УДК 519.85

О.В. Серая

*Национальный технический университет «ХПИ», Харьков*

# РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

*Рассмотрена задача рационального использования многомерного ресурса. Описана математическая модель этой задачи в виде распределительной задачи линейного программирования. Для решения задачи предложена декомпозиционная процедура, которая проста в реализации, однако дает лишь приближенное решение. Более точное решение обеспечивается в результате специального преобразования исходной модели к математической модели, типичной для транспортных задач линейного программирования. Получены соотношения для расчета требуемых значений параметров преобразования.*

***Ключевые слова**: рациональное распределение ресурса, распределительная задача линейного программирования, декомпозиция, транспортная задача.*

## Введение

При решении многих практических задач рационального использования многомерного ресурса возникает математическая модель, типичная для так называемых распределительных задач линейного программирования.

Приведем простой пример такой задачи.

Пусть для изготовления набора продуктов в соответствии с планом $B=(b_1,b_2,...,b_n)$ используется оборудование m типов.

Введем:

$c_{ij}$ - затраты на производство единицы j-го продукта на оборудовании i-го типа,

$a_i$ - суммарный ресурс оборудования i-го типа,

$d_{ij}$ - расход ресурса при производстве единицы j-го продукта на оборудовании i-го типа,

$x_{ij}$ - планируемое количество j-го продукта, производимого на оборудовании i-го типа, $i=1,2,...,m$, $j=1,2,...,n$.

Целевая функция, отображающая суммарные затраты, имеет вид

$$L(x)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\Rightarrow \min. \qquad (1)$$

Искомый набор $\{x_{ij}\}$ должен удовлетворять ограничениям:

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j,\ j=1,2,...,n, \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n}d_{ij}x_{ij}\le a_i,\ i=1,2,...,m, \qquad (3)$$

$$x_{ij}\ge 0,\ i=1,2,...,m,\ j=1,2,...,n. \qquad (4)$$

При этом соотношения (2) обеспечивают выполнение плана заказов, а соотношения (3) учитывают ограничения на ресурс оборудования.

**Цель статьи:** разработка метода решения задач рационального использования многомерного ресурса, аналитической моделью которых является распределительная задача линейного программирования. Разрабатываемый метод должен служить альтернативой общему методу решения задач линейного программирования, который для распределительных задач чрезвычайно не эффективен.

**Постановка задачи.** Полученная задача минимизации (1) на ограничениях (2)-(4) является так называемой распределительной задачей линейного программирования. Точное решение этой задачи может быть получено с применением общих процедур линейного программирования. Вместе с тем трудоёмкость этих методов, как известно [1], быстро растёт с увеличением размерности задачи, которая в реальной ситуации может быть очень большой (номенклатура типов изготавливаемых продуктов может насчитывать более тысячи наименований). В связи с этим рассмотрим следующую итерационную процедуру, обеспечивающую приближённое решение задачи.

## Основные результаты

Предлагаемая процедура основана на специальных преобразованиях матрицы затрат $C=(c_{ij})$, входящей в целевую функцию (1) задачи.

Для организации вычислительной процедуры решения исходной задачи понадобится следующая теорема декомпозиции.

***Теорема.*** Пусть

$$\{\phi_{ij}(x_{ij})\},\ i=1,2,...,m,\ j=1,2,...,n\ –$$

набор функций, для которых $\phi''_{ij}(x_{ij})\le 0$.

Введем

$$\Phi(X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\phi_{ij}(x_{ij}). \qquad (5)$$

Тогда набор

$$X^* = \left(x_{ij}^*\right),\ i = 1,2,...,m,\ j = 1,2,...,n,$$

удовлетворяющий (2)-(4) будет минимизировать (5) в том и только в том случае, если он минимизирует

$$\Phi_j\left(x_j\right) = \sum_{i=1}^{m} \phi_{ij}\left(x_{ij}\right),$$

то есть

$$\sum_{i=1}^{m} \phi_{ij}\left(x_{ij}^*\right) = \min_{\left(x_{ij}\right)} \left\{\sum_{i=1}^{m} \phi_{ij}\left(x_{ij}\right)\right\},\ j = 1,2,...,n.$$

Эта теорема является двухиндексным частным случаем более общей теоремы, сформулированной и доказанной в [2].

Заметим, что функции $\phi_{ij}\left(x_{ij}\right) = c_{ij}x_{ij}$ обладают требуемыми в теореме свойствами. Поэтому теорема может быть использована при оптимизации функционала (1).

Из теоремы следует, что решение исходной задачи может быть получено в результате реализации следующей итерационной процедуры. Она состоит из двух этапов – подготовительного и основного.

***Подготовительный этап.***

Выберем произвольный продукт с номером $j_0$. Сформулируем задачу отыскания набора $\left\{x_{ij_0}\right\}$, минимизирующего

$$L_{j_0} = \sum_{i=1}^{m} c_{ij_0} x_{ij_0} \tag{6}$$

и удовлетворяющего ограничениям

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij_0} = b_{j_0}, \tag{7}$$

$$x_{ij_0} \geq 0,\ i = 1,2,...,m. \tag{8}$$

Задача (7) – (8) является простейшей одноиндексной задачей линейного программирования с единственным ограничением-равенством и имеет тривиальное решение:

$$x_{ij_0} = \begin{cases} 0, i \neq i_0, \\ b_{j_0}, i = i_0, \end{cases}$$

где

$$i_0 = \arg\min_i \left\{c_{ij_0}\right\}.$$

Решим задачи (7) – (8) для всех $j = 1,2,...,n$. В результате получим некоторый начальный план исходной задачи $\hat{X}$, который по построению удовлетворяет ограничениям (2), (4).

Заметим, что если набор $\left\{b_j\right\}$ - целочисленный, то этим же свойством обладает и полученный план $\hat{X}$.

Подготовительный этап завершен.

***Основной этап.***

Подставим план $\hat{X}$ в ограничения (3). Если окажется, что все они удовлетворены, то решение закончено, и план $\hat{X}$ является искомым. В противном случае множество ограничений (3) разобьется на три подмножества:

$$I^{(0)} = \left\{ i \in \{1,2,...,m\},\quad \varepsilon_i = a_i - \sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_{ij} = 0 \right\},$$

$$I^{(+)} = \left\{ i \in \{1,2,...,m\},\quad \varepsilon_i = a_i - \sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_{ij} > 0 \right\},$$

$$I^{(-)} = \left\{ i \in \{1,2,...,m\},\quad \varepsilon_i = a_i - \sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_{ij} < 0 \right\}.$$

Строки плана $\hat{X}$, имеющие номера $i \in I^{(0)}$, будем называть нулевыми, строки с номерами $i \in I^{(+)}$ - избыточными (ресурс соответствующего оборудования не использован полностью, избыточен), строки с номерами $i \in I^{(-)}$ – недостаточными (план не может быть реализован, так как ресурсов оборудования типа $i \in I^{(-)}$ недостаточно).

Дальнейшая процедура обеспечивает итерационное сокращение невязок. Подробное ее описание приведено в [3].

Предложенная декомпозиционная процедура даже при высокой размерности задачи не является чрезмерно трудоемкой ввиду предельной простоты реализующих ее операций. Однако она обеспечивает получение лишь приближенного плана задачи по следующим причинам.

Во-первых, процедура коррекции плана осуществляется в результате одношаговой оптимизации из состояния, возникшего к текущему шагу, и, поэтому, не обеспечивает оптимизации в целом.

Вторая причина – исключение из рассмотрения нулевых строк.

В связи с этим рассмотрим другой подход к решению этой задачи.

Как известно [4], точное и быстрое решение задачи может быть получено, если

$$d_{ij} = \lambda_i \mu_j,$$

$$i = 1,2,...,m,\ j = 1,2,...,n.$$

При выполнении этих условий распределительная задача (1)-(4) может быть сведена к транспортной задаче линейного программирования.

Действительно, введем новую переменную

$$z_{ij} = \mu_j x_{ij},$$

$$i = 1,2,...,m,\ j = 1,2,...,n,$$

и преобразуем (1) – (3):

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \frac{c_{ij}}{\mu_j} z_{ij}, \tag{9}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \frac{z_{ij}}{\mu_j} = \frac{1}{\mu_j}\sum_{i=1}^{m} z_{ij} = b_j\ ,, \quad (10)$$

$$j = 1,2,...,n$$

$$\sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_i\mu_j x_{ij} = \lambda_i \sum_{j=1}^{n} z_{ij} \le a_i\ , \quad (11)$$

$$i = 1,2,...,m\ .$$

Введем

$$\hat{c}_{ij} = \frac{c_{ij}}{\mu_j}, \quad \hat{b}_j = b_j\mu_j, \quad \hat{a}_i = \frac{a_i}{\lambda_i}\ , \quad (12)$$

$$i = 1,2,...,m\ ,\ j = 1,2,...,n\ .$$

Тогда соотношения (9)-(11) примут вид:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \hat{c}_{ij} z_{ij} \Rightarrow \min\ , \quad (13)$$

$$\sum_{i=1}^{m} z_{ij} = \hat{b}_j\ ,\quad j = 1,2,...,n\ , \quad (14)$$

$$\sum_{j=1}^{n} z_{ij} \le \hat{a}_i\ ,\quad i = 1,2,...,m\ , \quad (15)$$

типичный для транспортных задач линейного программирования.

В некоторых случаях возможность использования соотношения

$$d_{ij} = \lambda_i\mu_j\ ,\ i = 1,2,...,m\ ,\ j = 1,2,...,n\ ,$$

можно обосновать. Например, в рассматриваемой задаче рационального использования оборудования при выполнении плана производства естественно принять, что оборудование i-го типа характеризуется средним расходом ресурса в единицу времени $\lambda_i$, а каждому продукту j соответствует средняя продолжительность производства единицы этого продукта $\mu_j$.

В общем случае параметры $\lambda_i$ и $\mu_j$ нужно определить таким образом, чтобы соотношение $d_{ij} = \lambda_i\mu_j$ выполнялось возможно более точно.

При этом имеем mn уравнений относительно неизвестных $\lambda_i$, $i = 1,2,...,m$, $\mu_j$, $j = 1,2,...,n$, вида:

$$\lambda_i\mu_j = d_{ij}\ ,\ i = 1,2,...,m\ ,\ j = 1,2,...,n\ . \quad (16)$$

Предложенный в [3] подход к решению системы уравнений (16) приводит к следующим соотношениям для расчета $\lambda_i$ и $\mu_j$:

$$\lambda_i = \left(\frac{\prod_{j=1}^{n} d_{ij}}{C_\mu}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{\left(\prod_{j=1}^{n} d_{ij}\right)^{\frac{1}{n}}}{\left(\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n} d_{ij}\right)^{\frac{1}{(m+n)n}}}\ ,$$

$$i = 1,2,...,m\ .$$

$$\mu_j = \left(\frac{\prod_{i=1}^{m} d_{ij}}{C_\lambda}\right)^{\frac{1}{m}} = \frac{\left(\prod_{i=1}^{m} d_{ij}\right)^{\frac{1}{m}}}{\left(\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n} d_{ij}\right)^{\frac{1}{(m+n)m}}}\ ,$$

$$j = 1,2,...,n\ .$$

Следует отметить, что описанная процедура расчета $\lambda_i$ и $\mu_j$ даёт лишь приближенное решение, тем менее точное, чем выше размерность задачи.

В связи с этим рассмотрим другой метод выбора параметров $\lambda_i$ и $\mu_j$, обеспечивающих более точное выполнение равенства (16).

Прологарифмируем соотношение (16):

$$\ln\lambda_i + \ln\mu_j = \ln d_{ij}\ , \quad (17)$$

$$i = 1,2,...,m\ ,\ j = 1,2,...,n\ .$$

Введем обозначения

$$a_i = \ln\lambda_i\ ,$$

$$b_j = \ln\mu_j\ ,\ c_{ij} = \ln d_{ij}$$

и запишем (17) следующим образом

$$a_i + b_j = c_{ij}\ ,$$

$$i = 1,2,...,m\ ,\ j = 1,2,...,n\ .$$

Сформируем функционал наименьших квадратов

$$J = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(a_i + b_j - c_{ij}\right)^2\ . \quad (18)$$

Отыщем наборы $(a_i)$ и $(b_j)$, минимизирующие (18).

Имеем

$$\frac{\partial J}{\partial a_i} = 2\sum_{j=1}^{n}\left(a_i + b_j - c_{ij}\right) = 0\ ,$$

откуда

$$na_i + \sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\ ,. \quad (19)$$

$$i = 1,2,...,m$$

Аналогично этому

$$\frac{\partial J}{\partial b_j} = 2\sum_{i=1}^{m}\left(a_i + b_j - c_{ij}\right) = 0\ ,$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{m} a_i + mb_j = \sum_{i=1}^{m} c_{ij}\ ,. \quad (20)$$

$$j = 1,2,...,n$$

Далее просуммируем левую и правую части (19) по i и, после умножения (20) на n, вычтем второй результат из первого.

При этом получим

$$m\sum_{j=1}^{n} b_j - mnb_j = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} - n\sum_{i=1}^{m} c_{ij} .$$

Разделим полученное соотношение на $mn$ . Тогда

$$b_j = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} b_j - \frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} c_{ij} . \qquad (21)$$

С другой стороны, из (19) следует, что

$$a_i = -\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} b_j + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} . \qquad (22)$$

Теперь, суммируя (21) и (22), получим

$$a_i + b_j = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} c_{ij} - \frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} . \qquad (23)$$

Таким образом, исходная система уравнений (19), (20) преобразована к системе уравнений (23).

Допустимое решение этой системы уравнений имеет вид:

$$a_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} - \frac{1}{n(m+n)}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} ,$$

$$i = 1, 2, ..., m .$$

$$b_j = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} c_{ij} - \frac{1}{m(m+n)}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} ,$$

$$j = 1, 2, ..., n .$$

Возвращаясь к исходным переменным, получим

$$\lambda_i = e^{a_i} ,$$
$$i = 1, 2, ..., m ,$$

$$\mu_j = e^{b_j} ,$$
$$j = 1, 2, ..., n .$$

Вычисленные значения позволяют осуществить преобразования (9)-(12) и получить задачу (13)-(15) типа транспортной.

## Выводы

Таким образом, предложена простая вычислительная процедура преобразования распределительной задачи линейного программирования к задаче типа транспортной. Требуемые значения параметров преобразования рассчитываются по методу наименьших квадратов.

## Список литературы

1. *Иванов В.В. Методы вычислений на ЭВМ / В.В. Иванов. – К.: Наукова думка, 1983. – 583 с.*

2. *Серая О.В. Многоиндексные нелинейные транспортные задачи / О.В. Серая, О.И.Дунаевская // Інформаційно-керуючі системи на залізничному транспорті. – Х.: ІКСЗТ, 2009. – № 5. – С. 25 – 30.*

3. *Серая О.В. Многомерные модели логистики в условиях неопределенности: моногр. / О.В. Серая. – Х.: ФОП Стеценко И.И., 2010. – 512 с.*

4. *Раскин Л.Г. Многоиндексные задачи линейного программирования / Л.Г. Раскин, И.О. Кириченко. – М.: Радио и связь, 1989. – 240 с.*

*Поступила в редколлегию 1.02.2013*

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. Л.Г. Раскин, Национальный технический университет «ХПИ», Харьков.

### РОЗПОДІЛЬНА ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

О.В. Сіра

*Розглянуто задачу раціонального використання багатовимірного ресурсу. Описано математичну модель цієї задачі у вигляді розподільної задачі лінійного програмування. Для вирішення задачі запропонована декомпозиційна процедура, яка проста в реалізації, однак дає лише наближене рішення. Більш точне рішення забезпечується в результаті спеціального перетворення вихідної моделі до математичної моделі, типової для транспортних задач лінійного програмування. Отримані співвідношення для розрахунку необхідних значень параметрів перетворення.*

***Ключові слова**: раціональний розподіл ресурсу, розподільне завдання лінійного програмування, декомпозиція, транспортне завдання.*

### DISTRIBUTION LINEAR PROGRAMMING PROBLEM

O.V. Sira

*The management problem of multi-dimensional resource. The mathematical model of this problem in the form of distribution in linear programming. To solve the problem, are the decomposition procedure, which is simple to implement, but gives only an approximate solution. A more accurate solution is provided by a special transformation of the original model to the mathematical model, which is typical for the transport of linear programming problems. The formulas for the calculation of the required values of the transformation parameters.*

***Keywords**: rational distributing of resource, distributive task of the linear programming, decouplig, transport task.*