УДК 519.862:517.53.

В.Ю. Дубницкий, О.Е. Петренко

Харьковский институт банковского дела Университета банковского дела НБУ (Киев)

ПРОВЕРКА ВЫПОЛНИМОСТИ УСЛОВИЙ КОШИ-РИМАНА ДЛЯ КОМПЛЕКСНОЗНАЧНЫХ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ И УПРАВЛЕНИЕ ИМИ

Для линейной, показательной, логарифмической и степенной производственных функций одного комплексного аргумента и комплексных коэффициентов доказано выполнение условий Коши-Римана. Определены эластичности этих функций по комплексному аргументу, вычислены эластичности их модулей по действительной и мнимой части аргумента.

Ключевые слова: *функция комплексной переменной, производственная функция, комплекснозначная производственная функция, линейная, показательная , логарифмическая, степенна производственные функции одного комплексного аргумента, эластичность производственной функции.*

Введение

В соответствии с определением, приведенным в работе [1], производственной функцией называют функцию вида $Y = F(K, L)$, где Y – объём выпущенной продукции, K, L – ресурсы, израсходованные для её выпуска. По умолчанию считают, что производственная функция – функция действительных переменных. Требования к производственным функциям как к математическим объектам подробно изложены в работах [2, 3]. В работах [4, 5] выполнено расширение области значений и области определения этих функций на множество комплексных чисел.

Анализ литературы. В работах [4, 5] обоснована необходимость введения в экономический анализ функций комплексной переменной, рассмотрен экономический смысл полученных при этом результатах. В этих же работах приведены конкретные виды производственных функций и способы их идентификации. Одно из основных предназначений производственных функций – анализ получаемых на их основе функций эластичности [1, 2, 3]. В работах [4, 5] вычислены эластичности действительной и мнимой части комплекснозначных производственных функций по их аргументам. Для построения функций эластичности производственной функции комплексной переменной необходимо существование производной производственной функции по её аргументу (аргументам). Для этого необходимо и достаточно выполнение условий Коши-Римана. Для введенных в работах [4, 5] видов производственных функций комплексной переменной результаты проверки выполнения этих условий не приведены. Так-

© В.Ю. Дубницкий, О.Е. Петренко

же в указанных работах не определены эластичности модулей этих функций.

Постановка задачи. Проверка выполнения условий Коши-Римана для комплекснозначных линейной, логарифмической, показательной и степенной функций, определение эластичности модулей этих функций по действительной и мнимой части их аргумента.

Изложение результатов

Рассмотрим функцию W комплексной переменной $Z = K + iL$. По условиям задачи переменные K, L отличны от нуля, это обосновано в работах [2, 3]. В соответствии с установившейся традицией переменная К – величина затрат обобщённого капитала, L – величина обобщенных затрат труда.

В общем виде представим производственную функцию в виде:

$$W = F(Z), \tag{1}$$

при

$$Z = K + iL. \tag{2}$$

Считая, что:

$$W = G + iC, \tag{3}$$

получим:

$$F(Z) = U(K, L) + iV(K, L). \tag{4}$$

В данном сообщении проанализировано выполнение условий Коши-Римана для линейной, логарифмической, показательной и степенной функции в том виде, в котором они представлены в работах [4, 5].

Условия Коши-Римана, как известно, например, из работ [6, С. 43; 7, С. 116], имеют вид:

$$\frac{\partial U}{\partial K} = \frac{\partial V}{\partial L}; \tag{5}$$

$$\frac{\partial U}{\partial L} = -\frac{\partial V}{\partial K}. \tag{6}$$

В соответствии с рекомендациями работ [4, 5] рассмотрим линейную, степенную, показательную и логарифмическую функции комплексной переменной Z.

Рассмотрим линейную функцию вида:

$$W = \alpha Z, \alpha = a + ib. \tag{7}$$

Приводя полученное выражение к виду (3), получим, что:

$$G + iC = (a + ib)(K + iL). \tag{8}$$

Примем здесь и далее, что:

$$\alpha = a + i\beta. \tag{9}$$

Выделяя в правой части условия (8) действительную часть U и мнимую часть V получим, что:

$$U = aK - bL; V = aL + bK. \tag{10}$$

Проверка выполнения условий (5) и(6) показала, что:

$$\frac{\partial U}{\partial K} = \frac{\partial V}{\partial L} = a, \tag{11}$$

и:

$$\frac{\partial U}{\partial L} = -b; \qquad \frac{\partial V}{\partial K} = b. \tag{12}$$

Таким образом, выполнение условий Коши-Римана для линейной функции вида (7) доказано.

Рассмотрим логарифмическую функцию вида:

$$W = \alpha + \beta LnZ. \tag{13}$$

Примем здесь и далее, что:

$$\beta = p + iq. \tag{14}$$

Приводя полученное выражение к виду (3) получим, что:

$$G + iC = (a + ib) + (p + iq)Ln(K + iL). \tag{15}$$

Раскрывая выражение под знаком логарифма, получим, что:

$$Ln(K + iL) = \ln|K + iL| + i\arg(K + iL).$$

Следовательно:

$$G+iC=\left(a + p\ln\sqrt{K^2 + L^2} - q\text{arctg}\frac{L}{K}\right) + i\left(b+p\text{arctg}\ \frac{L}{K} + q\ln\sqrt{K^2 + L^2}\right). \tag{16}$$

Выделяя в правой части условия (16) действительную часть U и мнимую часть V получим, что:

$$U = a + p\ln\sqrt{K^2 + L^2} - q\text{arctg}\frac{L}{K}, \tag{17}$$

$$V=b+p\text{arctg}\frac{L}{K} + q\ln\sqrt{K^2 + L^2}. \tag{18}$$

Для проверки выполнения условий Коши-Римана вычислим соответствующие частные производные, приведенные в условиях (5) и (6):

$$\frac{\partial U}{\partial K} = \frac{Kp + Lq}{K^2 + L^2}; \tag{19}$$

$$\frac{\partial U}{\partial L} = \frac{Lp - Kq}{K^2 + L^2}; \tag{20}$$

$$\frac{\partial V}{\partial L} = \frac{Kp + Lq}{K^2 + L^2}; \tag{21}$$

$$\frac{\partial V}{\partial K} = \frac{Kq - Lq}{K^2 + L^2}. \tag{22}$$

Сравнивая условия (19) и (21), (20) и (22) приходим к выводу, что условия Коши-Римана для логарифмической функции вида (13) выполнены.

Рассмотрим показательную функцию:

$$W = \alpha e^{\beta Z}. \tag{23}$$

С учётом (2), (3), (9), (14) получим, что:

$$G + iC = \alpha\exp((p + iq)(K + iL)). \tag{24}$$

Тогда:

$$G + iC = (a + ib)\exp\left((p + iq)(K + iL)\right). \tag{25}$$

Представим коэффициент α в виде:

$$a + ib = \sqrt{a^2 + b^2}\exp\left(i\text{arctg}\frac{b}{a}\right) = r\exp(i\varphi). \tag{26}$$

Следовательно:

$$G+iC=re^{i\varphi}e^{pK-qL}e^{i(qK+pL)}. \qquad (27)$$

Выделяя в правой части условия (26) действительную часть U и мнимую часть V, получим, что:

$$U=re^{(pK-qL)}\cos(Kq+Lp+\varphi); \qquad (28)$$

$$V=re^{(pK-qL)}\sin(Kq+Lp+\varphi). \qquad (29)$$

Для проверки выполнения условий Коши-Римана вычислим соответствующие частные производные, приведенные в условиях (5) и (6):

$$\frac{\partial U}{\partial K}=e^{(Kp-Lq)}[pr\cos(Kq+Lp+\varphi)-qr\sin(Kq+Lp+\varphi)]; \qquad (30)$$

$$\frac{\partial U}{\partial L}=-e^{(Kp-Lq)}[qr\cos(Kq+Lp+\varphi)-pr\sin(Kq+Lp+\varphi)]; \qquad (31)$$

$$\frac{\partial V}{\partial L}=e^{(Kp-Lq)}[pr\cos(Kq+Lp+\varphi)-qr\sin(Kq+Lp+\varphi)]; \qquad (32)$$

$$\frac{\partial V}{\partial K}=e^{(Kp-Lq)}[qr\cos(Kq+Lp+\varphi)+pr\sin(Kq+Lp+\varphi)]. \qquad (33)$$

Сравнивая условия (30) и (32), (31) и (33) приходим к выводу, что условия Коши-Римана для показательной функции вида (23) выполнены.

Рассмотрим степенную функцию вида:

$$W=\alpha Z^{\beta}. \qquad (34)$$

С учётом (2), (3), (9), (14) получим, что:

$$G+iC=(a+ib)(K+iL)^{(p+iq)}. \qquad (35)$$

В [6, 7] показано, что условие (35) можно представить в виде:

$$G+iC=(a+ib)\exp(p\ln r-q\varphi)\exp(i(p\varphi+q\ln r)). \qquad (36)$$

Для упрощения дальнейшего изложения введём следующие, общепринятые в теории функций комплексной переменной, обозначения:

$$r=\sqrt{K^2+L^2}, \qquad \varphi=\operatorname{arctg}\frac{L}{K}. \qquad (37)$$

Рассмотрим подробнее выражение вида $(K+iL)^{(p+iq)}$:

$$\begin{aligned}(K+iL)^{(p+iq)}&=\exp(p\ln r-q\varphi)\exp(i(p\varphi+q\ln r))=\\&=\exp((p\ln r-q\varphi)+i(p\varphi+q\ln r)).\end{aligned} \qquad (38)$$

Представим выражение (38) в тригонометрической форме:

$$\begin{aligned}&(K+iL)^{(p+iq)}=\\&=e^{p\ln r-q\varphi}\left[\cos(p\varphi+q\ln r)+i\sin(p\varphi+q\ln r)\right].\end{aligned} \qquad (39)$$

Рассмотрим подробнее входящий в выражения (34), (35) комплексный коэффициент α.

Выделим его модуль:

$$m=\sqrt{a^2+b^2}, \qquad (40)$$

аргумент:

$$\operatorname{arctg}\frac{b}{a}=\lambda \qquad (41)$$

и представим рассматриваемый коэффициент в тригонометрической форме:

$$\alpha=m\left[\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right)+i\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right)\right]. \qquad (42)$$

С учётом этого выделим действительную

$$\begin{aligned}U=m\exp\left(p\ln\sqrt{K^2+L^2}-q\operatorname{arctg}\frac{L}{K}\right)\times\\ *\cos\left(p\operatorname{arctg}\frac{L}{K}+q\ln\sqrt{L^2+K^2}+\lambda\right)\end{aligned} \qquad (43)$$

и мнимую части:

$$\begin{aligned}V=m\exp\left(p\ln\sqrt{K^2+L^2}-q\operatorname{arctg}\frac{L}{K}\right)\times\\ \times\sin\left(p\operatorname{arctg}\frac{L}{K}+q\ln\sqrt{L^2+K^2}+\lambda\right)\end{aligned} \qquad (44)$$

условия (34).

Введём следующие замены:

$$K^2+L^2=r^2, \qquad (45)$$

$$L/K=D, \qquad (46)$$

$$p\ln r-\varphi=A, \qquad (47)$$

$$p\varphi+r+\lambda=B, \qquad (48)$$

$$p\ln r-\varphi=C. \qquad (49)$$

Результаты вычисления частных производных, указанных в выражениях (5), (6), входящих в условия Коши-Римана, приведены в условиях (50…52):

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial L}=\frac{\partial U}{\partial K}=m\left[\frac{pL}{r^2}-\frac{1}{K(1+D^2)}\right]\exp A\cdot\cos B-\\ -m\exp A\cdot\sin B\cdot\left[\frac{p}{K\left(1+D^2\right)}+\frac{L}{r}\right],\end{aligned} \qquad (50)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial L}=m\left[\frac{pK}{r^2}-\frac{L}{K(1+D^2)}\right]\exp A\cdot\cos B-\\ -m\exp A\cdot\sin B\cdot\left[\frac{-pL}{K\left(1+D^2\right)}+\frac{K}{r}\right],\end{aligned} \qquad (51)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial K}=-m\left[\frac{pK}{r^2}-\frac{L}{K(1+D^2)}\right]\exp A\cdot\cos B+\\ +m\exp A\cdot\sin B\cdot\left[\frac{-pL}{K\left(1+D^2\right)}+\frac{K}{r}\right].\end{aligned} \qquad (52)$$

Анализируя условия (50…52), приходим к выводу, что условия Коши-Римана для степенной функции вида функции вида (34) выполнены.

Знание производственной функции позволяет вычислить такую важную в теоретическом и практическом смысле характеристику, как функцию эластичности [2, 3]. Для функции $y=f(x)$ действительной переменной x эластичность $E_x(y)$ определяют как предел отношения относительного приращения функции $\varepsilon_y = \Delta y / y$ к относительному приращению аргумента $\varepsilon_x = \Delta x / x$ при стремлении последнего к нулю:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} = \\ = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} = x\left(\ln y\right)' = \frac{d \ln y / dx}{d \ln x / x}. \quad (53)$$

Для функции $W = f(z)$ комплексной переменной Z эластичность $E_Z(W)$ определяют, согласно работе [5], по условию:

$$E = \frac{dW}{dZ} \cdot \frac{Z}{W} = \frac{d(LnW)}{dZ} Z. \quad (54)$$

Для рассмотренных в данной работе производственных функций их функции эластичности примут следующий вид.

Для линейной функции вида (7) получим:

$$E(\alpha Z) = 1. \quad (55)$$

Для степенной функции вида (34) получим:

$$E\left(\alpha Z^{\beta}\right) = \beta = p + iq. \quad (56)$$

Для показательной функции вида (23) получим:

$$E(\alpha e^{\beta Z}) = \beta Z. \quad (57)$$

Для логарифмической функции вида (13) получим:

$$E\left(\alpha + \beta LnW\right) = \frac{\beta}{\beta Ln(Z) + \alpha} = \\ = \frac{p + iq}{(p + iq)\left(\ln\sqrt{K^2 + L^2} + i\,\mathrm{arktg}\, L / K\right) + (a + ib)}. \quad (58)$$

Для упрощения дальнейшего изложения примем, что:

$$S_1 = 4\left(M\beta\right)^2 \mathrm{arctg}\left(\frac{L}{K}\right)^2, \quad (59)$$

$$S_2 = 8\left(bp - aq\right)\mathrm{arctg}\left(\frac{L}{K}\right), \quad (60)$$

$$S_3 = \left(M\beta\right)^2 \left(\ln\left(K^2 + L^2\right)\right)^2, \quad (61)$$

$$S_4 = \left(ap + bq\right)\ln\left(K^2 + L^2\right). \quad (62)$$

Выделив в (58) с учётом (59,…62) действительную и мнимую части условия (58), получим:

$$U = \left(2\left(M\beta\right)^2 \ln\left(K^2 + L^2\right) + 2\left(ap + bq\right)\right) \Big/ \sum_1^5 S_i, \quad (63)$$

$$V = 4\left[\left(M\beta\right)^2 \mathrm{arctg}\left(L / K\right) - aq + bp\right] \Big/ \sum_1^5 S_i. \quad (64)$$

Одним из способов управления производственными функциями комплексного аргумента может быть определение эластичности модуля их аргумента.

Рассмотрим подробно это на примере линейной функции (8).

Используя условия (10), получим, что:

$$\left|F(W)\right| = \sqrt{U^2 + V^2} = \sqrt{\left(aK - bL\right)^2 + \left(aL + bK\right)^2}. \quad (65)$$

Используя условие (54), получим, что эластичность функции (65) по действительной части K комплексного аргумента Z будет равна величине:

$$E_K\left(\left|F(W)\right|\right) = \frac{\partial \ln\left|F(W)\right|}{\partial K} = \frac{K^2}{K^2 + L^2}. \quad (66)$$

Эластичность функции (65) по мнимой части L комплексного аргумента Z будет равна величине:

$$E_L\left(\left|F(W)\right|\right) = \frac{\partial \ln\left|F(W)\right|}{\partial L} = \frac{L^2}{K^2 + L^2}. \quad (67)$$

Распространяя принятую в теории производственных функций действительной переменной методику расчёта предельной нормы замещения γ одного ресурса другим при сохранении неизменным значения функции [8, С. 355], получим в рассматриваемом случае, что:

$$\gamma = \frac{\partial \ln\left|F(W)\right|}{\partial K} \Big/ \frac{\partial \ln\left|F(W)\right|}{\partial L} = \frac{K^2}{L^2}. \quad (68)$$

Полученный результат даёт возможность выбирать такие компенсирующие воздействия по действительной и мнимой части комплексной переменной Z, чтобы модуль производственной функции оставался постоянным.

Для показательной функции вида (23) принимая во внимание условия (28) и (29) получим, что:

$$\left|F(W)\right| = \exp\left[\left(pK - qL\right)\sqrt{K^2 + L^2}\right]; \quad (69)$$

$$E_K\left(\left|F(W)\right|\right) = \frac{\partial \ln\left|F(W)\right|}{\partial K} K = \left(\frac{K}{K^2 + L^2} + p\right)K; \quad (70)$$

$$E_K\left(\left|F(W)\right|\right) = \frac{\partial \ln\left|F(W)\right|}{\partial L} L = \left(\frac{L}{K^2 + L^2} - q\right)L. \quad (71)$$

Тогда, аналогично условию (68), получим предельную норму замещения:

$$\gamma = \frac{-K\left(K^2 p + K + L^2 p\right)}{L\left[K^2 q + L\left(Lq - 1\right)\right]}. \quad (72)$$

Получение аналогов вышеописанных результатов для логарифмической и степенной функций более громоздко, поэтому для их выполнения использовали систему компьютерной алгебры [9].

Для логарифмической функции вида(16) частные эластичности её модуля по переменным K и L примут вид:

$$E_K\left|F(W)\right| = -N_1 K / M; \quad (73)$$

$$E_K\left|F(W)\right| = N_2 L / M. \quad (74)$$

Примем, что:

$$S_6 = p^2 + q^2; \quad (75)$$

$$T = pK + qL; \quad (76)$$

$$I = Lp - Kq. \quad (77)$$

Выполняя действия, аналогичные (66…69), получим, что:

$$N_1 = -4K\left[2qTarctgD - pT\ln(r^2) - 2aT - S_7\right]. \quad (78)$$

Знаменатель условия (73):

$$M = r^2\Big[\ 4q^2 arctgD^2 - 4arctg\left(pq\ln(r^2) + 2aq - p\right) + +p^2\left(\ln r^2\right)^2 + 2\left(2ap + q\right)\ln(r^2) + 4\left(a^2 + b\right)\ \Big]. \quad (79)$$

Числитель эластичности модуля (74) функции (16) примет вид:

$$N_2 = 4L\left(2qS_7 arctgD + pI\ln(r^2) + 2aI + T\right). \quad (80)$$

Взаимная эластичность действительной и мнимой части аргумента Z функции (16):

$$\gamma = -\frac{2qTarctgD - pT\ln r^2 - 2at - S_7}{2qS_7 arctgD + pI\ln(r^2) + 2aS_7 + T}\cdot\frac{K}{L}. \quad (81)$$

Эластичность модуля степенной функции по переменной K с учётом (66), (67), (68) и подстановок (45), (46), (76), (77) составит:

$$E_K\left|F(W)\right| = \frac{K}{r^2}\left(p\ln(r^2) - 2qarctgD)\right)T; \quad (82)$$

аналогичная характеристика для переменной L будет равна величине:

$$E_L\left|F(W) = \right| -\frac{L}{r^2}(2qarctgD - p\ln(r^2)). \quad (83)$$

Вычисленная по правилу (68) взаимная эластичность γ аргументов K и L примет вид:

$$\gamma = -\frac{KT}{LI}. \quad (84)$$

Выводы

1. Для линейной, показательной, логарифмической и степенной производственных функций одного комплексного аргумента и комплексных коэффициентов доказано выполнение условий Коши-Римана.

2. Для линейной, показательной, логарифмической и степенной производственных функций одного комплексного аргумента и комплексных коэффициентов определены их эластичности по комплексному аргументу.

3. Для линейной, показательной, логарифмической и степенной производственных функций одного комплексного аргумента и комплексных коэффициентов определены эластичности их модулей по действительным переменным, входящим в состав действительную и мнимой части переменной Z.

Список литературы

1. *Лопатников Л.И. Экономико-математический словарь: Словарь современной экономической науки / Л.И. Лопатников; 5-е изд., перераб. и доп. – М.: Дело, 2003. – 520 с.*
2. *Клейнер Г.Б. Производственные функции: теория, методы, применение / Г.Б. Клейнер. – М.: Финансы и статистика, 1986. – 239 с.*
3. *Иванилов Ю.П. Математические модели в экономике / Ю.П. Иванилов, А.В. Лотов. – М.: Наука, 1979. – 304 с.*
4. *Светуньков С.Г. Основы эконометрии комплексных переменных / С.Г. Светуньков. – СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2008. – 108 с.*
5. *Светуньков С.Г. Основы комплекснозначной экономики / С.Г. Светуньков. – СПб.: ЧП М.Н. Василькина, 2011. – 348 с.*
6. *Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1973. – 736 с.*
7. *Фукс Б.А. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения / Б.Ф. Фукс, Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1964. – 388 с.*
8. *Салманов О.Н. Математическая экономика с применением Mathcad и Excel / О.Н. Салманов. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003. – 464 с.*
9. *Дьяконов В.П. Системы компьютерной алгебры Derive: Самоучитель и руководство пользователя / В.П. Дьяконов. – М.:СОЛОН-Р, 2002. – 320 с.*

Поступила в редколлегию 21.01.2013

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.О. Тимофеев, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

ПЕРЕВІРКА ВИКОНАННЯ УМОВ КОШИ-РІМАНА ДЛЯ КОМПЛЕКСНОЗНАЧНИХ ВИРОБНИЧИХ ФУНКЦІЙ І УПРАВЛІННЯ НИМИ

В.Ю. Дубницький, О.Е. Петренко

Для лінійної, показникової, логарифмічної і степеневої виробничих функцій одного комплексного аргументу і комплексних коефіцієнтів доведено виконання умов Коши-Рімана. Визначені еластичності цих функцій по комплексному аргументу, обчислені еластичності їх модулів по дійсній і уявній частині аргументу.

Ключові слова: *функція комплексної змінної, виробнича функція, комплекснозначна виробнича функція, лінійна, показникова, логарифмічна, степенева виробнича функція одного комплексного аргументу, еластичність виробничої функції.*

VERIFICATION OF FEASIBILITY THE CAUCHY-RIEMANN DIFFERENTIAL EQUATIONS FOR COMPLEX-VALUED PRODUCTION FUNCTION AND THEIR MANAGEMENT

V.Iu. Dubnitskyi, O.Ie. Petrenko

For linear, exponential, logarithmic and power production functions of complex argument and complex coefficients it is proved the Cauchy-Riemann feasibility. There are determined the function elasticity by complex argument, it is evaluated the elasticity of their modules by the real and imaginary parts of the argument.

Keywords: *function of a complex variable, production function, complex production function, linear, exponential, logarithmic, power production function of complex argument, the elasticity of the production function.*