УДК 006.91

С.Г. Рабинович

Нью Джерси, США

РУКОВОДСТВО ПО ОЦЕНИВАНИЮ ТОЧНОСТИ ОДНОКРАТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

В статье представлено Руководство по оцениванию точности прямых и косвенных однократных измерений. Приведены основные термины и понятия. Описаны способы выражения точности измерительных приборов. Руководство представлено в виде пошагового алгоритма. Рассмотрены случаи нормальных и расширенных условий применения измерительных приборов. Приводятся примеры, иллюстрирующие рассматриваемые ситуации.

***Ключевые слова**: однократные измерения, прямые измерения, косвенные измерения, погрешность измерения, неопределенность измерения.*

Введение

Знать точность измерений необходимо для обеспечения взаимозаменяемости деталей и узлов сложных устройств, для сравнения результатов измерений и определения каким количеством цифр представить результаты измерений. Однократные измерения широко используются в промышленности, торговле, медицине, при контроле за состоянием окружающей среды и при научных исследованиях. Тем не менее, вопрос точности однократных измерений до сих пор не отражен в традиционной метрологии. В частности, он даже не упоминается в Руководстве по выражению неопределенности измерений [1] – единственном международном документе общего характера, посвященном точности измерений. Кроме того, как показано в [2, 3], однократные измерения являются базой многократных измерений и поэтому для оценивания точности последних необходима оценка точности базовых однократных измерений. Данное Руководство имеет своей целью восполнить отмеченный пробел. Предназначенное для практического применения, оно составлено в форме «делай за мной» без подробных пояснений. Пояснения можно найти в монографиях [2] и [3].

1. Основные термины и понятия

1.1. *Прямое измерение* – измерение, при котором значение измеряемой величины получают по показанию используемого прибора.

1.2. *Косвенное измерение* – измерение, при котором значение измеряемой величины находят по результатам измерений других величин, связанных с измеряемой величиной известной функциональной зависимостью. Эти другие величины называются *измерительными аргументами* (в краткой форме − *аргументами),* а функциональная зависимость − *уравнением измерения.* По виду уравнения измерения различают линейные и нелинейные косвенные измерения, апо свойствам аргументов − косвенные измерения с зависимыми и с независимыми аргументами.

1.3. *Однократное прямое измерение* – прямое измерение, при котором результат измерения получают по одному показанию измерительного прибора.

Примечание: Иногда при однократном прямом измерении делают не одно, а два − три измерения. Однако эти избыточные измерения производят для уверенности, что в момент измерения не произошло какое-то изменение измеряемой величины или условий измерения или для проверки пригодности принятой модели объекта (например, что моделью объекта можно считать круг и измеряемой величиной соответственно диаметр этого круга).

1.4. *Однократное косвенное измерение* – косвенное измерение, при котором все аргументы измеряют однократно.

1.5. *Истинное значение измеряемой величины* – значение величины, которое, если бы было известно, идеально отражало как качественно, так и количественно соответствующее свойство объекта.

Примечание 1. Истинное значение измеряемой величины - понятие абстрактное, никакими физическими свойствами не наделено, и используется в теории точности измерений для обозначения того идеала, к которому стремятся при измерении, но который найти нельзя.

Примечание 2. Понятию «Истинное значение измеряемой величины» можно дать другие, менее абстрактные определения:

а) Истинное значение измеряемой величины – значение измеряемой величины, которое могло бы быть получено при измерении с помощью абсолютно точного измерительного прибора.

b) Истинное значение измеряемой величины – точный размер параметра модели объекта, на которой определена измеряемая величина. Например, если объект – шайба, измеряемая величина – диаметр шайбы, то модель объекта – круг, измеряемый параметр модели – диаметр круга, а истинное значение измеряемой величины – точное значение диаметра круга.

1.6. *Неточность измерения* – отклонение результата измерения от истинного значения измеряемой величины. Неточность измерения выражается либо как предел погрешности измерения, либо как неопределенность результата измерения. В обоих случаях она может быть представлена в абсолютной или относительной форме.

1.7. *Неопределенность измерения* – границы интервала, покрывающего истинное значение измеряемой величины с известной вероятностью. За нулевое значение интервала принимается результат измерения –оценка истинного значения измеряемой величины.

1.*8. Пределы погрешности измерения* – пределы оценки отклонения результата измерения от истинного значения измеряемой величины, найденные на основе детерминистского подхода.

2. Способы выражения точности измерительных приборов

2.1. Точность серийно выпускаемых измерительных приборов выражают пределами допускаемых погрешностей. Эти пределы указываются в сопроводительных документах приборов, прилагаемыми к приборам при их выпуске из производства. В этих же документах указывают условия применения приборов, нормальные (*referentcondition*) и расширенные (*ratedcondition*). Пределы допускаемой погрешности приборов в нормальных условиях называют основной погрешностью (*intrinsicerrors*). В расширенных условиях у приборов появляются дополнительные погрешности (*additionalerrors*).

Некоторые приборы периодически градуируют в поверочных лабораториях, и таким образом повышают их точность вплоть до точности градуировки.

2.2. Для аналоговых приборов (приборы со стрелочным указателем), у которых пределы допускаемой абсолютной погрешности Δ постоянны в пределах всей шкалы, эти погрешности обычно указывают в виде приведенной погрешности (*fiducialerror*) Υ*,* которую выражают в процентах. Приведенная погрешность позволяет сравнивать по точности приборы с разными пределами измерений. Приведенная погрешность связана с пределом допускаемой абсолютной погрешности выражением

$$\Upsilon = 100\frac{\Delta}{x_N}, \qquad (2.1)$$

где x_N – нормирующее значение (*fiducialvalue*).

Значение x_N зависит от вида шкалы и назначения прибора, но чаще всего равно верхнему пределу измерения прибора. В этом случае предел приведенной погрешности совпадает с пределом основной погрешности прибора.

2.3. Точность цифровых приборов США обычно указывают в условной форме

$$\pm(b+q), \qquad (2.2)$$

где b-предел относительной погрешности прибора, один и тот же для любого показания прибора, и q – предел абсолютной погрешности прибора в виде некоторого числа цифр последнего разряда отсчетного устройства прибора. Обычно b выражают в процентах, а qв каждом случае надо перевести в долю измеряемой величины. Поэтому предел допускаемой погрешности прибора всегда надо вычислять. Например, рассмотрим цифровой милливольтметр с диапазоном измерения 0 – 300 мВ, отсчетное устройство которого имеет четыре разряда. Пределы погрешностей прибора заданы формулой ± (0.5% + 2). Четвертый разряд индикатора прибора может дать одно из 10 показаний в диапазоне от 0 до 9. Цена единицы равна 0,1 мВ. Цифра 2 следовательно означает 0,2 мВ. Теперь можно вычислить предел относительной погрешности прибора при любом показании. Например, при показании 100 мВ получим

$$\delta = \pm\left(0,5 + \frac{0,2\cdot 100}{300}\right) = \pm 0,57\%.$$

В форме абсолютной погрешности это будет

$$\Delta = \pm\left(0,5\cdot 10^{-2}\cdot 300 + 0,2\right) = \pm 1,7\ \text{мВ}.$$

Иногда q представляют в форме приведенной погрешности и соответственно выражают в процентах или ppm. Важно не спутать приведенную погрешность с относительной погрешностью.

3. Однократные прямые измерения

3.1. Предварительные замечания

Подавляющее большинство измерительных приборов, выпускаемых промышленностью, предназначено для однократных измерений. Некоторые из них так просты, что неточность измерений с их помощью оценивается без вычислений. Например, измерение длины с помощью линейки, когда отсчет показаний делают с точностью до одного деления, имеет погрешность из-за округления, которая не превышает половины деления. Неточность измерения вообще не требуется вычислять, если заранее известно, что применительно к цели измерения она не имеет значения. Пример – измерение напряжения автомобильной батареи промышленным тестером. Но в других, более ответственных измерениях, точность измерений необходимо знать и, следовательно, вычислять.

Кроме точности прибора и условий измерений на точность измерений может влиять взаимодействие прибора с объектом, некоторое качество которого измеряется. Так, в области измерения электрических величин часто возникает погрешность из-за потребления измерительным прибором энергии от объекта измерения. Например, если в какой-то цепи измеряется сила электрического тока, то измеряемая сила тока может несколько измениться из-за внутреннего сопротивления амперметра.

3.2. Однократные прямые измерения при нормальных условиях применения измерительных приборов

Шаг 1. Оценивание измеряемой величины. Оценку измеряемой величины x дает показание прибора. В соответствии с инструкцией по применению прибора или указаниями на самом приборе это показание может умножаться на постоянное число. Если прибор имеет сертификат поверочной лаборатории с действительными значениями его показаний, то в показания прибора вносят поправки.

Шаг 2. Оценивание точности измерения. Исходной информацией о точности прибора является предел основной погрешности прибора, указанный в сертификате изготовителя. Обычно он приводится в форме приведенной погрешности. Предел абсолютной погрешности измерения Д вычисляется по формуле

$$\Delta = \Upsilon \frac{x_N}{100}. \qquad (3.1)$$

Предел относительной погрешности д при показании прибора x будет равен

$$\delta = 100 \cdot \Delta / x. \qquad (3.2)$$

Если в показания прибора вносились поправки, то вместо приведенной погрешности прибора нужно использовать указанную в сертификате поверочной лаборатории погрешность или неопределенность поправок. Рассмотрим несколько примеров [2].

1. Промышленный тестер WV-531A (RCA). Это многопредельный универсальный прибор, и он имеет разную точность для измерения разных величин и в разных диапазонах измерений.

Допустим, что нам нужно измерить напряжение переменного тока, используя прибор на диапазоне измерений 0 − 150 В. В описании прибора сказано, что предел погрешности прибора при измерении напряжения переменного тока на выбранном диапазоне будет $\Upsilon = \pm 4\%$ от верхнего предела диапазона измерения. Примем, что при измерении показание прибора было 117,5 В. Тогда по формуле (2.1) находим пределы абсолютной погрешности измерения

$$\Delta = \pm 4\% \cdot \frac{150\,\text{В}}{100\%} = \pm 6\,\text{В}.$$

В форме относительной погрешности это будет

$$\delta = \pm 4\% \cdot \frac{150\,\text{В}}{117{,}5\,\text{В}} = \pm 5{,}1\%.$$

После округления с учетом неточности измерения, результат измерения надо представить в следующем виде: 118 В ± 5% или 118В ± 6В.

Правила округлений при записи результатов измерений приведены в [2].

2. Рассмотрим измерение с помощью цифрового прибора. Предположим, мы измеряем напряжение порядка 10 В прибором с диапазоном измерений 11В, который имеет цифровой индикатор с 5-ью разрядами. Точность прибора представлена в табл. 1.

Таблица 1

Точность цифрового прибора

Time after calibration	24 hours	3 months	1 year	2 years
Temperature	23 ± 1 ^{0}C	23 ± 5 ^{0}C	23 ± 5 ^{0}C	23 ± 5 ^{0}C
Limits of error	±(0.01% + 1 unit)	±(0.015% + 1 unit)	±(0.02% + 1 unit)	±(0.03% + 2 units)

Пределы погрешностей прибора даны в условной форме (2.2), где в первые 24 часа после калибровки b= 0,01%, а q равна единице младшего разряда отсчетного устройства. При пределе измерения 11В и 5-цифрах отсчета единица последнего разряда равна 1 мВ, т.е.q = 1 мВ.

Как следует из таблицы, пределы основной погрешности данного прибора определяются температурой и временем после калибровки. Рабочие условия не определены, что надо понимать как указание на то, что прибор с указанной точностью может применяться только при указанной в таблице температуре.

Предположим, что прибор дал показание 8,563В и известно, что он прошел юстировку и калибровку год назад. Надо найти точность полученного результата. В данном примере точность измерения совпадает с точностью прибора и выражается формулой Д = (0,02% + 1 mV).

Следовательно

$$Д = \pm (0{,}02 \cdot 8{,}563 \cdot 10^{-2} + 0{,}001)\text{В} =$$
$$=(0{,}0017 + 0{,}001)\ \text{В} = \pm 2{,}7\ \text{мВ}.$$

В форме относительной погрешности пределы погрешности измерения будут равны:

$$д=2{,}7 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{2}\ \text{В}/8{,}563\ \text{В} = \pm 0{,}03\%.$$

3. Табл. 2 представляет другой пример спецификации многопредельного цифрового вольтметра. В ней сохранены только два диапазона измерений.

Особенность этой спецификации состоит в том, что второй член условной формулы (2.2) здесь выражен в ppm, т.е. в относительной форме.

Таблица 2

Точность многопредельного цифрового прибора

Time after calibration	24 hours	90 days	12 months	Temperature coefficient
Temperature	23 ± 1 ^{0}C	23 ± 5 ^{0}C	23 ± 5 ^{0}C	0-18 & 28-55 ^{0}C per 1 ^{0}C
10,0000V	–	–	±(35ppm +5ppm)	±(5ppm + 1ppm)
1000,00V	±(20ppm + 6ppm)	±(35ppm + 10ppm)	±(45ppm + 10ppm)	±(5ppm + 1ppm)

Как было отмечено выше, это может вызвать ошибку, если посчитать, что этот член выражает предел обычной относительной погрешности, т.е. погрешности, отнесенной к показанию прибора. На самом деле это предел приведенной погрешности прибора, постоянный для всего данного диапазона измерения прибора. Поэтому при вычислении погрешности измерения этот член надо пересчитать в форму абсолютной погрешности.

Последний столбец таблицы дает пределы дополнительной температурной погрешности прибора. Эта дополнительная погрешность задана в форме предела возрастания погрешности на каждый 1°C изменения температуры в диапазоне [0; +55°C] относительно пределов нормальной температуры [+18°C; + 28°C].

Предположим, что показание прибора было точно 500,00 V сразу после юстировки прибора и второй раз 12 месяцев спустя, в обоих случаях при нормальных условиях. Требуется оценить абсолютную погрешность измерения в обоих случаях. Используя данные таблицы, приведенные в колонках, соответствующих 24 часам и 12 месяцев после юстировки прибора, получим следующие пределы погрешности измерения.

Для первого измерения находим:

$$\Delta_1 = \pm\left(500 \cdot 20 \cdot 10^{-6} + 1000 \cdot 6 \cdot 10^{-6}\right)\text{В} = \pm 16\,\text{мВ}.$$

Через 12 месяцев пределы погрешности станут:

$$\Delta_2 = \pm\left(500 \cdot 45 \cdot 10^{-6} + 1000 \cdot 10 \cdot 10^{-6}\right)\text{В} = \pm 32{,}5\,\text{мВ}.$$

Приведенные примеры оценивания точности измерений показывают, как важно понимать условности в спецификациях измерительных приборов, которыми пользуются их изготовители. Это особенно важно, когда изготовители приборов не соблюдают установленные OIML правила нормирования свойств приборов[4].

3.3. Однократные прямые измерения при расширенных условиях применения измерительных приборов

Шаг 1. Погрешность измерения в расширенных условиях складывается из нескольких составляющих. Кроме основной погрешности используемого прибора, появляются погрешности, обусловленные превышением влияющими величинами пределов их нормальных значений. Поэтому первая задача – установить источники всех возможных причин, влияющих на точность измерения. Подчеркнем, что в число этих причин всегда входит основная погрешность используемого прибора. Далее нужно установить, какие влияющие величины могут вызвать погрешности измерения, которые надо учесть. Эти погрешности будем называть элементарными погрешностями измерения. Наряду с влияющими величинами надо установить, имеет ли место взаимодействие между объектом измерения и измерительным прибором.

Заметим, что пределы основной погрешности приборов включают в себя и случайную составляющую, если приборы данного типа её имеют. Но в этом случае вариацию показаний или стандартное отклонение случайной составляющей указывают еще и отдельно (её полезно знать при оценивании точности многократных измерений). Однако не надо её учитывать дважды.

Шаг 2. Установив источники элементарных погрешностей, надо их оценить. Как правило, эти оценки выражаются в виде пределов их возможных значений. Если для каких либо погрешностей находят точечные оценки, т.е. конкретные численные значения, то нужно внести поправки в показание прибора. В этом случае в число элементарных погрешностей надо включить неточность оценок поправок.

Шаг 3. Дополнительную погрешность можно значительно уменьшить, если иметь функцию влияния данной влияющей величины. Предположим, например, что вместо верхней границы температурного коэффициента w_T мы имеем температурный коэффициент в виде $w'_T = (1 \pm \varepsilon) w_{T,N}$, где $w_{T,N}$ означает номинальное значение этого коэффициента, а ε – допустимое отклонение от $w_{T,N}$, выраженное в относительной форме. При отклонении температуры ΔT от границ интервала нормальной температуры T, дополнительная температурная погрешность будет равна:

$$\delta_T = w_{T,N}\Delta T \pm \varepsilon w_{T,N}\Delta T.$$

Первый член этого выражения является точно определенной величиной и исключен поправкой

$$c = -w_{T,N}\Delta T \cdot h,$$

где h означает показание прибора. Тогда оставшаяся температурная погрешность будет равна:

$$\delta'_T = \pm \varepsilon w_{T,N}\Delta T.$$

Даже если функция влияния известна сравнительно неточно, например, в нашем случае e = 0,2 (20%), температурная погрешность уменьшится значительно (в 4–6 раз):

$$\frac{\delta_T}{\delta'_T} = \frac{1 \pm 0{,}2}{0{,}2} = 4...6.$$

Нужно также иметь ввиду, что сами влияющие величины оцениваются с определенными погрешностями, и эти погрешности должны быть учтены при вычислении соответствующей дополнительной погрешности.

Шаг 4. Все элементарные погрешности нужно выразить в одной и той же форме, или как абсолютные или как относительные погрешности. Если основная погрешность прибора дана в виде приведенной погрешности, то ее надо пересчитать на погрешность реального показания прибора (абсолютную или относительную). Формулы для пересчета (2.1) и (2.2) приведены выше.

Шаг 5. Вычисление неточности результата измерения.

Пусть $ж_0$ обозначает основную погрешность прибора, а $ж_i$, $i = 1 \ldots m$ − остальные элементарные погрешности измерения. Все эти погрешности надо теперь объединить, просуммировать в общую погрешность измерения ζ:

$$\zeta = \zeta_0 + \sum_{i=1}^{m} \zeta_i .$$

Все элементарные погрешности, согласно принятым правилам нормирования погрешностей приборов, взаимно независимы. Мы знаем не сами действительные их значения, а только предельные θ_0 и θ_i:

$$|ж_o| \le \theta_0 \text{ и } |ж_i| \le \theta_i.$$

Наибольшее возможное значение результирующей погрешности равно арифметической сумме пределов элементарных погрешностей. Но физически для этого все элементарные погрешности должны быть равны своим предельным значениям и при том иметь один и тот же знак. Такое совпадение трудно признать возможным, особенно если слагаемых много. Однако для однократных измерений такая предельная оценка неточности измерения иногда используется:

$$\theta = \theta_0 + \sum_{i=1}^{m} \theta_i \ . \qquad (3.2)$$

Более реальный результат дает вероятностный подход. Математической моделью элементарных погрешностей уже давно принято считать случайную величину с равномерным распределением вероятностей [1, 2].

Математически строгое суммирование равномерных распределений позволило получить простую и достаточно точную для практики формулу [2]:

$$\theta_\alpha = k_\alpha \sqrt{\theta_0^2 + \sum_{i=1}^{m} \theta_i^2} \ . \qquad (3.3)$$

Здесь θ_α – неопределенность результата измерения при доверительной вероятности б, $k_б$ – поправочный коэффициент при данной вероятности.

Для обычно используемой вероятности б = 0.95 коэффициент $k_{0.95}$ = 1,1. Примечательно, что это значение практически не зависит от количества слагаемых n = m + 1. Неточность формулы (3.3) при этом постоянном значении $k_б$ меньше 3%.

Приб = 0,99 коэффициент$k_б$ зависит от числа слагаемых. Эту зависимость позволяет учесть табл. 3.

Таблица 3

Зависимость поправочного коэффициента $k_б$ от числа слагаемых N

N	2	3	4	∞
$k_{0.99}$	1.27	1.37	1.41	1.49

При небольшом числе слагаемых, в особенности, когда среди них есть одна составляющая, значительно большая других, иногда может оказаться, что $\vartheta_б$, вычисленная по формуле (3.3) будет больше арифметической суммы предельных значений слагаемых. Но этого физически быть не может. Поэтому в таком случае следует подсчитать $\vartheta_б$ по (3.3) и θ по (3.2) за неточность измерения принять ту величину, которая меньше.

Результирующее распределение суммы из $n \ge 5$ приблизительно одинаковых слагаемых с равномерным распределением можно считать нормальным. Поэтому неопределенность результата измерения можно вычислять также по нормальному распределению как половину доверительного интервала, соответствующего выбранной доверительной вероятности:

$$\theta_\alpha = z_\alpha S_c \qquad (3.4)$$

где $S_c = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\theta_0^2 + \sum_{i=1}^{n} \theta_i^2}$ и z_α – квантиль нормального распределения уровня вероятности б.

Пример. Рассмотрим измерение напряжения цифровым вольтметром в расширенных условиях. Пределы погрешностей вольтметра возьмем из таблицы 2. Примем, что индикатор прибора имеет шесть с половиной разрядов: если на седьмом, невидимом, разряде будет цифра меньше чем 5, то цифра на шестом разряде не изменится; если же цифра на седьмом разряде будет 5 или больше, то показание на шестом разряде увеличится на 1. Таким образом, погрешность округления индикатором ограничена половиной значения единицы шестого разряда.

Положим, что измерение было произведено 12 месяцев спустя последней юстировки вольтметра и что прибор использовался на диапазоне 10 В. Примем так же, что вольтметр вмонтирован в автоматизированную поверочную стойку с температурой внутри стойки 32^0С и что показание прибора было 5,00135 В. Нам нужно вычислить неточность измерения.

Данные в столбце таблицы «12 месяце после юстировки» позволяют найти пределы погрешности, которые имел бы прибор при данном показании в нормальных условиях:

$$\theta_0 = \left(5,00135\,\text{В} \cdot 35 \cdot 10^{-6} + 10\,\text{В} \cdot 5 \cdot 10^{-6}\right) = 0,225\,\text{мВ}.$$

Но прибор работал при температуре, превышающей предел нормальных условий. Данные последнего столбца таблицы позволяют найти температурный коэффициент прибора:

$$5,00135 \cdot 5 \cdot 10^{-6} + 10 \cdot 1 \cdot 10^{-6} = 35 \cdot 10^{-6}\ \text{В}/^0\text{С}.$$

Верхний предел нормальной температуры составляет 28 °С. Температура прибора при работе выше на 4 °С. Следовательно, дополнительная температурная погрешность будет равна $4 \cdot 35 \cdot 10^{-6}$ = 0,14 мВ. Погрешность округления прибора не превышает $5 \cdot 10^{-6}$В = 0,005мВ.

Остается объединить полученные элементарные погрешности. Выполним эту процедуру двумя способами. Арифметическое суммирование дает Д = ± (0.225 + 0,14 + 0,005)мВ = ±0,37мВ. Вероятностное суммирование по формуле (3.3) при б = 0,95 дает $u_б$ = ±1,1·0,265 мВ = ± 0,29 мВ. Поскольку $u_б$<Д, за результат примем неопределенность ± 0,29 мВ или, после округления, $u_б$ = ± 0.3мВ.

4. Однократные косвенные измерения

4.1. Однократные косвенные измерения с использованием измерительных приборов в нормальных условиях

Шаг 1. Измерение аргументов косвенного измерения. В подавляющем большинстве случаев аргументы косвенного измерения оценивают с помощью прямых измерений, анализ которыхприведен выше. Иногда может встретиться случай, когда для оценивания какого-то аргумента нужно косвенное измерение. Методы оценивания результатов этих измерений рассматриваются ниже в данном разделе Руководства.

Шаг 2**.** Оценивание точности измерений аргументов. Как отмечено в предыдущем пункте, аргументы обычно измеряют с помощью прямых измерения, и их точность оценивается согласно 3.2. В тех случаях, когда какие-то аргументы измеряют косвенным методом, их точность оценивают согласно рекомендациям данной секции. Пределы погрешности измерения аргументов могут быть получены в форме или абсолютной погрешности Д$_j$, или относительной погрешности д$_j$. Их надо представить водной форме**.**

Шаг 3. Оценка измеряемой величины. В общем случае уравнение измерения имеет вид

$$A = f(A_1 \ldots A_j \ldots A_N). \qquad (4.1)$$

Подставляя в (4.1) оценки аргументов, находят оценку измеряемой величины $\widetilde{A}$.

Шаг 4. Оценивание неточности измерения. Погрешности косвенного измерения обусловлены погрешностями измерения аргументов и, в принципе, погрешностью из-за неточного соответствия уравнения измерения свойству объекта, которое измеряется. Обычно последняя незначительна и при однократных измерениях ею пренебрегают. Оцененные погрешности измерения аргументов преобразуются в элементарные погрешности косвенного измерения путем линеаризации уравнения измерения. Линеаризация осуществляется с помощью разложения Тейлора, в котором для однократных измерений оставляют только члены первого порядка. Например, в случае измерения с двумя аргументами будем иметь:

$$\tilde{A} = f(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2) + \left(\frac{\partial}{\partial A_1}\zeta_1 + \frac{\partial}{\partial A_2}\zeta_2\right) f(A_1, A_2), \qquad (4.2)$$

где производные вычисляются в точке $(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2)$, а ζ_1 и ζ_2 − погрешности измерения аргументов**.**

Погрешность измерения будет равна:

$$\zeta_и = \tilde{A} - A = \frac{\partial}{\partial A_1}\zeta_1 + \frac{\partial}{\partial A_2}\zeta_2 .$$

Более удобная форма этого уравнения имеет вид

$$\zeta_и = w_1\zeta_1 + w_2\zeta_2 ,$$

где w_1 и w_2 − коэффициенты влияния аргументов.

Таким образом, в общем виде

$$\zeta_и = \sum_{j=1}^{N} w_j \zeta_j .$$

Пределы погрешностей измерений аргументов δ_j, умноженные на коэффициенты влияния аргументов преобразуются в θ_j – пределы элементарных погрешностей измерения:

$$\theta_j = w_j \delta_j . \qquad (4.3)$$

Элементарные погрешности косвенного измерения подобны погрешностям прямого измерения в нормальных условиях и суммируются согласно формулы (3.3), принимающей в данном случае вид:

$$\theta_\alpha = k_\alpha \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \theta_i^2} . \qquad (4.4)$$

Суммирование дает неопределенность оценки измеряемой величины u_a в виде предела доверительного интервала, соответствующего вероятности б.

Так же как при прямых измерениях, если $N \le 3$ то нужно сравнить результат, полученный по (4.4), с арифметической суммой и за неточность измерения принять то значение, которое **меньше.**

Примечание: Уравнение измерения часто имеет вид

$$A = (A_1^{l_1}, \ldots, A_N^{l_N}) . \qquad (4.5)$$

В этом случае и если погрешности измерений аргументов выражены в относительной форме, то коэффициенты влияния аргументов $w_j = l_j$ т.е. их не надо вычислять, они известны заранее и точно.

Пример. В качестве примера однократного косвенного измерения рассмотрим измерение мощности, выделяемой в электрическом сопротивлении при прохождении по нему тока высокой частоты. Уравнение измерения имеет вид $P= I^2R$, где P– измеряемая мощность, I – эффективное значение тока и R – активное сопротивление резистора. Измерения силы тока и сопротивления дали оценки этих величин $\tilde{I}$ and $\tilde{R}$ вместе с пределами погрешностей измерений в относительной форме дI = 0,5% и дR= 1%.

Уравнение измерения по структуре совпадает с уравнением (4.8), погрешности измерения аргументов представлены в относительной форме, так что коэффициенты влияния аргументов известны: $l_1 = l_I = 2$ и $l_2 = l_R = 1$. Поскольку известны пределы погрешностей измерений аргументов, их можно объединить по формуле (4.5). При доверительной вероятности 0.95 коэффициент $k_{0,95}$ = 1,1 и получим:

$$\theta_{0,95} = 1{,}1\sqrt{l_I^2(\delta I)^2 + l_R^2(\delta R)^2} = 1{,}1\sqrt{4 \cdot 0{,}25 + 1} = 1{,}5\%.$$

4.2. Однократные косвенные измерения при применения приборов в расширенных условиях

При расширенных условиях использования приборов погрешности измерений аргументов вычисляются с учетом дополнительных погрешностей, но схема их преобразования в элементарные погрешности косвенного измерения остается той же, что была рассмотрена в разделе 4.1. Однако в данном случае возникает одна особенность, связанная с тем, что дополнительные погрешности измерения разных аргументов могут быть вызваны одной и той же влияющей величиной. Поэтому эти дополнительные погрешности могут иметь либо один и тот же знак, и тогда вызванные ими элементарные погрешности косвенного измерения складываются, либо разные знаки, и тогда вычитаются. Учесть эту особенность можно следующим путем.

Рассмотрим для простоты косвенное измерение с четырьмя аргументами (N = 4). Примем теперь, что дополнительные погрешности аргументов 1 и 2 вызываются изменением одной и той же влияющей величины, например температуры. Обозначим эти дополнительные погрешности ϑ_{1t} и ϑ_{2t}. Каждая из них имеет свой знак, но в общем виде вызываемые ими элементарные погрешности косвенного измерения арифметически суммируются и образуют одну общую элементарную погрешность $\vartheta_{1,2t} = w_1\vartheta_{1t} + w_2\vartheta_{2t}$.

Поскольку в нашем примере четыре аргумента, то вся дополнительная погрешность косвенного измерения ϑ выражается уравнением

$$\vartheta = \vartheta_{1,2t} + w_1 \times \sum_{i=1}^{k_1-1}\vartheta_{1i} + w_2\sum_{i=1}^{k_2-1}\vartheta_{2i} + w_3\sum_{i=1}^{k_3-1}\vartheta_{3i} + w_4\sum_{i=1}^{k_4-1}\vartheta_{4i}, \quad (4.6)$$

где $k_1 \ldots k_4$– число учитываемых составляющих погрешностей измерений аргументов в расширенных условиях.

Дополнительные погрешности каждого аргумента можно объединить и представить граничным значением θ_j. С помощью коэффициентов влияния аргументов w_j, эти пределы преобразуются в пределы элементарных погрешностей косвенного измерения**.** Учитывая так же основные погрешности приборов θ_{0j} и считая, как обычно, их и дополнительные погрешности приборов, имеющими равномерное распределение в пределах $\pm\theta_{0j}$ и $\pm\theta_j$ (j=1,…, N), соответственно, получаем пределы неопределенности косвенного измерения $\theta_б$. Используя пример с четырьмя аргументами, получим следующую формулу:

$$\theta_\alpha = k_\alpha \left[w_j^2\sum_{j=1}^{4}\theta_{0j}^2 + \theta_{1,2t}^2 + w_1^2\sum_{i=1}^{k_1-1}\theta_{1i}^2 + w_2^2\sum_{i=1}^{k_2-1}\theta_{2i}^2 + w_{3,4}\sum_{i=1}^{k_{3,4}-1}\theta_{3,4i}^2\right]^{0,5}. \quad (4.7)$$

Возможен другой путь. Поскольку слагаемых при косвенных измерениях в расширенных условиях много, обычно больше 5, то распределение результирующей погрешности и можно считать нормальным распределением. Стандартное отклонение этого распределение, при сделанных выше допущениях, вычисляется по формуле:

$$S_\vartheta = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[w_j^2\sum_{j=1}^{4}\theta_{0j}^2 + \theta_{1,2t}^2 + w_1^2\sum_{i=1}^{k_1-1}\theta_{1i}^2 + w_2^2\sum_{i=1}^{k_2-1}\theta_{2i}^2 + w_{3,4}\sum_{i=1}^{k_{3,4}-1}\theta_{3,4i}^2\right]^{0,5}. \quad (4.8)$$

Имея S_ϑ находим неопределенность результата косвенного измерения по формуле (4.4).

При б = 0,95 $u_{0,95} = 1,96S_\vartheta$ и при б = 0,99 $u_{0,99} = 2,58S_\vartheta$.

Список литературы

1. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement. ISO (1995).

2. S.G. Rabinovich. Evaluating Measurement Accuracy: A Practical Approach. New York, Springer, 2010.

3. S.G. Rabinovich. Evaluating Measurement Accuracy: A Practical Approach. New York, Springer,2nd ed/, inprint.

4. Recommandation International 34. Classes de precision des Instruments de Mesurage. Organisation International de Metrologie Legale, Paris (1974).

Поступила в редколлегию 25.02.2013

Рецензент: д-р техн. наук, проф. И.П. Захаров, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

НАСТАНОВА З ОЦІНЮВАННЯ ТОЧНОСТІ ОДНОКРАТНИХ ВИМІРЮВАНЬ

С.Г. Рабинович

В статті наведена Настанова з оцінювання точності прямих та непрямих однократних вимірювань. Наведені основні терміни та поняття. Описано способи подання точності вимірювальних приладів. Настанова представлена у вигляді покрокового алгоритму. Розглянуто випадки нормальних та розширених умов застосування вимірювальних приладів. Наведено приклади,які ілюструють розглянуті ситуації.

Ключові слова: *однократні вимірювання, прямі вимірювання, непрямі вимірювання, похибка вимірювань, невизначеність вимірювань.*

GUIDE TO EVALUATING SINGLE MEASUREMENT ACCURACY

S.G. Rabinovich

The article presents methods for evaluating accuracy of direct and indirect single measurements given in the step-by-step form. There are main terms and their notions and common ways to describe the properties of measuring instruments. The accuracy of single measurement is estimated in reference and rated condition of measuring instrument involved.

Keywords: *single measurement, direct measurement, indirect measurement, measurement error, measurement uncertainty.*