УДК 006.91:004.942

М.О. Пустовойтов, О.В. Самойліченко

Національний авіаційний університет, Київ

МАТРИЧНИЙ МЕТОД ОЦІНЮВАННЯ ВПЛИВУ ПОХИБОК

В статті запропоновано матричний метод розв'язання проблеми оцінки впливу параметричних збурень на поведінку автономної динамічної системи. Отримані наближені аналітичні співвідношення між спектром та елементами матриці коефіцієнтів системи вирішують поставлену проблему для параметрів різної природи, у першу чергу тих, які пов'язані з невизначеністю вимірювань та виробничими допусками. Застосування методу показано на прикладі лінеаризованої динамічної системи.

Ключові слова: *параметричні системи, похибка, матриця, власні значення, метод збурення.*

Вступ

Серед інженерних та дослідницьких задач однією із головних є розроблення математичного забезпечення аналізу і синтезу систем з урахуванням всіх суттєвих їх особливостей та можливих збурень, які діють на ці системи.

Наприклад, в задачах стійкості та керування найбільші труднощі пов'язані з обранням таких значень керуючих параметрів, при яких система була би асимптотично стійкою. Але знаходження номінальних параметрів регулятора, які забезпечують стійкість системи, ще недостатньо. Необхідно враховувати вплив на *якість* функціонування системи похибок різного характеру, що можуть змінювати як розрахункові коефіцієнти моделі системи, так і обрані номінальні значення керуючих параметрів. Окрім похибок, пов'язаних із самою математичною моделлю та округленнями при обчисленнях, значне місце займають похибки, викликані неідеальністю вимірювань та виготовлення на виробництві.

Більшість цих похибок носять випадковий характер і зазвичай задаються граничними допусками та своїми статистично-імовірнісними характеристиками. Тому, окрім врахування та компенсації відповідних зовнішніх збурень, що діють на проектовану систему, виникає проблема врахування впливу «внутрішніх» параметричних збурень і оцінки діапазону допустимих змін номінальних значень параметрів.

Ця проблема виникла у середині минулого століття, коли почали розгортатися грандіозні атомний, ракетний і радіолокаційний проекти, для яких гостро постало питання створення «наднадійних» повністю автоматичних систем. Тоді вона мала назву пошук «найгірших сполук (сочетаній)», тобто вибір таких знаків гранично заданих розкидів параметрів, при яких відбувались би найгірші зміни у поведінці системи.

Важлива особливість керованих систем полягає в тому, що вони забезпечують незначні відхилення від заданих значень фазових координат. Це надає змогу лінеаризувати математичну модель системи, скористатися матричними методами її дослідження, а саме знайти спектр матриці коефіцієнтів лінійної моделі, який повністю визначає поведінку системи.

Якщо матриця задана чисельно, існуючі пакети математичних програм дозволяють знаходити спектр для матриць досить високих порядків. У разі параметрично заданих матриць такої можливості немає в зв'язку з відсутністю явних співвідношень між спектром і елементами матриці.

Враховуючи відносно невеликі значення параметричних розкидів, викликаних похибками вимірювання і допусками виробництва (їх зменшення – постійний напрямок інженерної і наукової думки), є можливість скористатися методом збурення для розв'язання параметричного матричного рівняння алгебраїчної проблеми власних значень. Розкладаючи спектр і власний базис параметрично заданої матриці у ряд за степенями параметрів, одержуємо необхідні функціональні співвідношення між елементами матриці та її спектром.

Із підвищенням складності об'єктів керування, багатовимірності їх математичних моделей звужуються можливості традиційних регуляторів, області стійкості системи у просторі керуючих параметрів, більш гострою стає потреба у дослідженні впливу на поведінку системи всі більш тонких факторів. Знайдені співвідношення дозволяють робити такі дослідження, застосовуючи відповідне число членів параметричного ряду розкладу спектру матриці коефіцієнтів лінеаризованої моделі системи.

Виклад основного матеріалу

Основна складність під час вирішення параметричних задач полягає у встановленні залежностей (в аналітичному вигляді) між коефіцієнтами вихідної математичної моделі та спектром матриці її лінійної частини, який визначає властивості досліджуваної системи. Методом збурення (малого параметра) будується наближений критерій стійкості та інших якісних властивостей системи, виражений через коефіцієнти моделі. Тим самим виникає можливість безпосередньо обраховувати вплив параметричних збурень коефіцієнтів системи на її поведінку.

Матричний алгоритм. Загальний вигляд математичної моделі будь-якої лінеаризованої динамічної системи, до якої зводяться всі окремі випадки, являє собою систему лінійних автономних диференціальних рівнянь в формі Коші:

$$\frac{d\overline{y}}{dt} = A(p)\overline{y}.$$

Характерними особливостями системи є: багатовимірність вектора фазових та керованих координат $\overline{y}$, багатовимірність вектора параметрів p, малість допустимих відхилень вектора p від номінального значення p_0, завдання області допустимих значень граничних відхилень вектора p відносно p_0 у вигляді $\Delta p = p - p_0$. Всі властивості поведінки цієї системи визначаються спектром матриці $A(p)$. Коефіцієнти матриці $A(p_0)$ характеризують об'єкт дослідження при розрахункових параметрах p_0. Можливі різні представлення залежності матриці $A(p)$ від параметрів.

Якщо відомий функціональний зв'язок коефіцієнтів матриці $a_{j,k}(p)$ $(j,k = 1..n)$ від параметрів, то використовують їх розклад у ряд Тейлора:

$$A(p) = A(p_0) + \frac{\partial A}{\partial p}(p_0)\cdot \Delta p + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial p^2}(p_0)\cdot(\Delta p, \Delta p).$$

У залежності від малості вектора Δp залишають відповідне число членів ряду. Якщо задані границі або допуски можливих відхилень від номінальних значень параметрів, то матрицю A(p) записують у вигляді:

$$A(p) = A_0 + A_1(p),$$

де $n \times n$ матриця коефіцієнтів A(p) складається із відомої матриці $A_0 = A(p_0)$ із фіксованими розрахунковими елементами та матриці $A_1(p)$, елементи якої залежать від m-вимірного вектора розкидів параметрів Δp.

На практиці частіше використовують другу форму представлення матриці.

Припускаючи просту структуру матриці A(p), з матричного рівняння алгебраїчної проблеми власних значень для цієї матриці отримаємо її діагональну форму

$$D(p) = X^{-1}\cdot A(p)\cdot X(p), \tag{1}$$

де $$D(p) = \begin{pmatrix} \lambda_1(p) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_e(p) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n(p) \end{pmatrix},$$

$X(p) = (x_1(p), x_2(p), \dots, x_n(p))$ – власний базис матриці A(p), стовпцями якого є власні вектори цієї матриці $x_k(p)$ $(k = 1..n)$; $\lambda_k(p)$ $(k = 1..n)$ – власні значення матриці A(p).

Оскільки похибки вимірювання та виробничі допуски усіляко мінімізуються, досить реальним є припущення щодо малості елементів матриці $A_1(p)$. Це дозволяє застосувати метод збурення для знаходження матриці $D(p)$ та $X(p)$, які представляються у вигляді матричних рядів. Після підстановки рядів $D(p)$ та $X(p)$ в (1) та прирівнювання членів однакового ступеня малості отримаємо вирази для членів ряду [2].

Знайдемо матриці $D(p)$, $X(p)$, $X^{-1}(p)$ у першому наближенні

$$D(p) \approx D_0 + \varepsilon D_1(p),\ X(p) \approx X_0 + \varepsilon X_1(p),$$

$$X^{-1}(p) \approx Y_0 + \varepsilon Y_1(p),$$

де D_0, X_0 – відомі спектральна матриця і власний базис матриці A_0 відповідно; ε означає ступінь малості. Підстановка цих виразів в (1) та відкидання членів розкладу вище ε дає:

$$D_0 \approx Y_0 A_0 X_0, \quad Y_0 = X_0^{-1},$$

$$D_1(p) = Y_0 A_1(p) X_0 + Y_1(p)\cdot A_0 X_0 + Y_0\cdot A_0 X_1(p). \tag{2}$$

Матриця $D_1(p)$ діагональна, на головній діагоналі якої розміщені збурення спектру матриці A_0 (у першому наближенні).

Із співвідношення (2) отримуємо наближені значення для збурень власних значень матриці A(p):

$$\lambda_j^1(p) = y_j A_1(p) x_j, \quad (j = 1..n), \tag{3}$$

де $\lambda_j^1(p)$ – збурення j-го власного значення матриці $A(p)$; x_j, y_j – стовпець матриці X_0 та рядок матриці Y_0 відповідно, $j = 1..n$.

Тоді власні значення матриці $A(p)$ в першому наближенні можна представити у вигляді:

$$\lambda_j(p) \approx \lambda_j^0 + \varepsilon \lambda_j^1(p), \; (j = 1..n),$$

де λ_j^0 – власні значення матриці A_0, $\lambda_j^1(p)$ – параметричні збурення у першому наближенні, ($j = 1..n$).

При заданих A_0, $A_1(p)$ за формулами (3) можна оцінити вплив параметричних збурень на спектр матриці A_0. Оскільки ця матриця задана чисельно, значення власних значень λ_j^0, ($j = 1..n$) знаходять за допомогою стандартних алгоритмів (наприклад, в пакетах математичних програм MathCad, MathLAb). Розрахунки складових $\lambda_j^1(p)$, ($j = 1..n$) вимагають найпростіших аналітичних обрахувань: множення матриці-функції $A_1(p)$ на чисельний j-й вектор-рядок матриці X_0^{-1} і j-й вектор-стовпчик матриці X_0. У випадку, коли задаються обмеження на зміну спектру матриці A_0, тобто задається допустиме збурення $\lambda_j^1(p)$, то співвідношення (3) дозволяє знайти допустимі значення збурень елементів матриці $A_1(p)$.

Приклад. Нехай властивості поведінки системи описуються спектром матриці

$$A(p) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} + p_1 & a_{22} + p_2 \end{pmatrix},$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \; A_1(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо власні вектори та власні значення матриці нульового наближення A_0:

$$D_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1^0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^0 \end{pmatrix}, \; \lambda_{1,2}^0 = \frac{a_{22} \pm \sqrt{a_{22}^2 - 4a_{21}}}{2},$$

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1^0 & \lambda_2^0 \end{pmatrix}, \; Y_0 = \frac{1}{\lambda_2^0 - \lambda_1^0} \begin{pmatrix} \lambda_2^0 & -1 \\ -\lambda_1^0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді відповідно формулам (3) знаходимо збурення власних значень від зміни параметрів :

$$\lambda_1^1 = \frac{1}{\lambda_2^0 - \lambda_1^0} \left(\lambda_2^0, -1\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1^0 \end{pmatrix} = -\frac{p_1 + p_2 \lambda_1^0}{\lambda_2^0 - \lambda_1^0},$$

$$\lambda_2^1 = \frac{1}{\lambda_2^0 - \lambda_1^0} \left(-\lambda_1^0, 1\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{p_1 + p_2 \lambda_2^0}{\lambda_2^0 - \lambda_1^0}.$$

При, $a_{21} = -9$, $a_{22} = -0{,}2$; вихідний (номінальний) спектр матриці A_0 має значення $\lambda_{1,2} = -0{,}1 \pm 3i$. Дійсні частини власних значень – від'ємні, означає, що незбурена система з коефіцієнтами A_0 – асимптотично стійка.

При значеннях збурень параметрів $p_1 = -1$ та $p_2 = 0{,}05$ власні значення матриці $A(p)$ мають значення $\lambda_{1,2} = -0{,}075 \pm 3{,}166i$, тобто спектр системи наблизився до границі стійкості, яка визначається виразами $\mathrm{Re}\,\lambda_1 = 0$, $\mathrm{Re}\,\lambda_2 = 0$.

Для порівняння спектр матриці $A(p)$, який у даному разі може бути знайдений в MathCad, дорівнює: $\lambda_{1,2} = -0{,}075 \pm 3{,}166i$. Тобто, за допомогою запропонованого методу отримано добре наближення спектру параметрично збуреної матриці.

Якщо задаються обмеження на спектр, допуски на елементи $A_1(p)$ визначаються із системи лінійних рівнянь відносно невідомих p_1, p_2.

Висновки

Розглянуто основні проблеми та математична постановка задачі моделювання та дослідження керованих систем із урахуванням параметричних збурень.

В статті застосовано матричні методи, які широко використовується в теорії управління (теорії динамічних систем, багатомірному статистичному аналізі, лінійній алгебрі, теорії чутливості тощо). Прийнята математична модель – багатовимірна лінеаризована система з багатьма параметрами. Фактична малість розкидів параметрів дозволила застосовувати методи теорії збурень.

Розвинено матричний метод оцінювання впливу похибок (невизначеностей), на основі якого побудований відповідний алгоритм розрахунку впливу неідеальності математичної моделі, викликаної невизначеністю вимірювальних операцій та виробничих допусків на поведінку системи.

Запропонований метод дозволяє вирішувати пряму задачу: за розкидами параметрів математичної моделі, заданими у вигляді максимальних відхилень, знаходити відповідні відхилення власних значень системи. Крім того, можливе рішення оберненої задачі: за заданими максимальними відхиленнями спектру системи знаходити допуски на відхилення параметрів, що характеризують математичну модель.

Список літератури

1. Абгарян К.А. Матричные и асимптотические методы в теории линейных систем / К.А. Абгарян. – М.: Наука, 1973. – 423 с.

2. Пустовойтов Н.А. Метод возмущений в алгебраической проблеме собственных значений / Н.А. Пустовойтов. – Препринт ин-та математики АН УССР ИМ 76-31. – К., 1976. – 24 с.

Надійшла до редколегії 22.02.2013

Рецензент: д-р фіз.-мат. наук, проф. Д.Г. Коренівський, Інститут математики НАНУ, Київ.

МАТРИЧНЫЙ МЕТОД ОЦЕНКИ ВЛИЯНИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Н.А. Пустовойтов, О.В. Самойличенко

В статье предложен матричный метод решения проблемы оценивания влияния параметрических возбуждений на поведение автономной динамической системы. Полученные приближенные аналитические соотношения между спектром и элементами матрицы коэффициентов системы решают поставленную проблему для параметров разной природы, в первую очередь тех, которые связанны с неопределенностью измерения и производственными допусками. Использование метода показано на примере линеаризированной динамической системы.

Ключевые слова: *параметрические системы, погрешность, матрица, собственные значение матрицы, метод возмущений.*

THE MATRIX METHOD OF ESTIMATION THE ERROR INFLUENCE

N.A. Pustovoitov, O.V. Samoilichenko

The matrix method for solving the problem of estimation the influence of parametric excitation on the action of autonomous dynamic system is given. The received approximate analytical relation between the matrix spectrum and elements of matrix of system of coefficient solves the assigned task for parameters of wide nature, firstly, connected with uncertainty of measurement and manufacturing tolerances. The method implementation is given in an example of linearized dynamic system.

Keywords: *parametric systems, error, matrix, proper matrix value, perturbation method.*