
УДК 519.862:517.53.

В.Ю. Дубницький, О.Е. Петренко

Харьковский институт банковского дела Университета банковского дела НБУ (Киев)

ПРОВЕРКА ВЫПОЛНИМОСТИ УСЛОВИЙ КОШИ-РИМАНА ДЛЯ КОМПЛЕКСНОЗНАЧНЫХ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ И УПРАВЛЕНИЕ ИМИ

Для линейной, показательной, логарифмической и степенной производственных функций одного комплексного аргумента и комплексных коэффициентов доказано выполнение условий Коши-Римана. Определены эластичности этих функций по комплексному аргументу, вычислены эластичности их модулей по действительной и мнимой части аргумента.

Ключевые слова: *функция комплексной переменной, производственная функция, комплекснозначная производственная функция, линейная, показательная, логарифмическая, степенная производственные функции одного комплексного аргумента, эластичность производственной функции.*

Введение

В соответствии с определением, приведенным в работе [1], производственной функцией называют функцию вида $Y = F(K, L)$, где Y – объём выпущенной продукции, K , L – ресурсы, израсходованные для её выпуска. По умолчанию считают, что производственная функция – функция действительных переменных. Требования к производственным функциям как к математическим объектам подробно изложены в работах [2, 3]. В работах [4, 5] выполнено расширение области значений и области определения этих функций на множество комплексных чисел.

Анализ литературы. В работах [4, 5] обоснована необходимость введения в экономический анализ функций комплексной переменной, рассмотрен

экономический смысл полученных при этом результатах. В этих же работах приведены конкретные виды производственных функций и способы их идентификации. Одно из основных предназначений производственных функций – анализ получаемых на их основе функций эластичности [1, 2, 3]. В работах [4, 5] вычислены эластичности действительной и мнимой части комплекснозначных производственных функций по их аргументам. Для построения функций эластичности производственной функции комплексной переменной необходимо существование производной производственной функции по её аргументу (аргументам). Для этого необходимо и достаточно выполнение условий Коши-Римана. Для введенных в работах [4, 5] видов производственных функций комплексной переменной результаты проверки выполнения этих условий не приведены. Так-

же в указанных работах не определены эластичности модулей этих функций.

Постановка задачи. Проверка выполнения условий Коши-Римана для комплекснозначных линейной, логарифмической, показательной и степенной функций, определение эластичности модулей этих функций по действительной и мнимой части их аргумента.

Изложение результатов

Рассмотрим функцию W комплексной переменной $Z = K + iL$. По условиям задачи переменные K, L отличны от нуля, это обосновано в работах [2, 3]. В соответствии с установившейся традицией переменная K – величина затрат обобщённого капитала, L – величина обобщённых затрат труда.

В общем виде представим производственную функцию в виде:

$$W = F(Z), \quad (1)$$

при

$$Z = K + iL. \quad (2)$$

Считая, что:

$$W = G + iC, \quad (3)$$

получим:

$$F(Z) = U(K, L) + iV(K, L). \quad (4)$$

В данном сообщении проанализировано выполнение условий Коши-Римана для линейной, логарифмической, показательной и степенной функции в том виде, в котором они представлены в работах [4, 5].

Условия Коши-Римана, как известно, например, из работ [6, С. 43; 7, С. 116], имеют вид:

$$\frac{\partial U}{\partial K} = \frac{\partial V}{\partial L}; \quad (5)$$

$$\frac{\partial U}{\partial L} = -\frac{\partial V}{\partial K}. \quad (6)$$

В соответствии с рекомендациями работ [4, 5] рассмотрим линейную, степенную, показательную и логарифмическую функции комплексной переменной Z .

Рассмотрим линейную функцию вида:

$$W = \alpha Z, \alpha = a + ib. \quad (7)$$

Приводя полученное выражение к виду (3), получим, что:

$$G + iC = (a + ib)(K + iL). \quad (8)$$

Примем здесь и далее, что:

$$\alpha = a + i\beta. \quad (9)$$

Выделяя в правой части условия (8) действительную часть U и мнимую часть V получим, что:

$$U = aK - \beta L; V = \beta K + aL. \quad (10)$$

Проверка выполнения условий (5) и(6) показала, что:

$$\frac{\partial U}{\partial K} = \frac{\partial V}{\partial L} = a, \quad (11)$$

и:

$$\frac{\partial U}{\partial L} = -\beta; \quad \frac{\partial V}{\partial K} = \beta. \quad (12)$$

Таким образом, выполнение условий Коши-Римана для линейной функции вида (7) доказано.

Рассмотрим логарифмическую функцию вида:

$$W = \alpha + \beta \text{Ln}Z. \quad (13)$$

Примем здесь и далее, что:

$$\beta = p + iq. \quad (14)$$

Приводя полученное выражение к виду (3) получим, что:

$$G + iC = (a + ib) + (p + iq)\text{Ln}(K + iL). \quad (15)$$

Раскрывая выражение под знаком логарифма, получим, что:

$$\text{Ln}(K + iL) = \ln|K + iL| + i \arg(K + iL).$$

Следовательно:

$$G + iC = \left(a + p \ln \sqrt{K^2 + L^2} - q \arctg \frac{L}{K} \right) + i \left(b + p \arctg \frac{L}{K} + q \ln \sqrt{K^2 + L^2} \right). \quad (16)$$

Выделяя в правой части условия (16) действительную часть U и мнимую часть V получим, что:

$$U = a + p \ln \sqrt{K^2 + L^2} - q \arctg \frac{L}{K}, \quad (17)$$

$$V = b + p \arctg \frac{L}{K} + q \ln \sqrt{K^2 + L^2}. \quad (18)$$

Для проверки выполнения условий Коши-Римана вычислим соответствующие частные производные, приведенные в условиях (5) и (6):

$$\frac{\partial U}{\partial K} = \frac{Kp + Lq}{K^2 + L^2}; \quad (19)$$

$$\frac{\partial U}{\partial L} = \frac{Lp - Kq}{K^2 + L^2}; \quad (20)$$

$$\frac{\partial V}{\partial L} = \frac{Kp + Lq}{K^2 + L^2}; \quad (21)$$

$$\frac{\partial V}{\partial K} = \frac{Kq - Lp}{K^2 + L^2}. \quad (22)$$

Сравнивая условия (19) и (21), (20) и (22) приходим к выводу, что условия Коши-Римана для логарифмической функции вида (13) выполнены.

Рассмотрим показательную функцию:

$$W = \alpha e^{\beta Z}. \quad (23)$$

С учётом (2), (3), (9), (14) получим, что:

$$G + iC = \alpha \exp((p + iq)(K + iL)). \quad (24)$$

Тогда:

$$G + iC = (a + ib) \exp((p + iq)(K + iL)). \quad (25)$$

Представим коэффициент α в виде:

$$a + ib = \sqrt{a^2 + b^2} \exp\left(i \arctg \frac{b}{a}\right) = r \exp(i\varphi). \quad (26)$$

Следовательно:

$$G + iC = re^{i\varphi} e^{pK - qL} e^{i(qK + pL)}. \quad (27)$$

Выделяя в правой части условия (26) действительную часть U и мнимую часть V , получим, что:

$$U = re^{(pK - qL)} \cos(Kq + Lp + \varphi); \quad (28)$$

$$V = re^{(pK - qL)} \sin(Kq + Lp + \varphi). \quad (29)$$

Для проверки выполнения условий Коши-Римана вычислим соответствующие частные производные, приведенные в условиях (5) и (6):

$$\frac{\partial U}{\partial K} = e^{(Kp - Lq)} [pr \cos(Kq + Lp + \varphi) - qr \sin(Kq + Lp + \varphi)]; \quad (30)$$

$$\frac{\partial U}{\partial L} = -e^{(Kp - Lq)} [qr \cos(Kq + Lp + \varphi) - pr \sin(Kq + Lp + \varphi)]; \quad (31)$$

$$\frac{\partial V}{\partial L} = e^{(Kp - Lq)} [pr \cos(Kq + Lp + \varphi) - qr \sin(Kq + Lp + \varphi)]; \quad (32)$$

$$\frac{\partial V}{\partial K} = e^{(Kp - Lq)} [qr \cos(Kq + Lp + \varphi) + pr \sin(Kq + Lp + \varphi)]. \quad (33)$$

Сравнивая условия (30) и (32), (31) и (33) приходим к выводу, что условия Коши-Римана для показательной функции вида (23) выполнены.

Рассмотрим степенную функцию вида:

$$W = \alpha Z^\beta. \quad (34)$$

С учётом (2), (3), (9), (14) получим, что:

$$G + iC = (a + ib)(K + iL)^{(p+iq)}. \quad (35)$$

В [6, 7] показано, что условие (35) можно представить в виде:

$$G + iC = (a + ib) \exp(p \ln r - q\varphi) \exp(i(p\varphi + q \ln r)). \quad (36)$$

Для упрощения дальнейшего изложения введём следующие, общепринятые в теории функций комплексной переменной, обозначения:

$$r = \sqrt{K^2 + L^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{L}{K}. \quad (37)$$

Рассмотрим подробнее выражение вида $(K + iL)^{(p+iq)}$:

$$(K + iL)^{(p+iq)} = \exp(p \ln r - q\varphi) \exp(i(p\varphi + q \ln r)) = \exp((p \ln r - q\varphi) + i(p\varphi + q \ln r)). \quad (38)$$

Представим выражение (38) в тригонометрической форме:

$$(K + iL)^{(p+iq)} = e^{p \ln r - q\varphi} [\cos(p\varphi + q \ln r) + i \sin(p\varphi + q \ln r)]. \quad (39)$$

Рассмотрим подробнее входящий в выражения (34), (35) комплексный коэффициент α .

Выделим его модуль:

$$m = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad (40)$$

аргумент:

$$\arctg \frac{b}{a} = \lambda \quad (41)$$

и представим рассматриваемый коэффициент в три-

гонометрической форме:

$$\alpha = m \left[\cos \left(\arctg \frac{b}{a} \right) + i \sin \left(\arctg \frac{b}{a} \right) \right]. \quad (42)$$

С учётом этого выделим действительную

$$U = m \exp \left(p \ln \sqrt{K^2 + L^2} - q \arctg \frac{L}{K} \right) \times \cos \left(\arctg \frac{L}{K} + q \ln \sqrt{L^2 + K^2} + \lambda \right) \quad (43)$$

и мнимую части:

$$V = m \exp \left(p \ln \sqrt{K^2 + L^2} - q \arctg \frac{L}{K} \right) \times \sin \left(\arctg \frac{L}{K} + q \ln \sqrt{L^2 + K^2} + \lambda \right) \quad (44)$$

условия (34).

Введём следующие замены:

$$K^2 + L^2 = r^2, \quad (45)$$

$$L / K = D, \quad (46)$$

$$p \ln r - \varphi = A, \quad (47)$$

$$p\varphi + r + \lambda = B, \quad (48)$$

$$p \ln r - \varphi = C. \quad (49)$$

Результаты вычисления частных производных, указанных в выражениях (5), (6), входящих в условия Коши-Римана, приведены в условиях (50...52):

$$\frac{\partial V}{\partial L} = \frac{\partial U}{\partial K} = m \left[\frac{pL}{r^2} - \frac{1}{K(1+D^2)} \right] \exp A \cdot \cos B - m \exp A \cdot \sin B \cdot \left[\frac{p}{K(1+D^2)} + \frac{L}{r} \right], \quad (50)$$

$$\frac{\partial U}{\partial L} = m \left[\frac{pK}{r^2} - \frac{L}{K(1+D^2)} \right] \exp A \cdot \cos B - m \exp A \cdot \sin B \cdot \left[\frac{-pL}{K(1+D^2)} + \frac{K}{r} \right], \quad (51)$$

$$\frac{\partial V}{\partial K} = -m \left[\frac{pK}{r^2} - \frac{L}{K(1+D^2)} \right] \exp A \cdot \cos B + m \exp A \cdot \sin B \cdot \left[\frac{-pL}{K(1+D^2)} + \frac{K}{r} \right]. \quad (52)$$

Анализируя условия (50...52), приходим к выводу, что условия Коши-Римана для степенной функции вида функции вида (34) выполнены.

Знание производственной функции позволяет вычислить такую важную в теоретическом и практическом смысле характеристику, как функцию эластичности [2, 3]. Для функции $y = f(x)$ действительной переменной x эластичность $E_x(y)$ определяют как предел отношения относительного прира-

нения функции $\varepsilon_y = \Delta y / y$ к относительному приращению аргумента $\varepsilon_x = \Delta x / x$ при стремлении последнего к нулю:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} = x (\ln y)' = \frac{d \ln y / dx}{d \ln x / x}. \quad (53)$$

Для функции $W = f(z)$ комплексной переменной Z эластичность $E_Z(W)$ определяют, согласно работе [5], по условию:

$$E = \frac{dW}{dZ} \cdot \frac{Z}{W} = \frac{d(\ln W)}{dZ} \cdot Z. \quad (54)$$

Для рассмотренных в данной работе производственных функций их функции эластичности примут следующий вид.

Для линейной функции вида (7) получим:

$$E(\alpha Z) = 1. \quad (55)$$

Для степенной функции вида (34) получим:

$$E(\alpha Z^\beta) = \beta = p + iq. \quad (56)$$

Для показательной функции вида (23) получим:

$$E(\alpha e^{\beta Z}) = \beta Z. \quad (57)$$

Для логарифмической функции вида (13) получим:

$$E(\alpha + \beta \ln W) = \frac{\beta}{\beta \ln(Z) + \alpha} = \frac{p + iq}{(p + iq) \left(\ln \sqrt{K^2 + L^2} + i \operatorname{arctg} L / K \right) + (a + ib)}. \quad (58)$$

Для упрощения дальнейшего изложения примем, что:

$$S_1 = 4(M\beta)^2 \operatorname{arctg} \left(\frac{L}{K} \right), \quad (59)$$

$$S_2 = 8(bp - aq) \operatorname{arctg} \left(\frac{L}{K} \right), \quad (60)$$

$$S_3 = (M\beta)^2 \left(\ln(K^2 + L^2) \right)^2, \quad (61)$$

$$S_4 = (ap + bq) \ln(K^2 + L^2). \quad (62)$$

Выделив в (58) с учётом (59,...62) действительную и мнимую части условия (58), получим:

$$U = \left(2(M\beta)^2 \ln(K^2 + L^2) + 2(ap + bq) \right) / \sum_1^5 S_i, \quad (63)$$

$$V = 4 \left[(M\beta)^2 \operatorname{arctg}(L/K) - aq + bp \right] / \sum_1^5 S_i. \quad (64)$$

Одним из способов управления производственными функциями комплексного аргумента может быть определение эластичности модуля их аргумента.

Рассмотрим подробно это на примере линейной функции (8).

Используя условия (10), получим, что:

$$|F(W)| = \sqrt{U^2 + V^2} = \sqrt{(aK - bL)^2 + (aL + bK)^2}. \quad (65)$$

Используя условие (54), получим, что эластичность функции (65) по действительной части K комплексного аргумента Z будет равна величине:

$$E_K(|F(W)|) = \frac{\partial \ln|F(W)|}{\partial K} = \frac{K^2}{K^2 + L^2}. \quad (66)$$

Эластичность функции (65) по мнимой части L комплексного аргумента Z будет равна величине:

$$E_L(|F(W)|) = \frac{\partial \ln|F(W)|}{\partial L} = \frac{L^2}{K^2 + L^2}. \quad (67)$$

Распространяя принятую в теории производственных функций действительной переменной методику расчёта предельной нормы замещения γ одного ресурса другим при сохранении неизменным значения функции [8, С. 355], получим в рассматриваемом случае, что:

$$\gamma = \frac{\partial \ln|F(W)|}{\partial K} / \frac{\partial \ln|F(W)|}{\partial L} = \frac{K^2}{L^2}. \quad (68)$$

Полученный результат даёт возможность выбирать такие компенсирующие воздействия по действительной и мнимой части комплексной переменной Z , чтобы модуль производственной функции оставался постоянным.

Для показательной функции вида (23) принимая во внимание условия (28) и (29) получим, что:

$$|F(W)| = \exp \left[(pK - qL) \sqrt{K^2 + L^2} \right]; \quad (69)$$

$$E_K(|F(W)|) = \frac{\partial \ln|F(W)|}{\partial K} K = \left(\frac{K}{K^2 + L^2} + p \right) K; \quad (70)$$

$$E_L(|F(W)|) = \frac{\partial \ln|F(W)|}{\partial L} L = \left(\frac{L}{K^2 + L^2} - q \right) L. \quad (71)$$

Тогда, аналогично условию (68), получим предельную норму замещения:

$$\gamma = \frac{-K(K^2 p + K + L^2 p)}{L[K^2 q + L(Lq - 1)]}. \quad (72)$$

Получение аналогов вышеописанных результатов для логарифмической и степенной функций более громоздко, поэтому для их выполнения использовали систему компьютерной алгебры [9].

Для логарифмической функции вида (16) частные эластичности её модуля по переменным K и L примут вид:

$$E_K|F(W)| = -N_1 K / M; \quad (73)$$

$$E_L|F(W)| = N_2 L / M. \quad (74)$$

Примем, что:

$$S_6 = p^2 + q^2; \quad (75)$$

$$T = pK + qL; \quad (76)$$

$$I = Lp - Kq. \quad (77)$$

Выполняя действия, аналогичные (66...69), получим, что:

$$N_1 = -4K \left[2qT \arctg D - pT \ln(r^2) - 2aT - S_7 \right]. \quad (78)$$

Знаменатель условия (73):

$$M = r^2 \left[4q^2 \arctg D^2 - 4 \arctg(pq \ln(r^2) + 2aq - p) + p^2 (\ln r^2)^2 + 2(2ap + q) \ln(r^2) + 4(a^2 + b) \right]. \quad (79)$$

Числитель эластичности модуля (74) функции (16) примет вид:

$$N_2 = 4L \left(2qS_7 \arctg D + pI \ln(r^2) + 2aI + T \right). \quad (80)$$

Взаимная эластичность действительной и мнимой части аргумента Z функции (16):

$$\gamma = - \frac{2qT \arctg D - pT \ln r^2 - 2at - S_7}{2qS_7 \arctg D + pI \ln(r^2) + 2aS_7 + T} \cdot \frac{K}{L}. \quad (81)$$

Эластичность модуля степенной функции по переменной K с учётом (66), (67), (68) и подстановок (45), (46), (76), (77) составит:

$$E_K |F(W)| = \frac{K}{r^2} (p \ln(r^2) - 2q \arctg D) T; \quad (82)$$

аналогичная характеристика для переменной L будет равна величине:

$$E_L |F(W)| = - \frac{L}{r^2} (2q \arctg D - p \ln(r^2)). \quad (83)$$

Вычисленная по правилу (68) взаимная эластичность γ аргументов K и L примет вид:

$$\gamma = - \frac{KT}{LI}. \quad (84)$$

Выводы

1. Для линейной, показательной, логарифмической и степенной производственных функций одного комплексного аргумента и комплексных коэффициентов доказано выполнение условий Коши-Римана.

2. Для линейной, показательной, логарифмической и степенной производственных функций одно-

го комплексного аргумента и комплексных коэффициентов определены их эластичности по комплексному аргументу.

3. Для линейной, показательной, логарифмической и степенной производственных функций одного комплексного аргумента и комплексных коэффициентов определены эластичности их модулей по действительным переменным, входящим в состав действительную и мнимой части переменной Z.

Список литературы

1. Лопатников Л.И. Экономико-математический словарь: Словарь современной экономической науки / Л.И. Лопатников; 5-е изд., перераб. и доп. – М.: Дело, 2003. – 520 с.
2. Клейнер Г.Б. Производственные функции: теория, методы, применение / Г.Б. Клейнер. – М.: Финансы и статистика, 1986. – 239 с.
3. Иванюков Ю.П. Математические модели в экономике / Ю.П. Иванюков, А.В. Лотов. – М.: Наука, 1979. – 304 с.
4. Светульников С.Г. Основы эконометрии комплексных переменных / С.Г. Светульников. – СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2008. – 108 с.
5. Светульников С.Г. Основы комплекснозначной экономики / С.Г. Светульников. – СПб.: ЧП М.Н. Василькина, 2011. – 348 с.
6. Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1973. – 736 с.
7. Фукс Б.А. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения / Б.Ф. Фукс, Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1964. – 388 с.
8. Салманов О.Н. Математическая экономика с применением Mathcad и Excel / О.Н. Салманов. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003. – 464 с.
9. Дьяконов В.П. Системы компьютерной алгебры Derive: Самоучитель и руководство пользователя / В.П. Дьяконов. – М.: СОЛОН-Р, 2002. – 320 с.

Поступила в редколлегию 21.01.2013

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.О. Тимофеев, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

ПЕРЕВІРКА ВИКОНАННЯ УМОВ КОШИ-РІМАНА ДЛЯ КОМПЛЕКСНОЗНАЧНИХ ВИРОБНИЧИХ ФУНКЦІЙ І УПРАВЛІННЯ НИМИ

В.Ю. Дубницький, О.Е. Петренко

Для лінійної, показникової, логарифмічної і степеневі виробничих функцій одного комплексного аргументу і комплексних коефіцієнтів доведено виконання умов Коши-Рімана. Визначені еластичності цих функцій по комплексному аргументу, обчислені еластичності їх модулів по дійсній і уявній частині аргументу.

Ключові слова: функція комплексної змінної, виробнича функція, комплекснозначна виробнича функція, лінійна, показникова, логарифмічна, степенева виробнича функція одного комплексного аргументу, еластичність виробничої функції.

VERIFICATION OF FEASIBILITY THE CAUCHY-RIEMANN DIFFERENTIAL EQUATIONS FOR COMPLEX-VALUED PRODUCTION FUNCTION AND THEIR MANAGEMENT

V.Iu. Dubnitskyi, O.Ie. Petrenko

For linear, exponential, logarithmic and power production functions of complex argument and complex coefficients it is proved the Cauchy-Riemann feasibility. There are determined the function elasticity by complex argument, it is evaluated the elasticity of their modules by the real and imaginary parts of the argument.

Keywords: function of a complex variable, production function, complex production function, linear, exponential, logarithmic, power production function of complex argument, the elasticity of the production function.