УДК 681.2.088

А.М. Коцюба[1], В.П. Заїка[2]

[1] Інститут підвищення кваліфікації фахівців в галузі технічного регулювання та споживчої політики Одеської державної академії технічного регулювання та якості, Київ
[2] ДП «Український НДНЦ проблем стандартизації, сертифікації та якості», Київ

ОЦІНЮВАННЯ СТАНДАРТНОЇ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ЗА ТИПОМ А ЗА НАЯВНОСТІ ЛІНІЙНОГО ТРЕНДУ РЕЗУЛЬТАТІВ ПОВТОРНИХ СПОСТЕРЕЖЕНЬ

Робота присвячена дослідженню впливу лінійного тренду результатів повторних спостережень на статистичну оцінку стандартної невизначеності, оцінену за цими результатами. Отримана аналітична формула, яка описує внесок тренду. Показано, що за значного обсягу вибірки величина внеску пропорційна часу отримання вибірки. Встановлений мінімальний обсяг вибірки, який дозволяє мінімізувати внесок лінійного тренду в статистичну оцінку стандартного відхилення. Визначений критерій неістотності систематичного лінійного дрейфу результатів повторних спостережень при оцінюванні стандартної невизначеності за типом А.

Ключові слова: *невизначеність вимірювання, статистична оцінка, лінійний тренд, стандартна невизначеність.*

Постановка задачі

Оцінка невизначеності за типом А за формулою

$$u_A = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 \Big/ (n-1)},$$

де $x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n$ – результати повторних спостережень, часто використовується для оцінки внеску в невизначеність вимірювання випадкових ефектів [1]. Дана оцінка буде описувати зазначений внесок лише в тому випадку, якщо мінливість результатів в серії обумовлена тільки випадковими ефектами, тобто за відсутності їх систематичного дрейфу [2]. Для надійності оцінки серія повинна бути достатнього обсягу. Однак за значного обсягу серії забезпечити відсутність дрейфу систематичної похибки досить складно навіть за жорсткої стабілізації умов проведення вимірювань. Таким чином, часто розглядувана оцінка буде містити внесок, обумовлений змінною систематичною похибкою. **Темою даної роботи** є дослідження впливу лінійного тренду результатів повторних спостережень на статистичну оцінку стандартної невизначеності, оцінену за цими результатами.

Основна частина

Розглянемо випадок проведення серії повторних спостережень, під час яких спостерігається лінійно змінна систематична похибка. Нехай є ряд $x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n$ результатів повторних спостережень, отриманих в одній серії вимірювань через приблизно однакові проміжки часу τ за умов лінійного тренду, тобто кожен i-й результат спостереження x_i обтяжений систематичною похибкою $\Delta_i = k\tau(i-1)$, де k – постійний коефіцієнт. Тоді результат i-го спостереження може бути представлений як $x_i = x_{іст.} + k\tau(i-1) + \overset{0}{\Delta}_i$, де $\overset{0}{\Delta}_i$ - випадкова похибка даного результату; $x_{іст.}$ – істинне (опорне) значення, Постійну систематичну похибку до уваги не приймаємо, оскільки вона не призводить до мінливості отриманих результатів, а отже не даватиме внеску в статистичну оцінку стандартного відхилення.

Оцінимо за наявними результатами дисперсію ряду. Середнє значення з результатів даного ряду:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n}\left(x_{іст.} + k\tau(i-1) + \overset{0}{\Delta}_i\right)\Big/ n = \sum_{i=1}^{n} x_{іст.} \Big/ n +$$

$$k\tau\sum_{i=1}^{n}(i-1)\Big/ n + \sum_{i=1}^{n}\overset{0}{\Delta}_i \Big/ n = x_{іст.} + \frac{k\tau(n-1)}{2}.$$

Середнім значенням випадкових похибок, як відомо, за достатньо значного обсягу вибірки можна знехтувати через їх відому властивість, що і було зроблено. Розрахуємо статистичну оцінку дисперсії вибірки за класичною формулою:

$$u_A^2(x) = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 \Big/ (n-1) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(x_{іст.} + k\tau(i-1) + \overset{0}{\Delta}_i - x_{іст.} - \frac{k\tau(n-1)}{2}\right)^2 \Big/ (n-1) =$$

$$= \left[k^2\tau^2\sum_{i=1}^{n}\left(i - \frac{n+1}{2}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(\overset{0}{\Delta}_i\right)^2\right]\Big/ (n-1),$$

де враховано, що $\sum_{i=1}^{n}(2i-n-1)\cdot\overset{0}{\Delta}_i \Big/ (n-1) \approx 0$.

Якщо прийняти до уваги, що дисперсія випадкової похибки ряду результатів

$$\sigma^2\left(\overset{0}{\Delta}_i\right) \approx \sum_{i=1}^{n}\left(\overset{0}{\Delta}_i\right)^2 \Big/ (n-1)$$

та $$\sum_{i=1}^{n}\left(i-(n+1)/2\right)^2=\left(n^2+n\right)(n-1)\Big/12,$$

то $$u_A^2(x)=S_c^2(x)+\sigma^2\begin{pmatrix}0\\ \Delta_i\end{pmatrix},$$

де $$S_c^2(x)=k^2\tau^2\left(n^2+n\right)\Big/12.$$

Величина k може бути обчислена за результатами цієї ж вибірки, наприклад, за методом найменших квадратів.

Отже, як показують розрахунки, статистична оцінка дисперсії ряду результатів повторних спостережень за умови їх лінійного тренду містить дві складові – оцінку дисперсії, обумовлену власне випадковими ефектами, та складову, обумовлену лінійним трендом, тобто в статистичну оцінку дисперсії дає внесок також змінна систематична похибка, що, в принципі, очікувалося. Проведемо аналіз внеску в статистичну оцінку стандартного відхилення лінійного тренду, який дається виразом:

$$S_c(x)=k\tau n\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)\Big/12}. \qquad (1)$$

Розглянемо ряд випадків.

1. $n=n_0$, тобто обсяг вибірки, яку необхідно отримати, заданий. Як правило, він задається, виходячи з потреби досягнення необхідної точності під час оцінювання параметру статистичним шляхом. З (1) випливає, що внесок лінійного тренду зростає прямо пропорційно проміжку часу між окремими спостереженнями, причому за значних обсягів вибірки це зростання пропорційне часу отримання вибірки. Очевидно, пояснюється це тим, що зі збільшенням часу отримання серії результатів спостерігається прямо пропорційний часу приріст систематичної похибки. Таким чином, для мінімізації внеску тренду необхідно мінімізувати проміжок часу між окремими спостереженнями. Однак цей проміжок, по-перше, не може бути меншим за час одного спостереження, а, по-друге, час між окремими спостереженнями повинен бути таким, щоб окремі реалізації випадкової похибки були некорельованими [2]. Звідси зрозуміло, що проміжки часу між спостереженнями не можна зменшувати наскільки завгодно.

2. $\tau=\tau_0$, тобто проміжки часу між окремими спостереженнями задані і постійні. Тоді (1) можна представити у вигляді: $S_c(x)=k\tau_0\sqrt{\left(n^2+n\right)\Big/12}$.

Як видно з формули, внесок лінійного тренду в статистичну оцінку стандартного відхилення зростає зі збільшенням обсягу вибірки. Це знову ж обумовлено зростанням загального часу отримання вибірки. Таким чином, для мінімізації цього внеску необхідно зменшувати обсяг вибірки, однак зменшення обсягу вибірки негативно впливає на точність оцінки власне стандартного відхилення випадкової похибки. Ця проблема може бути вирішена оптимізацією обсягу вибірки в тому разі, коли відома залежність точності статистичної оцінки стандартного відхилення випадкової похибки від обсягу вибірки за умови відсутності тренду, однак в даній роботі це питання не розглядається.

3. Добуток $\tau\cdot n=\text{const}$. Ця умова рівнозначна заданню часу отримання вибірки T_0. З урахуванням, що $\tau=T_0/(n-1)$, (1) подамо у вигляді:

$$S_c(x)=k\frac{T_0}{n-1}n\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)\Big/12}=\frac{kT_0}{\sqrt{12}}\sqrt{\frac{n^2+n}{(n-1)^2}}. \qquad (2)$$

Звідси витікає, що за незначних обсягів вибірок спостерігається залежність $S_c(x)$ від числа повторних спостережень – зі збільшенням обсягу вибірки внесок від лінійного тренду зменшується. Максимальне значення $S_c(x)$ становитиме при $n=2$:

$$S_c^{max}(x)=kT_0\big/\sqrt{2}.$$

За умови $n\to\infty$ значення аналізованого внеску прямує до деякого постійного значення $S_c^{min}(x)=kT_0\big/\sqrt{12}$, яке залежить лише від часу отримання вибірки. Це є мінімальне значення внеску за час T_0 в статистичну оцінку стандартного відхилення випадкової похибки за рахунок лінійного дрейфу результатів повторних спостережень. Відношення $S_c^{max}(x)\big/S_c^{min}(x)\approx 2{,}45$. Отже, за рахунок вибору числа повторних спостережень внесок тренду може бути зменшений більше ніж вдвічі.

Оцінимо кількість результатів повторних спостережень, які повинні бути виконані за відведений на вимірювання час, щоб внесок від лінійного тренду був мінімальний. Так, згідно з [3] при відкиданні в стандартному відхиленні «зайвих» цифр похибка заокруглення не повинна перевищувати 5 відсотків. Тоді умова достатнього обсягу вибірки матиме вигляд:

$$S_c(x)-S_c^{min}(x)\le 0{,}05\cdot u_A(x)$$

З урахуванням виразу $S_c^{min}(x)=kT_0\big/\sqrt{12}$ одержимо, що $S_c(x)\le\frac{kT_0}{\sqrt{12}}\cdot\left(\frac{0{,}05\cdot\sqrt{12}\cdot u_A(x)}{kT_0}+1\right)$.

Якщо ввести позначення $\gamma=u_A(x)/kT_0$ та врахувати (2), матимемо

$$\frac{n^2+n}{(n-1)^2}\le\left(\sqrt{0{,}03}\cdot\gamma+1\right)^2.$$

Результатом розв'язку цієї нерівності буде:

$$n_{min}=\frac{2\cdot\left(\sqrt{0{,}03}\cdot\gamma+1\right)^2+1+\sqrt{8\left(\sqrt{0{,}03}\cdot\gamma+1\right)^2+1}}{2\cdot\left(\left(\sqrt{0{,}03}\cdot\gamma+1\right)^2-1\right)}.$$

Знайдемо межі, в яких змінюється γ .

Нижнє граничне значення знайдемо з умови $u_A(x) = S_c^{min}(x)$: $\gamma_н = 0{,}3$. Верхнє граничне значення, як показано нижче з умови неістотності дрейфу, становить 2,2. Таким чином, $0{,}3 < \gamma < 2{,}2$. Мінімальні значення обсягу вибірки n_{min}, достатні для мінімізації внеску від систематичного лінійного дрейфу, в залежності від відношення $u_A(x)/kT_0$ наведені в табл. 1.

Таблиця 1

Мінімальне значення обсягу вибірки n_{min} в залежності від відношення $u_A(x)/kT_0$

$u_A(x)/(kT_0)$	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
n_{min}	30	23	19	16	14	12	11
$u_A(x)/(kT_0)$	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2
n_{min}	10	8	7	7	6	6	5

Отже, подальше збільшення кількості спостережень може бути виправдане лише необхідністю підвищення точності внеску від випадкової похибки в стандартне відхилення.

Звертає на себе увагу той факт, що вираз для мінімального значення стандартного відхилення тренду за значного обсягу вибірки формально тотожний формулі для розрахунку стандартного відхилення рівномірно розподіленої величини з шириною основи закону розподілу, яка рівна приросту систематичної похибки kT за час вимірювань. Така подібність є невипадковою, а обумовлена лінійним законом часової залежності систематичної похибки результатів повторних спостережень та тим, що окремі спостереження проводилися через однакові проміжки часу, тобто моменти отримання результатів повторних спостережень є, фактично, вибірками із рівномірного закону розподілу.

Знання величини внеску лінійного тренду результатів в статистичну оцінку стандартного відхилення дає змогу визначити критерій неістотності дрейфу. Нехай α - доля стандартної невизначеності типу А, якою можна знехтувати. В такому разі умова неістотності дрейфу матиме вигляд:

$$u_A(x) - u_A^*(x) \le \alpha \cdot u_A(x),$$

де $u_A^*(x)$ – стандартне відхилення, обумовлене виключно впливом випадкових ефектів, звідси отримаємо: $\left(u_A^*(x)\right)^2 \ge (1-\alpha)^2 \cdot u_A^2(x)$.

Взявши до уваги, що

$$\left(u_A^*(x)\right)^2 = u_A^2(x) - S_c^2(x),$$

та врахувавши (1), отримаємо:

$$\sqrt{\frac{12\cdot\left(2\alpha-\alpha^2\right)}{n^2+n}} \cdot u_A(x) \ge k\cdot\tau.$$

З урахуванням, що $\tau = T/(n-1)$, критерій неістотності дрейфу набуде вигляду:

$$\frac{u_A(x)}{kT} \ge \sqrt{\frac{n^2+n}{12\cdot\left(2\alpha-\alpha^2\right)(n-1)^2}}.$$

Якщо $\alpha = 0{,}05$, то

$$\frac{u_A(x)}{kT} \ge 0{,}924\cdot\sqrt{\frac{n^2+n}{(n-1)^2}}.$$

При $n = 2$ умова неістотності внеску дрейфу набуває вигляду

$$\frac{u_A(x)}{kT} \ge 2{,}26,$$

в той час як при $n >> 1$

$$\frac{u_A(x)}{kT} \ge 1.$$

Висновки

1. Досліджено вплив лінійного тренду результатів повторних спостережень на статистичну оцінку стандартного відхилення і отримана формула, яка аналітично описує величину внеску від зазначеного тренду.

2. Показано, що за часу отримання вибірки, який істотно перевищує інтервал між двома спостереженнями, величина внеску тренду в статистичну оцінку стандартного відхилення прямо пропорційна цьому часу.

3. Визначено мінімальне значення обсягу вибірки, яке за фіксованого часу її отримання забезпечує мінімум внеску лінійно залежної систематичної похибки в статистичну оцінку стандартного відхилення ряду результатів повторних спостережень.

4. Визначено критерій неістотності лінійного дрейфу під час оцінювання стандартної невизначеності типу А.

Список літератури

1. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement: First edition. – ISO, Switzerland, 1993.

2. Земельман М.А. Метрологические основы технических измерений / М.А. Земельман. – М.: Издательство стандартов, 1991. – 228 с.

3. ДСТУ ГОСТ 8.009:2008. ГСИ. Нормируемые метрологические характеристики средств измерений (ГОСТ 8.009-84, IDT).

Надійшла до редколегії 19.02.2013

Рецензент: д-р техн. наук, проф. І.П. Захаров, Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків.

ОЦЕНКА СТАНДАРТНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ПО ТИПУ А ПРИ НАЛИЧИИ ЛИНЕЙНОГО ТРЕНДА РЕЗУЛЬТАТОВ ПОВТОРНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

А.Н. Коцюба, В.П. Заика

Работа посвящена исследованию влияния линейного дрейфа результатов повторных наблюдений на статистическую оценку стандартной неопределенности, рассчитанную по этим результатам. Получена аналитическая формула, которая описывает вклад дрейфа. Показано, что при значительном объеме выборки значение вклада пропорционально времени получения выборки. Установлен минимальный объем выборки, который позволяет минимизировать вклад линейного дрейфа в статистическую оценку стандартного отклонения. Определен критерий несущественности систематического линейного дрейфа результатов повторных наблюдений при оценивании стандартной неопределенности по типу А.

Ключевые слова: *неопределенность измерения, статистическая оценка, линейный дрейф, стандартная неопределенность.*

EVALUATION OF TYPE A STANDARD UNCERTAINTY IN THE PRESENCE OF A LINEAR TREND OF REPEATED OBSERVATIONS RESULTS

A.M. Kotsuba, V.P. Zaika

The paper is devoted to research of the linear drift influence of repeated observations results on the statistical evaluation of the standard uncertainty calculated from these results. The analytical formula which describes the drift contribution is obtained. It is shown, that for significant volume sample the contribution value is proportional to the time of obtaining the sample. The minimal sample volume which allows to minimize the linear drift contribution to a statistical evaluation of a standard deviation is established. The irrelevance criterion of the regular linear drift of repeated observations results in the type A standard uncertainty evaluation is determined.

Keywords: *the measurement uncertainty, the statistical evaluation, the linear drift, the standard uncertainty.*