УДК 006.91

И.П. Захаров, М.П. Сергиенко, Н.С. Шевченко, Н.В. Штефан

Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков

ТРАНСФОРМАЦИЯ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПРИ ПЕРЕСЧЕТЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ ИЗ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ЕДИНИЦ В АБСОЛЮТНЫЕ

Рассматривается трансформация законов распределений при пересчете результатов измерений из логарифмических единиц в абсолютные. Приводятся значения эксцессов и асимметрий трансформированных законов распределений. Исследуется влияние вида закона распределения входной величины на оценки неопределенности измерений.

Ключевые слова: *закон распределения, трансформация, неопределенность измерения, децибел.*

Введение

Проблема получения достоверного результата измерения и оценки его неопределенности при пересчете из логарифмических единиц (децибелов) в абсолютные возникает во многих отраслях науки и техники, использующих соответствующие средства измерительной техники (СИТ) [1]. Эта проблема возникает в связи с трансформацией закона распределения входной величины, выраженной в децибелах, при пересчете в выходную величину, выраженную в абсолютных единицах, что влечет за собой появление асимметрии и изменения границ результирующего закона.

Одними из основных вкладов неопределенности входной величины являются вклады типа *B*, источниками которых являются систематические погрешности СИТ. Чаще всего эти вклады являются доминирующими (или единственными) в бюджете неопределенности, при этом законы распределения вызывающих их систематических погрешностей принимаются, как правило, нормальными или равномерными.

Целью данной работы является исследование трансформации законов распределения входной величины при пересчете результатов измерений из децибелов в абсолютные единицы.

1. Исходные соотношения

Как известно, при пересчете величины z из децибелов в абсолютные единицы x, используется формула [1]

$$x = 10^{z/\alpha}, \tag{1}$$

где $\alpha = 10$ для энергетических величин и $\alpha = 20$ для силовых величин.

В соответствии с [2], плотность распределения вероятности величины x определяется по формуле

$$h(x) = f(g^{-1}(x))\frac{\partial g^{-1}(x)}{\partial x}, \tag{2}$$

где обратное преобразование (1)

$$g^{-1}(x) = z = \alpha \lg x = \alpha\frac{\ln x}{\ln 10}; \tag{3}$$

его частная производная по выходной величине

$$\frac{\partial g^{-1}(x)}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\alpha}{x\ln 10}; \tag{4}$$

плотность распределения входной величины

$$f(g^{-1}(x)) = f(z). \tag{5}$$

1.1. Нормальное распределение

Плотность распределения величины z определяется как

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}u_z} e^{-\frac{(z-m_z)^2}{2u_z^2}}, \tag{6}$$

где m_z и u_z – математическое ожидание и стандартная неопределенность входной величины z.

В соответствии с выражениями (2) – (5) плотность распределения выходной величины x будет иметь вид

$$h(x) = \frac{\alpha}{x\ln 10\sqrt{2\pi}\,u_z} e^{-\frac{(\alpha\lg x-m_z)^2}{2u_z^2}}. \tag{7}$$

Плотности распределения величин z и x, полученные методом Монте-Карло с использованием выборки из $N = 10^7$ значений, показаны на рис. 1.

Для исследования степени трансформации закона распределения при пересчете величины из децибелов в абсолютные единицы были получены значения асимметрии A_x и эксцесса E_x выходной величины. Исследования показали, что эти значения существенно превосходят значения аналогичных параметров для входной величины ($A_z = 0$, $E_z = 0$), при этом они не зависят от значения математического ожидания m_z, но зависят от u_z и α (рис. 2).

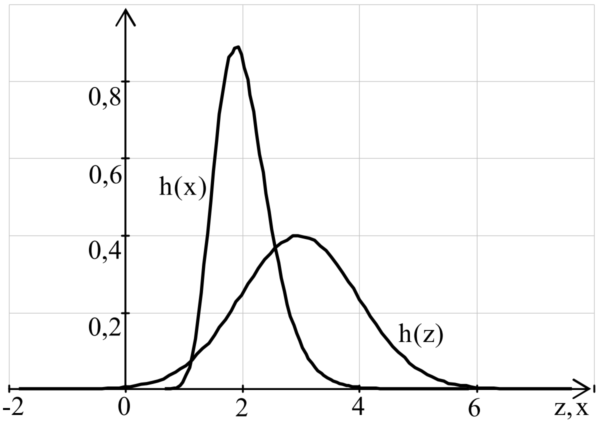
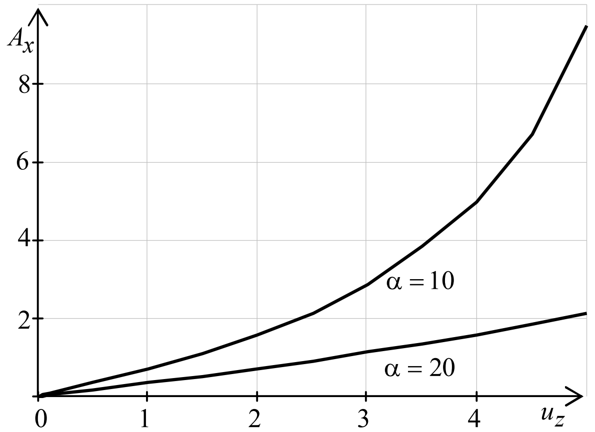
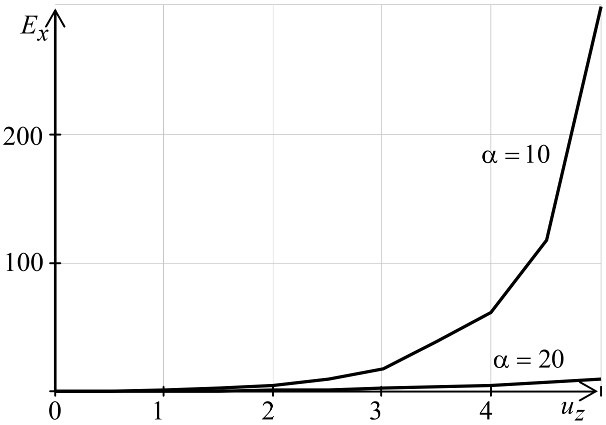


Рис. 1. Плотности распределений $h(z)$ и $h(x)$



а



б

Рис. 2. Зависимость асимметрии (а) и эксцесса (б) величины x от u_z и α для нормального закона

1.2. Равномерное распределение

В общем случае распределения величины z при равномерном распределении определяется как

$$f(g^{-1}(x)) = 1/(b_z - a_z), \qquad (8)$$

где a_z и b_z – верхняя и нижняя границы распределения величины z, которые можно выразить как $a_z = m_z - \sqrt{3}u_z$; $b_z = m_z + \sqrt{3}u_z$, где m_z и u_z – соответственно математическое ожидание и стандартная неопределенность величины z.

В соответствии с (2) – (5) и (8) плотность распределения выходной величины x будет иметь вид

$$h(x) = \frac{\alpha}{x\,2\sqrt{3}u_z \ln 10}. \qquad (9)$$

Плотности распределения величин z и x показаны на рис. 3.

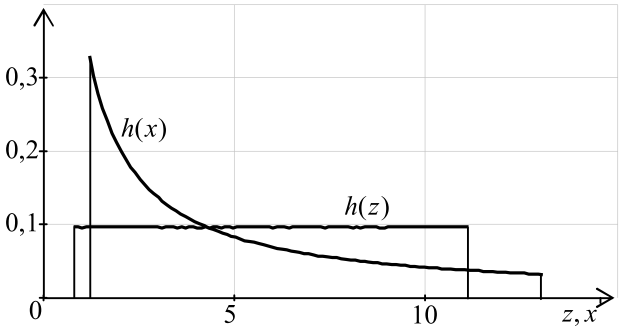
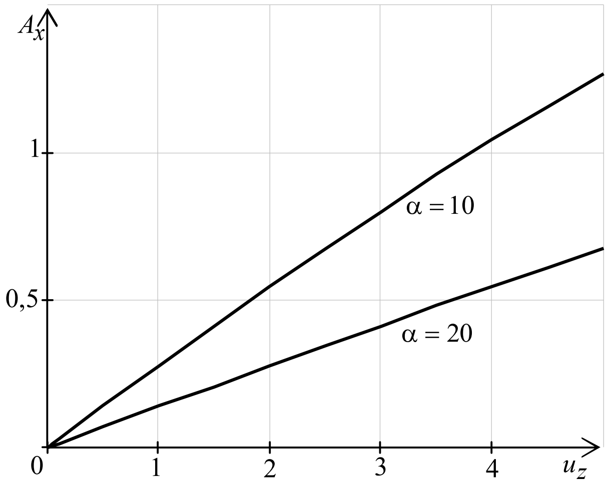
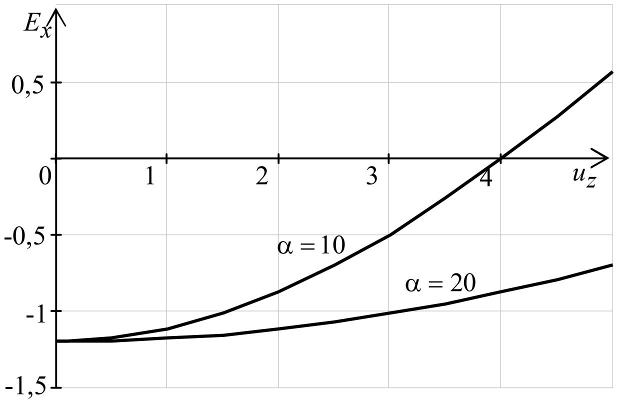


Рис. 3. Плотности распределений $h(z)$ и $h(x)$

Зависимость значений асимметрии A_x и эксцесса E_x выходной величины от u_z и α показаны на рис. 4.



а



б

Рис. 4. Зависимость асимметрии (а) и эксцесса (б) величины x от u_z и α для равномерного закона

Исследования показали, что эти значения существенно превосходят значения аналогичных параметров для входной величины ($A_z = 0$, $E_z = -1,2$), что свидетельствует о том, что результирующее распределение асимметричное и более островершинное по сравнению с распределением входной величины, при этом они не зависят от значения математического ожидания m_z , но зависят от СКО u_z и α .

2. Влияние трансформации закона распределения на оценку результата измерения

Асимметрия закона распределения абсолютной величины $h(x)$ приводит к смещению математического ожидания относительно величины $m_x^* = 10^{m_z/\alpha}$, пересчитанной по формуле (1).

В этом случае относительная погрешность определения математического ожидания m_x определяется по формуле

$$\delta(m_x) = \frac{m_x^* - m_x}{m_x} \cdot 100 = \frac{10^{m_z/\alpha} - m_x}{m_x} \cdot 100 . \quad (10)$$

Для нормального закона распределения $g(z)$, выражение для значения m_x имеет вид:

$$m_x = \frac{\alpha}{\ln 10 \sqrt{2\pi} u_z} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\alpha \lg x - m_z)^2}{2u_z^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \int_{-\infty}^{\infty} 10^{\frac{z}{\alpha}} e^{-\frac{(z-m_z)^2}{2\sigma_z^2}} dz . \quad (11)$$

Методом Монте-Карла с применением численного интегрирования была рассчитана зависимость $\delta(m_x)$ от u_z для разных α (рис. 5)

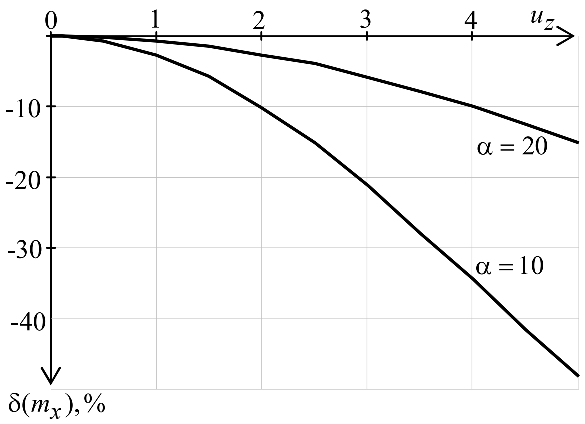


Рис. 5. Зависимость погрешности $\delta(m_x)$ от u_z для нормального закона распределения

Для равномерного закона распределения $g(z)$ **,** выражение для значения m_x имеет вид:

$$m_x = \frac{\alpha}{(b_z - a_z)\ln 10} \int_{10^{a_z/\alpha}}^{10^{b_z/\alpha}} dx =$$

$$= m_x^* \frac{\alpha\left(10^{\sqrt{3}u_z/\alpha} - 10^{-\sqrt{3}u_z/\alpha}\right)}{2\sqrt{3}u_z \ln 10} . \quad (12)$$

Подставляя (12) в (10), получаем зависимость относительной погрешности определения математического ожидания m_x от u_z для разных α (рис. 6).

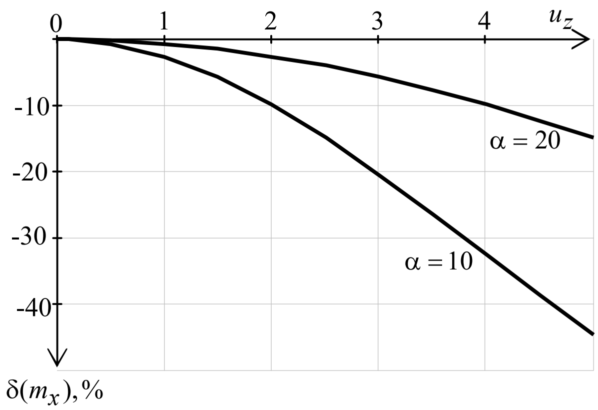


Рис. 6. Зависимость погрешности $\delta(m_x)$ от u_z для равномерного закона распределения

Следует отметить, что погрешности $\delta(m_x)$ не зависят от соотношения $\beta = \sigma_z / m_z$ для обоих законов распределения. Сравнение рис. 5 и 6 показывает, что они незначительно отличаются при больших значениях u_z , поэтому выражение (12) или его аппроксимация (13) может применяться для определения исправленного результата измерения величины m_x :

$$m_x = \begin{cases} 10^{\frac{m_z}{10}} (1{,}0047 - 0{,}0133\, u_z + 0{,}0327\, u_z^2),\ \alpha = 10; \\ 10^{\frac{m_z}{20}} (1{,}0003 - 0{,}0008\, u_z + 0{,}007\, u_z^2),\ \ \alpha = 20. \end{cases} \quad (13)$$

Неопределенность его использования будет определяться неопределенностями оценки m_z от u_z .

3. Влияние трансформации закона распределения на оценку стандартной неопределенности измерения

Оценка стандартной неопределенности величины x определяется по формуле:

$$u_x = \sigma_x = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 \cdot h(x) dx} . \quad (14)$$

Для нормального закона распределения оценка u_x будет равна:

$$u_x = \sqrt{\frac{\alpha}{\ln 10 \sqrt{2\pi} u_z} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x - m_x)^2}{x} e^{-\frac{(\alpha \lg x - m_z)^2}{2u_z^2}} dx} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2\pi} u_z} \int_{-\infty}^{\infty} \left(10^{z/A} - m_x\right)^2 e^{-\frac{(z - m_z)^2}{2u_z^2}} dz} , \quad (15)$$

Зависимость стандартной неопределенности u_x от u_z, рассчитанная по формуле (15) методом Монте-Карло, показана на рис. 7.

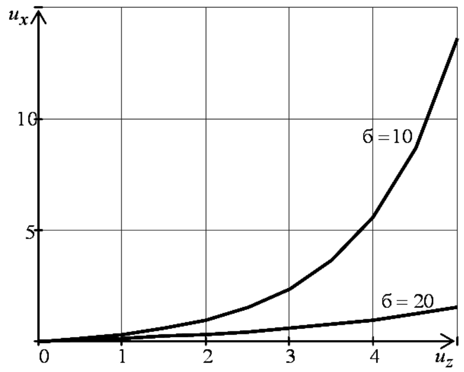


Рис. 7. Зависимость стандартной неопределенности u_x от u_z для нормального закона распределения

Зависимость u_x от u_z для $\alpha = 20$ может быть аппроксимирована выражением:

$$u_x = 0,0492u_z^2 + 0,0479u_z + 0,0106. \quad (16)$$

Для равномерного закона распределения оценка u_x может быть определена в явном виде:

$$u_x = \left[\frac{\alpha\left(m_x^*\right)^2}{4\sqrt{3}u_z \ln 10}\left(10^{2\sqrt{3}u_z/\alpha} - 10^{-2\sqrt{3}u_z/\alpha} - 4m_x m_x^* \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times\left(10^{\sqrt{3}u_z/\alpha} - 10^{-\sqrt{3}u_z/\alpha}\right) + 4m_x^2\left(\sqrt{3}u_z/\alpha\right)\ln 10\right)\right]^{1/2}. \quad (17)$$

Зависимость стандартной неопределенности u_x от u_z, рассчитанная по формуле (17), показана на рис. 8.

Зависимость u_x от u_z для $\alpha = 20$ может быть аппроксимирована выражением:

$$u_x = 0,0381u_z^2 + 0,0725u_z + 0,0065. \quad (18)$$

Выводы

В результате проведенного исследования были получены следующие результаты:

1) получены выражения для плотностей вероятности трансформированных нормального и равномерного законов распределения входных величин при их преобразовании из децибел в абсолютные величины;

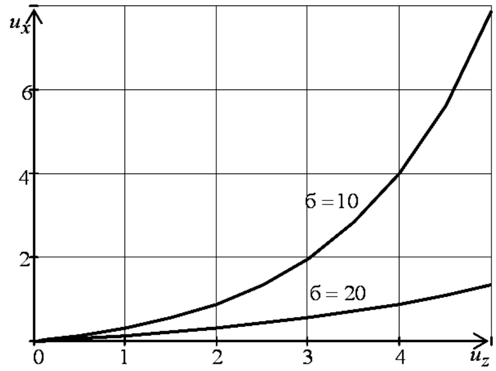


Рис. 8. Зависимость стандартной неопределенности u_x от u_z для равномерного закона распределения

2) показаны асимметричность и увеличенная островершинность результирующего распределения относительно распределения входной величины для рассматриваемых законов распределения;

3) проведена оценка смещения математического ожидания при преобразовании из децибел в абсолютные величины и получены выражения для ее коррекции;

4) проведена оценка стандартной неопределенности выходной величины при преобразовании входной величины из децибел в абсолютные величины, приведены аппроксимирующие выражения.

Список литературы

1. Захаров И.П. Особенности оценивания неопределенности измерения при выражении входных величин в децибелах / И.П. Захаров, Н.С. Шевченко / Системи обробки інформації. – Х.: ХУПС, 2009. – Вип. 5 (79). – С. 29 – 32.

2. Захаров И.П. Теоретическая метрология / И.П. Захаров – Х.: ХНУРЭ, 2000. – 176 с.

Поступила в редколлегию 4.02.2013

Рецензент: д-р техн. наук, проф. И.В. Руженцев, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков..

ТРАНСФОРМАЦІЯ ЗАКОНІВ РОЗПОДІЛУ ПІД ЧАС ПЕРЕРАХУВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАНЬ З ЛОГАРИФМІЧНИХ ОДИНИЦЬ В АБСОЛЮТНІ

І.П. Захаров, М.П. Сергієнко, Н.С. Шевченко,Н.В. Штефан

Розглядаються трансформація законів розподілу під час перерахування результатів вимірювань з логарифмічних одиниць в абсолютні. Наводяться значення ексцесів та асиметрії трансформованих законів розподілу. Досліджується вплив закону розподілу вхідної величини на оцінки невизначеності вимірювань.

Ключові слова: *закон розподілу, трансформація, невизначеність вимірювань, децибел.*

TRANSFORMATION OF THE LAWS OF DISTRIBUTIONS DURING THE MEASURING RESULTS RECALCULATION FROM LOGARITHMIC INTO ABSOLUTE UNITS

I.P. Zakharov, M.P. Sergienko, N.S. Shevchenko,N.V. Shtefan

Transformation of laws of distributions at recalculation of results of measurements from logarithmic units in the absolute is considered. Values of kurtosis and sequences of the transformed laws of distributions are resulted. Influence of the law of distribution of entrance value on estimations of measurements uncertainty is investigated.

Keywords: *distribution law, transformation, uncertainty in measurement, decibel.*