УДК 006.91

И.П. Захаров[1], Е.А. Климова[1], Т.В. Чунихина[2]

[1] *Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков*
[2] *Национальный технический университет "ХПИ", Харьков*

ПОЛУЧЕНИЕ ДОСТОВЕРНОЙ ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТА ОХВАТА ПРИ СОСТАВЛЕНИИ БЮДЖЕТА НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ

Анализируются результаты сравнения значений коэффициента охвата для композиции закона распределения Стьюдента с равномерным, нормальным и арксинусным законами распределения, полученные методом Монте-Карло и с помощью эффективного числа степеней свободы. Рассмотрена методика получения расширенной неопределенности и коэффициента охвата с учетом законов распределения вкладов неопределенности типа B без использования метода Монте-Карло.

Ключевые слова: *расширенная неопределенность измерения, коэффициент охвата, метод Монте-Карло, коэффициент Стьюдента, эффективное число степеней свободы.*

Введение

При реализации модельного подхода к оцениванию неопределенности измерений, в соответствии с базовым алгоритмом GUM [1], расширенная неопределенность, приписываемая результату измерения, определяется как произведение суммарной стандартной неопределенности на коэффициент охвата.

При наличии вкладов неопределенности типа A этот коэффициент предлагается рассчитывать как коэффициент Стьюдента для эффективного числа степеней свободы ν_{eff}, определяемого по формуле Велча-Саттерсвейта. Основным недостатком такого подхода является игнорирование при этом законов распределения вкладов неопределенности типа B, которые могут быть доминирующими в бюджете неопределенности.

Для устранения этого недостатка модельного подхода было разработано Дополнение 1 к GUM [2], в основе которого лежит так называемый закон распространения распределений, реализуемый методом Монте-Карло (ММК).

Другим достоинством метода Монте-Карло является устранение методической погрешности линеаризации.

Следует отметить, что реализация метода ММК хотя и не представляет существенных трудностей [3], однако требует использования специализированного программного средства, что препятствует широкому распространению этого метода.

Целью статьи является исследование методики вычисления коэффициента охвата расширенной неопределенности, позволяющей с приемлемой точностью оценивать расширенную неопределенность измерения без применения специализированных программных средств.

Исследование достоверности оценки коэффициента охвата на основе эффективного числа степеней свободы

Исходная модель для исследования коэффициента охвата при расчете расширенной неопределенности основывалась на следующих ранее обоснованных положениях [4, 5]:

1. Все вклады неопределенности типа A в бюджете неопределенности можно объединить в единый вклад, суммарная стандартная $u_A(y)$ и расширенная U_A неопределенности которого оцениваются по формулам [4]:

$$u_A(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} u_A^2(y_i)}\,, \qquad (1)$$

$$U_A = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} t_{0,95}^2(\nu_i) u_A^2(y_i)}\,, \qquad (2)$$

где $u_A(y_i)$ − некоррелированные вклады неопределенности типа A;

$t_{0,95}(\nu_i)$ − коэффициент Стьюдента для вероятности 0,95 и числа степеней свободы $\nu_i = n_i - 1$, соответствующего i-у вкладу;

n_i − число измерений, проведенное при оценивании i-го вклада неопределенности.

Примечание: при наличии наблюдаемой корреляции двух или нескольких входных величин с одинаковым числом измерений n, коэффициент охвата коррелированного блока равен коэффициенту Стьюдента с числом степеней свободы $\nu = n - 1$ [5], а стандартная неопределенность блока определяется по формуле (1) или методом приведения.

2. Все вклады неопределенности типа В в бюджете неопределенности можно объединить в единый вклад, суммарная стандартная $u_B(y)$ неопределенность которого оценивается по формуле:

$$u_B(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} u_B^2(y_i)}\ , \qquad (3)$$

где $u_B(y_i)$ − вклады неопределенности типа В в бюджете неопределенности.

Из приведенных положений следует, что общей моделью расчета эффективного числа степеней свободы будет следующее представление формулы Велча-Саттерсвейта [6]:

$$\nu_{eff} = \nu_A\left(\frac{u_A^2(y) + u_B^2(y)}{u_A^2(y)}\right)^2 = \nu_A\left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right)^2, \qquad (4)$$

где $\alpha = u_A(y)/u_B(y)$.

Поскольку формула (4) дает в общем случае дробные числа степеней свободы, для отыскания коэффициента охвата применялись выражения, полученные в работах [6, 4]:

$$t_{0,95}(\nu_{eff}) = \frac{2,348551}{1 - 1,45153 \cdot \exp(-0,576295 \cdot \nu_{eff})} \qquad (5)$$

для $1 \le \nu_{eff} \le 6$;

$$t_{0,95}(\nu_{eff}) = 1,96[1 + 1/(0,822 \cdot \nu_{eff} - 0,87)], \qquad (6)$$

для $\nu_{eff} > 6$.

Погрешность применения этих формул не превышает 1 %.

Для исследования погрешности оценивания коэффициента охвата по методике GUM был проведен численный эксперимент на основе ММК. В нем исследовалась композиция закона распределения Стьюдента с заданным числом степеней свободы, соответствующего суммарному вкладу неопределенности типа А, и нормального, равномерного и арксинусного законов распределения, соответствующих вкладам неопределенности типа В. Коэффициент охвата по методике GUM находился как коэффициент Стьюдента от эффективного числа степеней свободы, рассчитанного с применением выражений (4) – (6).

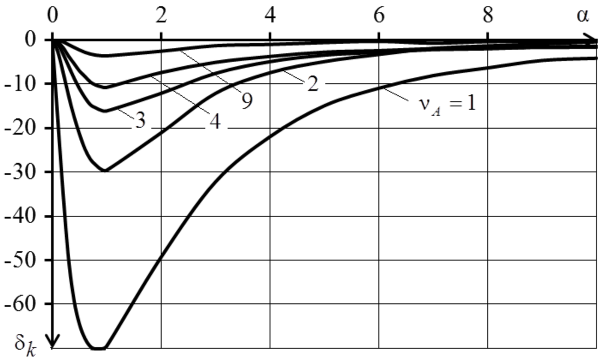
На рис. 1 показаны зависимости относительной погрешности δ_k оценивания коэффициента охвата по методике GUM от соотношения

$$\alpha = u_A(y)/u_B(y),$$

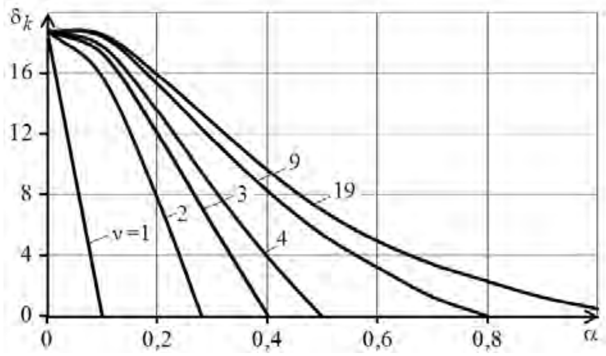
изменяющегося в диапазоне 0…10 для числа степеней свободы ν_A =1…19.

Из рисунков видно, что максимальная отрицательная погрешность определения коэффициента охвата по методике GUM для нормального закона распределения (рис. 1,а) достигает −70 % для $\nu_A = 1$; −30 % для $\nu_A = 2$; −16 % для $\nu_A = 3$; −11 % для $\nu_A = 4$. Исследования показали, что и для других законов распределения в этой области максимальная отрицательная погрешность имеет практически те же значения.

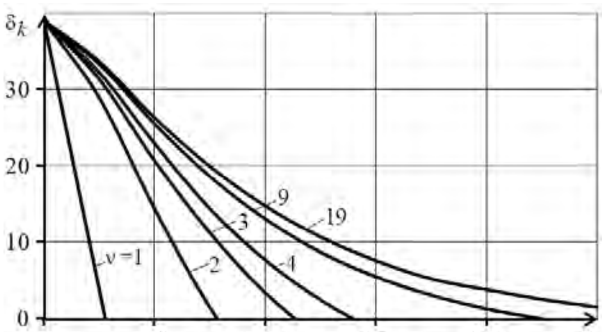
При малых значениях α для законов распределения, отличных от нормального, будет иметь место существенная положительная погрешность применения методики GUM: до 19 % в случае равномерного закона распределения (рис. 1, б) и до 39 % в случае распределения по закону арксинуса (рис. 1, в).



а – нормальный закон



б – равномерный закон



в – закон арксинуса

Рис. 1. Зависимости относительной погрешности δ_k, % оценивания коэффициента охвата по методике GUM для разных законов распределения вкладов типа В

Такие существенные значения погрешностей оценивания коэффициента охвата и расширенной неопределенности ставят задачу получения достоверных оценок коэффициента охвата.

Вычисление достоверных значений коэффициента охвата

Для решения этой задачи была использована методика, описанная в работе [8].

При учете вкладов неопределенностей обоих типов значение коэффициента охвата определяется по формуле:

$$k = \sqrt{\frac{U_A^2 + U_B^2}{u_A^2(y) + u_B^2(y)}}, \qquad (7)$$

где U_A, U_B − расширенные неопределенности типа А и В соответственно; $u_A(y)$, $u_B(y)$ − суммарные стандартные неопределенности типа А и В, определяемые по формулам (1) и (3), соответственно.

Для вычисления расширенной неопределенности типа В используется выражение:

$$U_B = k_B u_B(y), \qquad (8)$$

в котором значение коэффициента k_B определяется из табл. 2 [9].

В табл. 2 приведены значения коэффициента охвата при равномерно и нормально распределенных входных величинах.

Величина $u_2(y)/u_1(y)$ соответствует отношению второго по величине вклада неопределенности $u_2(y)$ к наибольшему вкладу неопределенности $u_1(y)$. При наличии вклада неопределенности, распределенного по треугольному закону, его представляют как композицию двух вкладов, распределенных по равномерному закону, причем неопределенность каждого вклада в $\sqrt{2}$ раз меньше неопределенности исходного вклада.

Таблица 2

Максимальные значения коэффициентов охвата для композиции равномерно и нормально распределенных входных величин

$\frac{u_2(y)}{u_1(y)}$	$u_н(y)/u_1(y)$										
	0	**0,1**	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**1**
0	**1,65**	**1,65**	**1,69**	**1,73**	**1,77**	**1,81**	**1,84**	**1,87**	**1,89**	**1,91**	**1,92**
0,1	**1,65**	1,68	1,7	1,74	1,78	1,82	1,85	1,87	1,89	1,91	1,92
0,2	**1,70**	1,73	1,75	1,78	1,81	1,84	1,86	1,88	1,9	1,91	1,92
0,3	**1,75**	1,8	1,81	1,82	1,84	1,86	1,88	1,89	1,91	1,92	1,93
0,4	**1,80**	1,85	1,85	1,86	1,87	1,88	1,89	1,91	1,92	1,92	1,93
0,5	**1,83**	1,88	1,89	1,89	1,9	1,9	1,91	1,92	1,92	1,93	1,94
0,6	**1,86**	1,91	1,91	1,91	1,91	1,92	1,92	1,93	1,93	1,93	1,94
0,7	**1,88**	1,92	1,92	1,92	1,92	1,93	1,93	1,93	1,94	1,94	1,94
0,8	**1,89**	1,93	1,93	1,93	1,93	1,93	1,93	1,94	1,94	1,94	1,94
0,9-1,0	**1,90**	1,94	1,94	1,94	1,94	1,94	1,94	1,94	1,94	1,94	1,94

Если нормально распределенные вклады типа *В* в бюджете неопределенности отсутствуют, для нахождения k_B используется левый столбец табл. 2:

($u_н(y)/u_1(y)$ =0).

Эта зависимость хорошо аппроксимируется выражением:

$$k = -0{,}3604\gamma^2 + 0{,}6754\gamma + 1{,}5831, \qquad (9)$$

в котором $\gamma = u_2(y)/u_1(y)$.

При наличии нормально распределенных вкладов неопределенности их объединяют в единый вклад с неопределенностью, рассчитанной в соответствии с законом распространения неопределенности (3).

Значения коэффициента охвата для отношения неопределенности нормально распределенного вклада к неопределенности наибольшего равномерно распределенного вклада $u_н(y)/u_1(y)$ при разных отношениях второго по величине равномерно распределенного вклада к наибольшему равномерно распределенному вкладу $u_2(y)/u_1(y)$ приведены в табл. 2.

В случае наличия только одного существенного вклада, распределенного по равномерному закону, необходимо использовать верхнюю строку табл. 2 ($u_2(y)/u_1(y)$ =0).

Эта зависимость хорошо аппроксимируется выражением:

$$k = -0{,}197\beta^2 + 0{,}5258\beta + 1{,}5947\,, \qquad (10)$$

в котором $\beta = u_н(y)/u_1(y)$.

Методом Монте-Карло была исследована погрешность применения рассмотренной методики. Для нормального и равномерного законов распределения относительная погрешность вычисления коэффициента охвата не превысила $\pm 6\%$ при изменении $\alpha = u_A(y)/u_B(y)$ в диапазоне 0…10 для числа степеней свободы ν_A=1…19.

Выводы

1. Исследована погрешность применения оценки коэффициента охвата на основе эффективного числа степеней свободы для оценивания расширенной неопределенности. Показано, что ее экстремальное значение может достигать от -70 до 39 % в зависимости от применяемого закона распределения.

2. Рассмотрена методика, позволяющая определять достоверные оценки коэффициента охвата без применения ММК. Получены аппроксимирующие выражения для коэффициентов охвата композиции равномерных и нормальных законов распределения.

3. С помощью ММК была исследована погрешность применения предложенной методики. Для нормального и равномерного законов распределения относительная погрешность вычисления коэффициента охвата не превысила $\pm 6\%$ при изменении

$$\alpha = u_A(y)/u_B(y)$$

в диапазоне 0…10 для числа степеней свободы ν_A=1…19.

Список литературы

1. ГОСТ Р 54500.3−2011/Руководство ИСО/МЭК 98-3:2008 «Неопределенность измерения. Часть 3. Руководство по выражению неопределенности измерения». М.: ФГУП «Стандартинформ», 2012 − 101 с.

2. ГОСТ Р 54500.3.1−2011/Руководство ИСО/МЭК 98-3:2008/Дополнение 1:2008 «Неопределенность измерения. Часть 3. Руководство по выражению неопределенности измерения. Дополнение 1. Трансформирование распределений с использованием метода Монте-Карло». М.: ФГУП «Стандартинформ», 2012 − 84 с.

3. Захаров И.П. Применение метода Монте-Карло для оценивания неопределенности в измерениях / И.П. Захаров, С.В. Водотыка // Системи обробки інформації. – Х.: ХУПС, 2008. – Вип. 4 (71). – С. 34 – 37.

4. Захаров И.П. Композиция законов распределения Стьюдента // Системи обробки інформації. – 2005. – Вип. 8. – С. 28–35.

5. Захаров И.П. Учет корреляции при оценивании неопределенности результатов многократных измерений // Системи обробки інформації. – 2005. – Вип. 9. – С. 43–45.

6. ДСТУ-Н РМГ 43:2006. Метрологія. Застосування «Руководства по выражению неопределенности измерений». – К.: Держспоживстандарт України, 2006. – 20 с.

7. Захаров И.П. Расчет значений коэффициента Стьюдента для дробного числа степеней свободы / И.П. Захаров, Е.А. Климова // Системи обробки інформації. – Х.: ХУПС, 2010. – Вип. 4 (85). – С. 43-47.

8. Захаров И.П. Исследование и повышение достоверности интервальных оценок точности прямых многократных измерений / И.П. Захаров // АСУ и приборы автоматики. 2005. – Вып. 132. – С. 106-109.

9. Захаров И.П. Расчет коэффициента охвата для нормально и равномерно распределенных составляющих неопределенности / И.П. Захаров // Системи обробки інформації. – Х.: ХУПС, 2005. – Вип. 6. – С. 52–57.

Поступила в редколлегию 1.03.2013

Рецензент: д-р техн. наук, проф. И.В. Руженцев, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

ОТРИМАННЯ ДОСТОВІРНОЇ ОЦІНКИ КОЕФІЦІЄНТУ ПОКРИТТЯ ПІД ЧАС СКЛАДАННЯ БЮДЖЕТУ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ВИМІРЮВАНЬ

І.П. Захаров, К.А. Клімова, Т.В. Чуніхіна

Аналізуються результати порівняння значень коефіцієнту покриття для композиції закону розподілу Стьюдента з рівномірним, нормальним та арксинусним законами разподілу, які отримані методом Монте-Карло та за допомогою ефективного числа степів свободи. Розглянуто методику отримання розширеної невизначеності та коефіцієнту покриття з урахуванням законів розподілу вкладів невизначеності за типом В без використання метода Монте-Карло.

Ключові слова: *розширена невизначеність вимірювання, коефіцієнт покриття, метод Монте-Карло, коефіцієнт Стьюдента, ефективне число степенів свободи.*

OBTAINING OF THE TRUSTWORTHY ESTIMATION OF COVERAGE FACTOR AT DRAWING UP OF THE MEASUREMENTS UNCERTAINTY BUDGET

I.P. Zakharov, K.A. Klimova, T.V. Chunihina

Results of comparison of values of coverage factor for a composition of the t-distribution with uniform, normal and arcsine laws of distributions received by a Monte-Carlo simulation and by means of effective number of steppes of freedom are analyzed. A technique of obtaining of the expanded uncertainty and the coverage factor in view of the laws of distribution of contributions of uncertainty of type B without use of a Monte-Carlo simulation are considered.

Key words: *the expanded uncertainty in measurement, coverage factor, Monte-Carlo simulation, t- factor, effective degrees of freedom.*