

УДК 681.142

О.Ю. Редьога, Н.А. Яремчук

Національний технічний університет України «КПІ», Київ

НЕВИЗНАЧЕНІСТЬ ВСТАНОВЛЕННЯ ШКАЛИ ПОРЯДКУ, СПОСОБИ ЇЇ ЗМЕНШЕННЯ І ВРАХУВАННЯ ПРИ ОТРИМАННІ РЕЗУЛЬТАТУ ВИМІРЮВАННЯ

В роботі розглянуто процедуру оцінювання невизначеності встановлення вербальної і комбінованої (гібридної) шкали порядку, і шляхи зменшення цієї невизначеності при об'єднанні результатів арифметизації і калібрування. Наведено спосіб оцінювання невизначеності одноразового та багаторазового вимірювання з урахуванням неточності встановлення шкали порядку за композицією вектору вхідних даних і матриці відповідності шкали.

Ключі слова: шкала порядку, невизначеність встановлення шкали порядку.

Вступ

Шкали порядку (ординальні шкали) – це шкали властивостей, що проявляються у відношеннях еквівалентності і порядку. Але для будь-якого типу шкал (найменувань, порядку, інтервалів) можна виділити сильні шкали (ті, що наближаються до більш досконалих) і слабкі. Тому в шкалах порядку виділено асоціативні шкали порядку (що наближаються до шкал інтервалів) і шкали квазіпорядку (що наближаються до шкал найменувань). В асоціативних шкалах з'являється обмежене відношення комбінування між інтервалами, а в шкалах квазіпорядку визначено відношення порядку між класами еквівалентності.

Для шкал порядку повинна бути складена специфікація шкали, на відміну від метричних шкал, що можуть бути специфіковані стандартизованими визначеннями одиниць вимірювання з додатковими визначеннями особливих точок шкали. Для шкал

порядку повинен бути визначений гомоморфізм відображення властивостей фізичних або нефізичних об'єктів формальними (символьними, вербальними або числовими) об'єктами з встановленими елементами шкали: нулем, точками шкали, класами еквівалентності, тощо [1].

Шкали порядку можуть бути неперервними і дискретними [3], символьними (зокрема, вербальними) і числовими. Числові шкали можуть бути повністю числовими або умовно числовими [2]. Повністю числовими називають числові асоціативні шкали порядку. Для цих шкал припускають наявність функції переведення, за допомогою якої можна переводити отримані числові дані в шкали, еквівалентні первісній шкалі порядку. На їх основі можуть бути побудовані нечіткі шкали порядку. В певних випадках формулюється оператор для збирання чи об'єднання отриманих даних. В умовно числових шкалах, або рангових шкалах, числа на шкалі – це просто номери, які не можна застосову-

вати для об'єднання даних або для обчислення відстані між ними.

Символьні або вербальні шкали порядку представляють собою впорядковані символи або назви точок шкали, що відображають прояви властивості. Недоліком таких шкал є те, що за їх допомогою не завжди можна отримати релевантні емпіричні результати. Це обумовлено різними поняттями і уявленнями про вербальні рівні проявів властивості у різних експериментаторів, наприклад, для рівнів якості «Низький», «Середній», «Високий», тощо. Це означає, що в таких випадках потрібна додаткова інформація про рівні проявів за допомогою математичних, статистичних або нечітких моделей. За цих умов отримують комбіновану або гібридну шкалу, що по суті складається з двох шкал – вербальної (символьної) і числової. Прикладом гібридної шкали, що включає символічну шкалу, вербальну шкалу і повністю числову, є шкала рівня навченості ECTS (рис. 1). Прикладом гібридної шкали, що включає вербальну шкалу і умовно числову шкалу є шкала Лікерта (рис.2).

В шкалах порядку невизначеність вимірювання можна характеризувати розмахом за точками шкали

або класами еквівалентності [1], де клас еквівалентності це підмножина проявів вимірюваної властивості, що приймаються не розрізняються в шкалі вимірювань цієї властивості. Тому невизначеність відтворення або встановлення шкали порядку також можна оцінити за розмахом.

При цьому треба розрізняти два випадки: невизначеність встановлення символічної шкали порядку і невизначеність встановлення гібридної шкали порядку (або невизначеність встановлення арифметизованої шкали порядку).

Способи оцінювання невизначеності встановлення символічної шкали порядку розглянуто в [4]. Характеристикою ординальної шкали з $(m+1)$ -рівнями (1 – нижній рівень, $m+1$ - вищий рівень) є матриця « $m+1$ » на « $m+1$ » зі складовими P_{ij} ($i \leq m+1, j \leq m+1$), де P_{ij} - умовні ймовірності того, що об'єкт було віднесено до рівня j , в той час як дійсний (істинний) рівень i .

Матриця є стохастичною, тому що

$$\sum_{j=0}^{m+1} P_{ij} = 1, 1 \leq i \leq m+1.$$

Символьна шкала	A	B	C	D	E	F
Вербальна шкала	Відмінно	Дуже добре	Добре	Задовільно	Достатньо	Незадовільно
Числова шкала в балах	95-100	85-94	75-84	65-74	60-64	<60

Рис. 1. Подання гібридної шкали ECTS за складовими

Вербальна шкала	Зовсім не відповідний	Частково відповідний	Відповідний	Значно відповідний	Надзвичайно відповідний
Числова шкала	0	1	2	3	4

Рис. 2. Подання гібридної шкали Лікерта

Ідеальна матриця буде мати одиниці по діагоналі матриці. Реальна матриця характеризується розсіюванням ймовірностей вздовж діагоналі матриці. Як характеристику неточності матриці [4]

обрано норму Фробеніуса $\|E\|^2$:

$$G = \frac{\|E\|^2}{2(m+1)} = \frac{\sum_{i=0}^{m+1} \sum_{j=0}^{m+1} (P_{ij} - I_{ij})^2}{2(m+1)}, \quad (1)$$

де характеристика ідеальної матриці I_{ij} визначається як

$$I_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases}$$

Показник неточності G знаходиться в діапазоні від 0 до 1.

Зменшення норми Фробеніуса свідчить про більшу точність встановлення ординальної шкали.

Крім норми Фробеніуса автори роботи [5] використовують характеристику розсіювання за рядками або стовпцями матриці. Така характеристика розсіювання як звичайна дисперсія чи середнє квадратичне відхилення для ординальних шкал непридатна, тому використана міра розсіювання встановлена Blair і Lacy [6] для ординальних даних, що визначає як:

$$D = \frac{4}{m-1} \sum_{k=1}^{m-1} F_k (1 - F_k) \quad (2)$$

де F_k – кумулятивна відносна частота для k -го рівня. Значення D дорівнює 1, якщо дані поляризовані за ймовірністю (тобто, наприклад, $P_{11} = 0,5$; $P_{12} = 0,5$) і це максимальне значення, тобто $0 \leq D \leq 1$.

Аналогічний аналіз відсутній для комбінованих (гібридних) шкал порядку або вербальних шкал з

арифметизацією, тому ці питання розглянуто у поданій роботі.

Крім того, слід відмітити, що норма Фробеніуса та дисперсія матриці за стовпцями та рядками характеризує неточність встановлення шкали, але ці характеристики безпосередньо непридатні для оцінювання невизначеності вимірювання за ординальною шкалою.

Постановка задачі

Оскільки такі характеристики неточності встановлення шкали порядку як норма Фробеніуса і дисперсія за кумулятивними ймовірностями матриць – стовпців і матриць – рядків не можуть бути безпосередньо використані для оцінки невизначеності результату вимірювання, далі подано спосіб оцінки невизначеності вимірювання за порядковою шкалою з урахуванням невизначеності встановлення шкали. Крім того є необхідність оцінки невизначеності встановлення комбінованої (гібридної) шкали порядку з аналізом можливих шляхів зменшення її невизначеності.

1. Оцінка невизначеності вимірювання за шкалою порядку з урахуванням невизначеності встановлення шкали

Вихідною характеристикою невизначеності встановлення шкали порядку є матриця $\|P_{ij}\|$, де $1 \leq i, j \leq m+1$ (рис 1, а). Якщо результат одноразового вимірювання відповідає точці j тоді для ідеальної шкали $i = j$, $P_{ij} = 1$. Якщо діагональні елементи матриці $\|P_{ij}\|$ менші за одиницю і матриця характеризується розсіюванням ймовірностей вздовж діагоналі, тоді з урахуванням невизначеності встановлення шкали результат вимірювання визначається j -м стовпцем матриці (рис. 3).

	$i = 1$	$i = 2$	\dots	$i = m + 1$
$j \rightarrow$	P_{1j}	P_{2j}	\dots	$P_{(m+1)j}$

Рис. 3. j -й стовпець матриці

Значення величини отримується за модою розподілу ймовірностей стовпця матриці, а невизначеність за точками шкали, що відповідають розмаху ймовірностей навколо моди або $P_{ij} > 0$.

Для одноразового вимірювання з невизначеністю та для багаторазового вимірювання вихідні дані є матрицею – рядком, тобто сукупністю точок j з відповідними ймовірностями P_j (або ступенями належності, якщо використовується нечітка оцінка). Тоді кінцевий результат, як матрицю – рядок за сукупністю точок i та ймовірностями P_i отримують за композицією (рис. 4):

$$P_i = P_j \circ P_{ij} = \bigvee_j (P_j \wedge P_{ij}) \quad (3)$$

де « \circ » – знак композиції.

Результати моделювання процедури вимірювання за шкалою порядку з різними значеннями розсіювання вихідних даних наведено на рис. 5 і в табл. 1.

За результатами проведених досліджень можна сформулювати наступні висновки:

- якщо характеристики розсіювання вихідних даних і матриці встановлення шкали сумірні (таб. 1, а), то невизначеність результату вимірювання відповідає розмаху складової з максимальним розсіюванням (рис. 5, а);
- якщо розсіювання вихідних даних переважає максимальне розсіювання за рядками матриці встановлення шкали (таб.1, б) то невизначеність результату вимірювання відповідає розмаху вихідних даних без врахування невизначеності встановлення шкали (рис. 5, б);

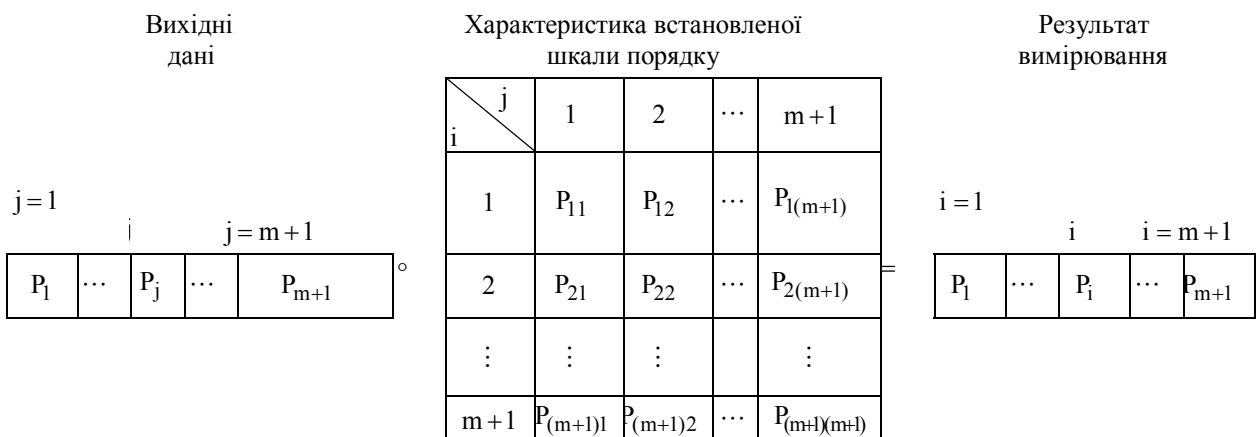


Рис. 4. Ілюстрація отримання результату вимірювання за шкалою порядку з урахуванням невизначеності вихідних даних і невизначеності встановлення шкали

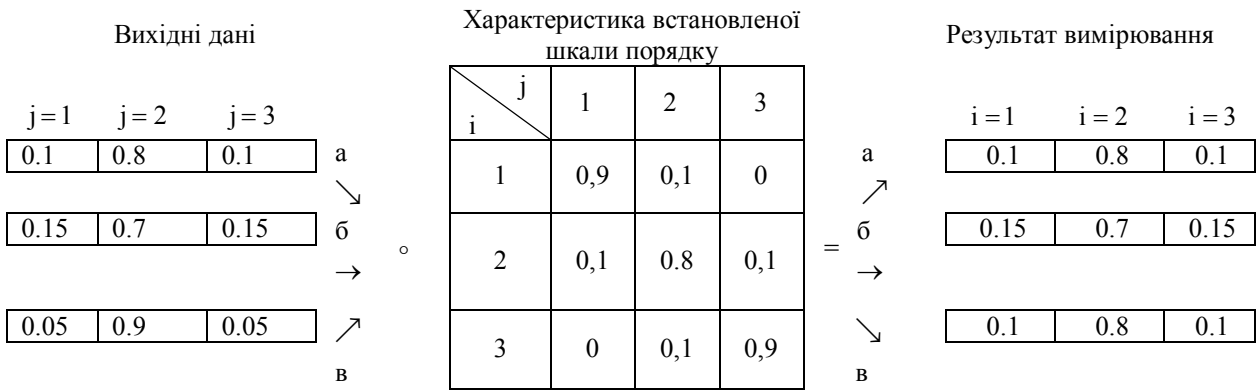


Рис. 5. Результати моделювання процедури отримання результату вимірювання з характеристикою невизначеності

Таблиця 1
Характеристики розсіювання складових вимірювання (за формулою (2))

Вихідні дані	а	б	в
	0,2	0,34	0,14
Матриця встановлення шкали (максимальне розсіювання за рядками)	0,2	0,2	0,2
Результат вимірювання	0,2	0,34	0,2

- якщо розсіювання в рядках матриці встановлення шкали більше за розсіювання вхідних даних (таб.1в), то невизначеність результату вимірювання встановлюється тільки за невизначеністю встановлення шкали (рис. 5, в).

2. Арифметизація символної (вербальної) шкали порядку і формування комбінованої (гібридної) шкали

Арифметизація символних (вербальних) шкал полягає у присвоєнні чисел окремим точкам верба-

льної шкали. Результатом арифметизації є комбінована (гібридна) шкала з повністю числовою складовою шкали. Використовують 2 види арифметизації: за наявністю апріорної інформації і стохастичну арифметизацію [6]. При застосуванні стохастичної арифметизації отримують числа, що відповідають або математичним сподіванням або медіанам сім'ї β -розподілів. Для дискретних ординальних шкал це математичні сподівання, що відповідають точкам шкали, для шкал квазіпорядку це медіани сім'ї β -розподілів, що відповідають точкам переходу між окремими класами еквівалентності.

На рис. 6 приведена комбінована (гібридна) шкала з дискретними вербальними (символьними) точками шкали $i(x_0, x_1, x_2, x_3)$. Характеристикою комбінованої шкали є матриця відповідності між числами з номерами j та вербальними точками x_i (рис.7).

Реальна стохастична матриця відрізняється від ідеальної наявністю розсіювання вздовж головної діагоналі матриці.

Символьна шкала	x_0	x_1	x_2	x_3
Вербальна шкала	Зовсім не відповідний	Частково відповідний	Відповідний	Значно відповідний
Числова шкала в умовних одиницях	0	0,33	0,67	1

Рис. 6. Комбінована (гібридна) шкала, отримана за арифметизацією

$\|P_{ji}\| =$

$j \backslash x_i$	x_0	x_1	x_2	x_3
0	0,7	0,3	0	0
1	0,3	0,5	0,2	0
2	0	0,2	0,5	0,3
3	0	0	0,3	0,7

Рис. 7. Матриця відповідності між числами з номерами j та вербальними точками x_i , отримана для 4-х точок шкали з використанням стохастичної арифметизації

Для розрахунків ймовірностей P_{ji} авторами даної роботи використовувалось поняття класу еквівалентності. Клас еквівалентності визначався як частина шкали, що відповідає певній точці шкали (в даному випадку $\pm 0,5$ поділки шкали). Ймовірність віднесення до певного класу еквівалентності відповідала площі під кривою щільності ймовірності β -розподілу [7]. Так як модель β -розподілу має довгі «хвости», була використана модель зрізаного β -розподілу, і розмах за точками шкали відповідав приблизно 95% площі β -розподілу.

Як показав аналіз, при стохастичній арифметиці розсіювання ймовірностей за точками x_i значне, особливо при збільшенні кількості точок вербальної шкали (таб.2).

Таблиця 2
Характеристика розсіювання матриці відповідності при різній кількості точок шкали

Кількість точок шкали	Норма Фробеніуса, G	Максимальний розмах за точками шкали (характеристика невизначеності встановлення шкали)
4	0,15	3
5	0,19	4
6	0,22	5
7	0,24	5

Для зменшення розсіювання матриці, а отже невизначеності встановлення шкали використовується калібрування з метою підтвердження (або не підтвердження) встановленої шкали.

Для проведення калібрування використовують еталонні об'єкти. За відсутністю встановлення одиниці вимірювання, що характерно для ординальних шкал, при калібруванні повинна відтворюватись вся шкала, тому необхідно мати таку кількість еталонних об'єктів, яка відповідає кількості точок дискретної вербальної шкали. В результаті кожен з еталонних об'єктів буде відповідати окремій вербальній точці шкали. За встановленою методикою для даної вербальної шкали експерти визначають число, що відповідає певній вербальній точці і прийнятому діапазону шкали. Опрацьовуючи рішення експертів, отриманих при калібруванні, визначають ймовірності P_{ji}^k .

3. Зменшення невизначеності встановлення шкали після калібрування

Для збільшення точності запропоновано проводити об'єднання результатів арифметизації та калібрування за допомогою формули Байеса. Ймовірностями прийняття гіпотези $H_{(j \rightarrow x_i)}$ про відповідність точок j вербальним точкам x_i є ймовірності віднесення цих точок $P'_{ji} = P(H_{(j \rightarrow x_i)})$. Якщо після калібрування гіпотеза $H_{(j \rightarrow x_i)}$ відповідності точок j вербальним точкам x_i підтвердилась з ймовірністю $P_{ji}^k = P(k | H_{(j \rightarrow x_i)})$, то з врахуванням нових ймовірностей можна отримати апостеріорні матриці відповідності точок шкали на основі формули Байеса:

$$P(H_{(j \rightarrow x_i)} | k) = \frac{P(H_{(j \rightarrow x_i)}) \cdot P(k | H_{(j \rightarrow x_i)})}{\sum_{j=1}^{m+1} P(H_{(j \rightarrow x_i)}) \cdot P(k | H_{(j \rightarrow x_i)})} \quad (4)$$

де $P(H_{(j \rightarrow x_i)})$ – ймовірність віднесення P_{ji} точки j числової шкали до вербальної точки x_i за попередньою арифметизацією,

$P(k | H_{(j \rightarrow x_i)})$ – ймовірність віднесення точки j до точки x_i , що отримана в результаті калібрування шкали,

$P(H_{(j \rightarrow x_i)} | k)$ – ймовірність віднесення точки j до точки x_i за об'єднанням ймовірностей, отриманих при арифметизації та калібруванні.

Наприклад, до калібрування шкали матриця відповідності дискретної вербальної шкали з трьома точками x_i ($i = 1, 2, 3$):

x_1 = «Низький»,

x_2 = «Середній»,

x_3 = «Високий»

мала вигляд $\|P'_{ji}\|$, рис. 8.

Для калібрування використано три еталонних об'єкти, рівні властивостей яких відповідають одній окремій точці вербальної шкали x_1, x_2, x_3 .

Припустимо, що на основі оцінювання числових показників якості еталонного об'єкта x_1 при калібруванні, що проводиться групою експертів, отримано наступні ймовірності: $P_{1 \rightarrow x_1}^k = 0,9$, $P_{2 \rightarrow x_1}^k = 0,1$, $P_{3 \rightarrow x_1}^k = 0$. При калібруванні матриця відповідності буде стандартизованою за стовпцями:

$$\sum_{j=1}^{m+1} P(k | H_{(j \rightarrow x_i)}) = 1.$$

Тоді за застосуванням формули (4) отримуємо апостеріорні ймовірності:

$$P(H_{(1 \rightarrow x_1)} | k) = 0,96,$$

$$P(H_{(2 \rightarrow x_1)} | k) = 0,04,$$

$$P(H_{(3 \rightarrow x_1)} | k) = 0.$$

Таким чином, при об'єднанні результатів арифметизації і калібрування, ймовірність відповідності точок j і x_i , що відповідають діагоналі матриці, збільшилась. Результати калібрування і розрахунку апостеріорних ймовірностей для еталонних об'єктів, що відповідають точкам x_2 та x_3 , наведено на рис. 8.

Після калібрування шкали з використанням еталонних зразків за умови, коли результати калібрування підтверджують арифметизацію шкали, за

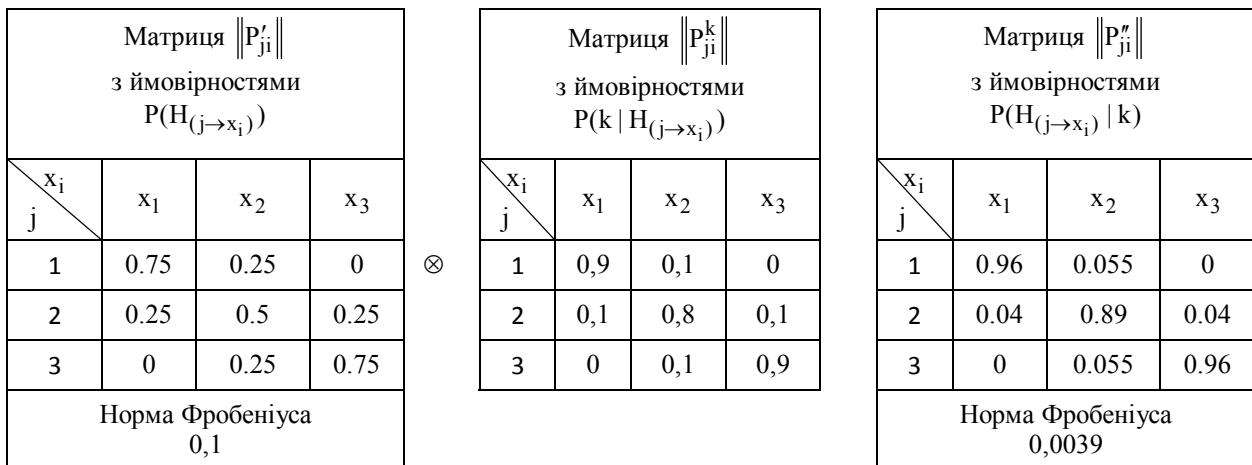
формулою Байеса отримано матрицю відповідності $\|P'_{ji}\|$, рис. 8. За нормою Фробеніуса встановлено, що отримана матриця відповідності має менше розсіювання у порівнянні з матрицею відповідності $\|P''_{ji}\|$, рис. 8. Використання об'єднання калібрування та арифметизації приводить до збільшення значень ймовірностей віднесення точок j точкам x_i по головній діагоналі матриці відповідності $\|P'_{ji}\|$. Співпадіння мод маргінальних розподілів стовпців матриць відповідності при арифметизації та калібруванні свідчить про правильність встановлення числової шкали. Результатом є зменшення розсіювання матриці відповідності $\|P'_{ji}\|$ при об'єднанні даних арифметизації і калібрування і отже невизначеності встановлення числової шкали.

Якщо при калібруванні отримана матриця відповідності, моди маргінальних розподілів стовпців якої не співпадають з модами стовпців матриці

відповідності при арифметизації, необхідно внести зміни в шкалу арифметизації (рис. 9).

На основі проведеного моделювання з різними результатами калібрування можна зробити наступні висновки: якщо моди маргінальних розподілів x_i , отриманих за номерами j при арифметизації та при калібруванні співпадають, то це свідчить про правильне визначення числових відміток, що відповідають номерам j .

Результатом об'єднання арифметизації і калібрування є збільшення ймовірності в діагоналі матриці відповідності і зменшення розсіювання ймовірностей за номерами j матриці відповідності; якщо моди маргінальних розподілів x_i , отриманих за номерами j при арифметизації і при калібруванні не співпадають, це свідчить про необхідність внесення змін в числову шкалу, встановлену при арифметизації. Після цього потрібно повторити калібрування.



Примітка: ⊗ – розрахунок за формулою (4).

Рис. 8. Ілюстрація збільшення діагональних ймовірностей і зменшення розсіювання після врахування результатів калібрування.



Рис. 9. Ілюстрація неспівпадіння мод маргінальних розподілів

Висновки

За наведеними в роботі результатами досліджень і моделювання можна зробити наступні висновки:

- Серед загального типу шкал порядку можна виділити асоціативні шкали порядку, саме шкали порядку і шкали квазіпорядку. Шкали порядку можуть бути неперервними і дискретними, символічними (зокрема вербальними) і числовими. Серед числових шкал можна виділити повністю числові і умовно числові.

- Щоб уникнути впливу різних явлень експериментаторів про рівні проявів властивостей за вербальними шкалами доцільно використовувати комбіновані або гібридні шкали, що складаються з декількох шкал (символьних, вербальних і числових). Як характеристика комбінованої (гібридної) шкали може бути прийнята матриця відповідності між шкалами, що входять до її складу. Якщо ця матриця отримана тільки за стохастичною арифметизацією вербальної шкали, її розсіювання виявляється великим, що, в свою чергу, збільшує невизначеність встановлення комбінованої (гібридної) шкали.

- В роботі запропоновано спосіб підвищення точності встановлення шкали порядку при калібруванні і подальшому об'єднанні результатів арифметизації і калібрування за допомогою формули Байеса. Якщо числова шкала була встановлена у відповідності з вербальною і результати калібрування підтверджують результати, встановлені при арифметизації, невизначеність встановлення комбінованої (гібридної) шкали зменшується. Якщо результати калібрування не підтверджують результатів, отриманих при арифметизації, необхідно внести зміни в числову шкалу і повторити калібрування.

- При вимірюванні за ординальною шкалою необхідно об'єднувати дві складові невизначеності: невизначеність отриманих даних при вимірюванні і невизначеність встановлення ординальної шкали.

Загальна невизначеність характеризується розмахом за класами еквівалентності або точками шкали.

- В роботі розглянуто процедуру отримання результату вимірювання з урахуванням невизначеності встановлення шкали при одноразовому і багаторазовому вимірюванні, що в загальному випадку зведено до знаходження композиції вектору вхідних даних і матриці відповідності шкали. Показано, якщо невизначеність будь-якої із складових перевищує іншу, то тільки ця складова і є визначальною для оцінки невизначеності результату вимірювання.

Список літератури

1. PGM 83 – 2007. Шкалы измерений. Термины и определения.
2. Josep Domingo-Ferres, Vicenc Torra Median-Based Aggregation operators for prototype construction in ordinal scales // *International journal of intelligent systems*. – 2003. – Vol. 18. – P. 633-655.
3. Svenson E. Comparison of the quality of assessments using continuous and discrete ordinal rating scales / E. Svenson // *Biometrical Journal*. — 2000. — 42(4). — P. 417-434.
4. Flynn D. van Scaik P, van Wersh A. A comparison of multi-item likert and visual analogue scales for the assessment of transactionally defined coping function // *European Journal of Psychological Assessment*. – 2004. – 20(1). – P. 49-58.
5. Bashkansky E. Some metrological aspects of ordinal measurement / E. Bashkansky, T. Gadrich // *Quality assurance*, 15, 2010. – P. 331-336.
6. Beair I. Statistics of ordinal variation / I. Beair, Mg. Lacy // *Sociol. Methods Res.* – 2000. – 28: – P. 251-280.
7. Хованов Н.В. Математические основы теории шкал измерения качества / Н.В. Хованов. – Ленинград, 1982. – 169 с.
8. Яремчук Н.А. Арифметизация ординальных шкал вимірювання якості програмних засобів / Н.А. Яремчук, О.Ю. Редьбога // *Інформаційні системи, механіка та керування*. – 2011. – № 11. – С. 5-15.

Надійшла до редколегії 24.02.2013

Рецензент: д-р техн. наук, проф. І.П. Захаров, Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків.

НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ УСТАНОВЛЕНИЯ ШКАЛЫ ПОРЯДКА, МЕТОДЫ ЕЕ УМЕНЬШЕНИЯ И УЧЕТ ПРИ ПОЛУЧЕНИИ РЕЗУЛЬТАТА ИЗМЕРЕНИЯ

О.Ю. Редьбога, Н.А. Яремчук

В работе рассмотрено процедуру оценивания неопределенности установления вербальной и комбинированной (гибридной) шкалы порядка и пути уменьшения этой неопределенности при объединении результатов арифметизации и калибрования. Приведен метод оценивания неопределенности однократного и многократного измерения с учетом неопределенности установления шкалы порядка за композицией вектора входящих данных и матрицы соответствия шкалы.

Ключевые слова: шкала порядка, неопределенность установления шкалы порядка.

UNCERTAINTY OF ORDER SETTING SCALE, ITS WAYS TO REDUCE AND CONSIDERATION WHEN GETTING RESULTS

O.Y. Redyoga, N.A. Yaremchuk

We consider a procedure to assess uncertainty installation verbal and combined (hybrid) scale order, and ways to reduce this uncertainty by combining the results of calibration and arithmetization. In the paper we have presented an evaluation method of single and multiple measurement uncertainty considering uncertainty installation verbal scale using composition the vectors of input data and the accordance scale matrix.

Keywords: verbal scale, uncertainty installation verbal scale.