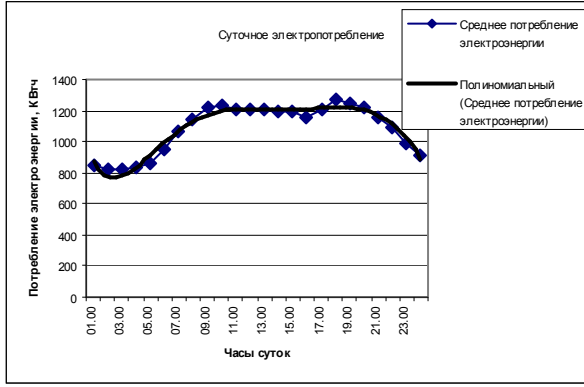


Рис. 1. Среднее потребление электроэнергии и его тренд

В нашем случае  $\tau = 5$ .

Для построения математической модели посуточного потребления электроэнергии вернёмся к тренду данного процесса. Учитывая дискретность процесса, общий вид корреляционной функции в пространстве  $l^2$  имеет вид:

$$K(n, m) = \sum_{\tau} \varphi(n + \tau) \overline{\varphi(m + \tau)} \quad (5)$$

где  $\varphi(n + \tau) = u(n + \tau) + iv(n + \tau)$ .

В качестве модели используем вещественную часть корреляционной функции (5):

$$\begin{aligned} \tilde{K}(n, m) &= \text{Re } K(n, m) = \\ &= \sum_{\tau} [u(n + \tau)u(m + \tau) + v(n + \tau)v(m + \tau)]. \quad (6) \end{aligned}$$

Случайный процесс  $\hat{x}_{\text{тр}}(t)$ , который характеризует центрированный тренд, может быть представлен как

$$\hat{x}_{\text{тр}}(t_n) = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad (7)$$

В силу формулы (5) для случайного процесса (7) получаем

$$\begin{aligned} K(n, m) &= |x_0|^2 r^{n+m} [\cos n\varphi \cos m\varphi + \sin n\varphi \sin m\varphi] = \\ &= |x_0|^2 r^{n+m} \cos(n - m)\varphi. \quad (8) \end{aligned}$$

Тогда для корреляционной разности (3) имеем следующее выражение:

$$\begin{aligned} W(n, m) &= \varphi_1(n) \overline{\varphi_2(m)} + \varphi_2(n) \overline{\varphi_1(m)} = \\ &= \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \varphi_{\alpha}(n) I_{\alpha\beta} \overline{\varphi_{\beta}(m)}, \quad (9) \end{aligned}$$

где  $I_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;  $\varphi_1(n) = r^n \sqrt{1-r^2} \cos n\varphi$ ;

$\varphi_2(n) = r^n \sqrt{1-r^2} \sin n\varphi$ .

Из выражения (5) следует, что исходный случайный процесс является диссипативным и имеет конечный ранг нестационарности, равный 2.

В [2] показано, что центрированный тренд можно представить в виде

$$\hat{x}_{\text{тр}}(t_j) = \hat{x}_{0,\text{тр}} e^{i\lambda_j t_j}, \quad (10)$$

где  $\hat{x}_{0,\text{тр}} = \hat{x}_{\text{тр}}(0)$ ;

$$\lambda_j = \begin{cases} i\beta_j^2/2, & \text{если } x_n(t)x_0(t) > 1, \\ \pi + i\beta_j^2/2, & \text{если } |x_n(t)x_0(t)| < 1; \end{cases}$$

каждое  $\lambda_j$  соответствует моменту времени  $t_j$ .

Решение показательного уравнения (10) дает значения для  $\beta_j$  ( $j = 1, 24$ ).

Таким образом, для прогнозируемого нестационарного случайного процесса  $x_{\text{пр}}(t)$  имеем разложение [2]:

$$x_{\text{пр}}(t) = \sum_{k=1}^{24} \psi_k(t) \xi_k, \quad (11)$$

где  $\xi_k$  – детерминированные функции  $\langle \xi_k, \xi_j \rangle = \delta_{kj}$ , а функции  $\psi_k(t)$  удовлетворяют системе рекуррентных уравнений эквивалентной системы [2]:

$$\frac{d\psi_k}{dt} + \lambda_k \psi_k = \sum_{\alpha=1}^r u_{k,\alpha}(t) \sqrt{\omega_{\alpha}} M a_{\alpha} \overline{\xi_k}, \quad (12)$$

$$\psi_k(t)|_{t=0} = \psi_k(0), \quad (13)$$

$$u_{k+1,\alpha}(t) = u_{k,\alpha}(t) - \sqrt{\omega_{\alpha}} M \xi_k a_{\alpha} \overline{\psi_k(t)}, \quad (14)$$

$$u_{1,\alpha}(t)|_{t=0} = 0, \quad (\alpha = 1, 24), \quad (15)$$

где  $a_{\alpha}$  – базис в модельном пространстве  $l^2$  и  $M a_{\alpha} \overline{a_{\beta}} = \delta_{\alpha\beta}$ ;  $\omega_{\alpha}$  – собственные значения оператора  $2 \text{Im } \hat{A}$ .

Как было показано в [3], базис  $\{a_{\alpha}\}_{\alpha=1}^{24}$  имеет вид:  $a_1 = \{1, 0, 0, \dots\}$ ,  $a_2 = \{0, 1, 0, \dots\}$ , ...,  $a_{24} = \{0, 0, \dots, 0, 1\}$ . Введём в качестве системы детерминированных функций  $\{\xi_k\}_{k=1}^{24}$  следующие вектор-функции:

$\xi_1 = \{\cos t, -\sin t, 0, 0, \dots, 0\}$ ,  $\xi_2 = \{\sin t, \cos t, 0, 0, \dots, 0\}$ ,  $\xi_3 = \{0, 0, \cos 2t, -\sin 2t, \dots, 0\}$ ,  $\xi_4 = \{0, 0, \sin 2t, \cos 2t, \dots, 0\}$ , ..., для которых выполняется необходимое условие. Тогда, учитывая определение скалярного произведения в пространстве  $l^2$ , получаем выражения для скалярного произведения:

$$M a_1 \overline{\xi_k} = \begin{cases} \cos t, & k = 1; \\ \sin t, & k = 2; \\ 0, & k = 3, 24, \end{cases} \quad M a_2 \overline{\xi_k} = \begin{cases} -\sin t, & k = 1; \\ \cos t, & k = 2; \\ 0, & k = 3, 24, \end{cases}$$

$$M a_3 \overline{\xi_k} = \begin{cases} \cos 2t, & k = 3; \\ \sin 2t, & k = 4; \\ 0, & k = 1, 2, 5, 24, \end{cases} \quad (16)$$

$$M\xi_{1a_k} = \begin{cases} \cos t, k = 1; \\ -\sin t, k = 2; \\ 0, k = 3, 24, \end{cases} \quad M\xi_{2a_k} = \begin{cases} \sin t, k = 1; \\ \cos t, k = 2; \\ 0, k = 3, 24, \end{cases}$$

$$M\xi_{3a_k} = \begin{cases} \cos 2t, k = 3; \\ -\sin 2t, k = 4; \\ 0, k = 1, 2, 5, 24. \end{cases} \quad (17)$$

Пусть на входе действует гармонический синусоидальный процесс

$$u_{1,\alpha}(t) = X_\alpha \cdot \sin \alpha t,$$

который удовлетворяет начальным условиям системы (12) – (15).

Постоянные  $X_\alpha$  являются амплитудой. Тогда система (12) – (15) с учётом выражений для математических ожиданий при  $k = 1$  принимает вид:

$$u_{2,n}(t) = X_n \cdot \sin nt, \quad n = 3, 24, \quad (18)$$

$$u_{2,1}(t) = X_1 \cdot \sin t + \sqrt{\omega_1} \cos t \cdot \psi_1(t), \quad (19)$$

$$u_{2,2}(t) = X_2 \cdot \sin 2t - \sqrt{\omega_2} \sin t \cdot \psi_1(t), \quad (20)$$

$$\frac{d\psi_1}{dt} + \frac{\beta_1^2}{2} \psi_1 = X_1 \sin t \sqrt{\omega_1} \cos t + X_2 \sin 2t \sqrt{\omega_2} \sin t. \quad (21)$$

Преобразуем уравнение (21):

$$\frac{d\psi_1}{dt} + \frac{\beta_1^2}{2} \psi_1 = \frac{X_1 \cdot \sqrt{\omega_1}}{2} \sin 2t + \frac{X_2 \cdot \sqrt{\omega_2}}{2} (\cos 3t - \cos t). \quad (22)$$

Решая линейное дифференциальное уравнение первого порядка методом Бернулли, получаем представление для функции  $\psi_1(t)$ :

$$\psi_1(t) = \frac{X_1 \cdot \sqrt{\omega_1}}{\beta_1^4 + 16} (\beta_1^2 \sin 2t - 4 \cos 2t) + \frac{X_2 \cdot \sqrt{\omega_2}}{\beta_1^4 + 16} (6 \sin 3t + \beta_1^2 \cos 3t) - \frac{X_2 \cdot \sqrt{\omega_2}}{\beta_1^4 + 16} (\sin t + \beta_1^2 \cos t) + C_1 e^{-\frac{\beta_1^2}{2}t}. \quad (23)$$

Используя метод вспомогательного аргумента, обозначим

$$\vartheta_1^{(1)} = \arctg \frac{1}{\beta_1^2}, \quad \vartheta_1^{(2)} = \arctg \frac{\beta_1^2}{4}, \quad \vartheta_1^{(3)} = \arctg \frac{6}{\beta_1^2}. \quad (24)$$

Тогда выражение (23) для функции  $\psi_1(t)$  имеет следующее представление:

$$\psi_1(t) = -\frac{X_1 \cdot \sqrt{\omega_1}}{\sqrt{\beta_1^4 + 16}} \cos(2t + \vartheta_1^{(2)}) + \frac{X_2 \cdot \sqrt{\omega_2}}{\beta_1^4 + 16} \sqrt{\beta_1^4 + 36} \cos(3t - \vartheta_1^{(3)}) -$$

$$-\frac{X_2 \cdot \sqrt{\omega_2}}{\beta_1^4 + 16} \sqrt{\beta_1^4 + 1} \cos(t - \vartheta_1^{(1)}) + C_1 e^{-\beta_1^2 \cdot t/2}. \quad (25)$$

Учитывая начальные условия (13), (15), получаем

$$u_{2,1}(0) = \sqrt{\omega_1} \psi_1(0); \quad u_{2,n}(0) = 0; \quad (n = 2, 24); \quad C_1 = 0, \quad (26)$$

$$\psi_1(0) = -\frac{X_1 \cdot \sqrt{\omega_1}}{\sqrt{\beta_1^4 + 16}} \cos \vartheta_1^{(2)} + \frac{X_2 \cdot \sqrt{\omega_2}}{\beta_1^4 + 16} \times \sqrt{\beta_1^4 + 36} \cos \vartheta_1^{(3)} - \frac{X_2 \cdot \sqrt{\omega_2}}{\beta_1^4 + 16} \sqrt{\beta_1^4 + 1} \cos \vartheta_1^{(1)}.$$

Для вычисления функции  $\psi_2(t)$  рассмотрим систему (12) – (15) при значении  $k = 2$ :

$$\frac{d\psi_2}{dt} + \frac{\beta_2^2}{2} \psi_2 =$$

$$= u_{2,1}(t) \cdot \sqrt{\omega_1} \sin t + u_{2,2}(t) \cdot \sqrt{\omega_2} \cos t;$$

$$u_{3,1}(t) = u_{2,1}(t) + \sqrt{\omega_1} \sin t \cdot \psi_1(t); \quad (29)$$

$$u_{3,2}(t) = u_{2,2}(t) + \sqrt{\omega_2} \cos t \cdot \psi_1(t); \quad (30)$$

$$u_{3,n}(t) = X_n \cdot \sin nt; \quad n = 3, 24. \quad (31)$$

Из выражений (19), (20) и формулы (25) для функции  $\psi_1(t)$  получаем выражения для функций  $u_{2,1}(t)$  и  $u_{2,2}(t)$ :

$$u_{2,1}(t) = X_1 \sin t - \left( \cos(3t + \vartheta_1^{(2)}) + \cos(t + \vartheta_1^{(2)}) \right) \times \frac{X_1 \omega_1}{2\sqrt{\beta_1^4 + 16}} + \frac{X_2 \sqrt{\omega_1 \omega_2}}{2(\beta_1^4 + 16)} \sqrt{\beta_1^4 + 36} \times \left( \cos(4t - \vartheta_1^{(3)}) + \cos(2t - \vartheta_1^{(3)}) \right) - \frac{X_2 \sqrt{\omega_2}}{2(\beta_1^4 + 16)} \sqrt{\beta_1^4 + 1} \left( \cos(2t - \vartheta_1^{(1)}) + \cos \vartheta_1^{(1)} \right); \quad (32)$$

$$u_{2,2}(t) = X_2 \sin 2t - \left( \sin(3t + \vartheta_1^{(2)}) - \sin(t + \vartheta_1^{(2)}) \right) \times \frac{X_1 \sqrt{\omega_1 \omega_2}}{2\sqrt{\beta_1^4 + 16}} + \frac{X_2 \omega_2}{2(\beta_1^4 + 16)} \sqrt{\beta_1^4 + 36} \times \left( \sin(4t - \vartheta_1^{(3)}) + \sin(2t - \vartheta_1^{(3)}) \right) - \frac{X_2 \omega_2}{2(\beta_1^4 + 16)} \sqrt{\beta_1^4 + 1} \left( \sin(2t - \vartheta_1^{(1)}) + \sin \vartheta_1^{(1)} \right).$$

Тогда уравнение (28) принимает вид

$$\frac{d\psi_2}{dt} + \frac{\beta_2^2}{2} \psi_2 = F(t), \quad (34)$$

где  $F(t) = -\frac{X_1 \sqrt{\omega_1}}{2} \cos 2t + X_1 \left( \frac{\sqrt{\omega_1}}{4\sqrt{\beta_1^4 + 16}} \right) \times \left( (\omega_2 - \omega_1) \sin(4t + \vartheta_1^{(2)}) + \omega_2 \sin(2t + \vartheta_1^{(2)}) \right) +$

$$\begin{aligned}
& + \frac{X_1 \omega_1 \sqrt{\omega_1}}{4\sqrt{\beta_1^4 + 16}} \sin \vartheta_1^{(2)} + \frac{X_2 (\omega_1 + \omega_2) \sqrt{\omega_2}}{4(\beta_1^4 + 16)} \times \\
& \times \sqrt{\beta_1^4 + 36} \sin(5t - \vartheta_1^{(3)}) - \sqrt{\beta_1^4 + 36} \sin(3t + \vartheta_1^{(3)}) \times \\
& \times \frac{X_2 \omega_1 \sqrt{\omega_2}}{4(\beta_1^4 + 16)} + \frac{X_2 \sqrt{\omega_2}}{4(\beta_1^4 + 16)} \cdot \sin(3t - \vartheta_1^{(3)}) \times \\
& \times \left[ (\omega_1 - \omega_2) \cdot \sqrt{\beta_1^4 + 36} - \sqrt{\omega_1} \cdot \sqrt{\beta_1^4 + 1} \right] - \\
& - \frac{X_2 (\omega_1 + \omega_2) \sqrt{\omega_2}}{4(\beta_1^4 + 16)} \cdot \sqrt{\beta_1^4 + 36} \sin(t - \vartheta_1^{(3)}) - \\
& - \frac{X_2 (\sqrt{\omega_1} + \omega_2) \sqrt{\omega_2}}{4(\beta_1^4 + 16)} \cdot \sqrt{\beta_1^4 + 1} \sin(t + \vartheta_1^{(1)}) + \\
& + \frac{X_2 \sqrt{\omega_2}}{2} (\sin 3t + \sin t) + \frac{X_1 \omega_2 \sqrt{\omega_1}}{4 \cdot \sqrt{\beta_1^4 + 16}} \cos \vartheta_1^{(2)}.
\end{aligned} \quad (35)$$

Решением уравнения (34), удовлетворяющим начальным условиям, является функция  $\psi_2(t)$ .

Аналогично, решая соответствующие линейные дифференциальные уравнения, находятся функции  $\psi_k(t)$  при значении  $k = \overline{3, 24}$ . После элементарных преобразований формула (11) может быть представлена в виде

$$x_{\text{пр}}(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{49} A_k \cos(kt - \theta_k). \quad (36)$$

В [4] предложен метод получения собственных значения  $\omega_\alpha$  ( $\alpha = \overline{1, 24}$ ). Учитывая значения  $\beta_n$ ,  $\omega_n$ , и  $X_n$  ( $n = \overline{1, 24}$ ), получаем значения коэффициентов для функции (36). Подстановка в выражение (36) значений  $t = \overline{1, 24}$  дает возможность определить усреднённое почасовое прогнозное значение потребляемой электрической энергии. Для подтверждения правильности построенной модели для нее

были найдены доверительные интервалы. Экспериментальные данные электропотребления за следующий год полностью оказались внутри полученных доверительных интервалов.

Таким образом, построенная модель случайного процесса является качественной аппроксимацией эмпирических данных.

## Выводы

На базе корреляционной теории построены математические модели нестационарных стохастических процессов с дискретным спектром для решения задач статистической обработки и прогноза.

На основе рассмотренных моделей предложена методика прогноза суточного потребления электрической энергии и проведена экспериментальная проверка построенной модели. Прогноз, который получен на основе проведенных расчетов, дав точность на 1,5 % выше, чем у моделей, используемых ранее.

## Список литературы

1. Магнус Я.Р. Эконометрика. Начальный курс: Учеб. / Я.Р. Магнус, П.К. Катыхов, А.А. Пересецкий. – М.: Дело, 2004. – 576 с.
2. Ахизер Е.Б. Спектральные разложения векторных неоднородных случайных полей / Е.Б. Ахизер // Вісник Харківського університету, серія «Математика, прикладна математика і механіка». – Х.: ХДУ, 2000. – № 475. – С. 341-346.
3. Ахизер Е.Б. Гармонические представления случайных процессов в динамических системах / Е.Б. Ахизер, Е.Л. Пиротти // Вісник Національного технічного університету «ХПИ». – Х.: НТУ «ХПИ», 2003. – № 6. – С. 157-161.
4. Ахизер Е.Б. Применение треугольных моделей в построении математической модели возмущённого движения / Е.Б. Ахизер, Е.Л. Пиротти // Тези доп. Всеукр. НТК «Проблеми та зміст фундаментальної освіти сучасного інженера». – Х.: НТУ «ХПИ», 2004. – С. 89-90.

Поступила в редколлегию 18.01.2013

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. Л.М. Любчик, Национальный технический университет "ХПИ", Харьков.

## МОДЕЛЮВАННЯ ЗАЛЕЖНОСТІ ЕЛЕКТРОСПОЖИВАННЯ ВІД ЧАСОВОГО ФАКТОРА

О.Б. Ахієзер, Р.С. Певний, Є.Л. Піротті

Розглянута можливість використання нестационарного стохастичного процесу як математичної моделі щодобового споживання електричної енергії, а також зроблено прогноз споживання електроенергії окремим регіоном на протязі одного місяця. За допомогою регресійного аналізу визначені довірчі інтервали для індивідуальних середніх значень цього споживання. Одержані експериментальні значення підтверджують ефективність побудованої математичної моделі.

**Ключові слова:** енергоспоживання, нестационарний стохастичний процес, спектральний розклад, кореляційна функція, прогноз, статистичні методи аналізу.

## SIMULATION OF DEPENDENCE OF ELECTRO-CONSUMPTION FROM TEMPORAL FACTOR

O.B. Ahiezer, R.S. Pevnyi, E.L. Pirotti

Possibility of the use of stochastic process in the capacity of mathematical model of 24-hour consumption of electric energy is examined, and the prognosis of consumption of electric power by separate region during one month is done. By a regressive analysis, confidence intervals were estimated for the individual mean values of this consumption. Obtained experimentally values confirm efficiency of the built mathematical model.

**Keywords:** energy consumption, stochastic process, spectral decomposition, cross-correlation function, prognosis, statistical methods of analysis.