УДК 510.6:519.766.2

С.Ю. Леонов

Национальный технический университет «ХПИ», Харьков

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ *K*-ЗНАЧНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ХАРАКТЕРОВ КОНЕЧНЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

В статье рассматривается метод решения линейных K-значных дифференциальных уравнений с помощью характеров абелевых групп, который может быть использован при моделировании цифровых элементов и устройств в системе K-значного моделирования. Такое моделирование дает новые перспективы проектирования сложных устройств, выполненных на элементах с повышенной степенью интеграции.

Ключевые слова: *метод решения, линейные K-значные дифференциальные уравнения, характеры конечных абелевых групп, моделирование цифровых элементов и устройств, система K-значного моделирования.*

Введение

Анализ литературы и постановка задачи. В настоящее время проектирование любых устройств электронной и вычислительной техники, выполненных на элементах с повышенной и сверхвысокой степенью интеграции, невозможно без этапа моделирования. Именно с его помощью можно добиться работоспособного варианта проектируемого устройства. При этом моделирование различных типов устройств предполагает решение различных видов уравнений, в том числе дифференциальных.

Применение функционального моделирования цифровых схем предполагает использование решения булевых уравнений, описывающих функционирование цифровых автоматов. Наиболее широко применяемыми системами, использующими моделирование на основе решения булевых уравнений, являются такие известные системы как PCAD [1] или OrCAD [2]. Моделирование как анализ работоспособности с помощью таких систем дает возможность оценить правильность функционирования проектируемых устройств цифровой вычислительной техники, использующих в своей основе двоичный алфавит. В настоящее время для такого моделирования также часто стало применяться моделирование с помощью системы Active-HDL [3]. Эти системы быстро развиваются, выпускаются все новые и новые версии, и они находят все большее применение в системах автоматизированного проектирования.

Для описания функционирования отдельных элементов с учетом переходных процессов на их входах и выходах используют системы моделирования, основным методом получения результата в которых является решение обыкновенных дифференциальных уравнений. В качестве примера такой системы можно привести MicroCAP [4]. Несмотря на то, что такие системы позволяют промоделировать достаточно точно все процессы переключения отдельных компонент, они имеют ограниченное применение из-за относительно малых возможностей моделирования современных сложных вычислительных устройств.

Одним из методов моделирования, позволяющим уменьшить объем вычислений за счет учета только процессов переключения двоичных сигналов является метод булевого дифференциального исчисления, основоположниками которого являются Д. Бохман и Постхоф [5, 6]. Развитие этого метода имеется в работах [7 – 11]. Однако ограниченные возможности таких булевых дифференциальных моделей не способствует их широкому практическому применению.

Альтернативой использованию моделирования на основе решения булевых уравнений и непрерывных дифференциальных уравнений является метод моделирования на основе решения K-значных дифференциальных уравнений [12, 13] и использование системы моделирования на их основе [14]. Использование моделирования, которое имеет преимущества как аналогового, так и цифрового моделирования, позволяет с требуемой точностью исследовать достаточно сложные цифровые вычислительные устройства. Сама точность задается используемым алфавитом K. При этом часто важно получение решений K-значных линейных дифференциальных уравнений в аналитическом виде, что затруднено из-за отсутствия K-значных функций аналогов экспоненциальных непрерывных функций.

Цель статьи: разработка аналитического метода решения K-значных линейных дифференциальных уравнений для моделирования быстродействующих вычислительных систем на основе K-знач_ного дифференциального исчисления.

Основная часть

Определение 1 [15]. Непрерывное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dz}{dx} + p(x)z = f(x)\,,\ z_0 = z(x_0), \qquad (1)$$

где z – неизвестная непрерывная функция независимой переменной x, $|z| < +\infty$; p(x), f(x) – известные непрерывные функции, заданные на конечном или бесконечном интервале (a, b), z_0, x_0 – начальные данные, называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка.

Определение 2. Линейное дифференциальное уравнение (1) называется однородным, если $f(x) \equiv 0$, $\forall x \in (a, b)$, и неоднородным, если $f(x) \equiv 0$.

Общее решение неоднородного уравнения (1) в заданной области изменения независимой переменной может быть записано в виде

$$z = e^{-\int p(x)dx}\left[C + \int f(x) e^{\int p(x)dx} dx\right], \qquad (2)$$

где C – произвольная постоянная,
или в форме Коши

$$z = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(x)dx}\left[z_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(x) e^{\int\limits_{x_0}^{x} p(x)dx} dx\right] \qquad (3)$$

при начальных данных x_0, z_0.

Непрерывное линейное уравнение (1) при конечном интервале (a, b) и $|z| < +\infty$, можно аппроксимировать K-значным линейным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{dZ}{dX} \langle + \rangle_K \; P(X)Z = F(X), \quad Z_0 = Z(X_0), \qquad (4)$$

где X – независимая K-значная или целочисленная переменная; $Z = Z(X)$ – неизвестная K-значная функция; P(X), F(X) – известные K-значные функции, X_0, Z_0 – начальные данные. Однако записать K-значное решение уравнения (4) в виде, аналогичном (2) или (3) нельзя, так как отсутствуют K-значные функции, аналоги обычной экспоненты. Введем такие функции.

Определение 3. Алгебра (P, +, •) называется полем, если P – непустое множество, на котором заданы две бинарные операции "+" (сложение) и "•" (умножение), удовлетворяющие условиям:

а) (P, +) – абелева группа по сложению;

б) (P^*, •) – абелева группа по умножению, где P^* – множество, полученное из множества P путем удаления нулевого элемента (единичного элемента группы по сложению).

Пример 1. Пусть $P \equiv M \equiv \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Зададим операции поля как операции сложения $\langle + \rangle_K$ и умножения $\langle \times \rangle_K$ по модулю 7 в соответствии с табл. 1 и 2.

В [12] показано, что множество $M = \{0, 1, ..., K-1\}$ является аддитивной абелевой группой относительно операции сложения по произвольному модулю K, следовательно, ($P = \{0, 1, ..., 6\}$, $\langle + \rangle_K$) является абелевой группой по сложению. Покажем, что множество $P^* \equiv M^* = \{1, 2, ..., 6\}$ с операцией умножения по модулю 7 является мультипликативной абелевой группой. Действительно, из табл. 2 следует:

Таблица 1

Таблица Кэли (сложение по модулю 7)

$\langle + \rangle_K$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

Таблица 2

Таблица Кэли (умножение по модулю 7)

$\langle \times \rangle_K$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	5
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

1) множество P^* замкнуто по отношению к операции $\langle \times \rangle_K$;

2) операция $\langle \times \rangle_K$ коммутативна на множестве P^*;

3) множество P^* содержит левую единицу E = = 1, такую, что для каждого элемента $a \in P^*$ выполняется соотношение $E \langle \times \rangle_K a = a$;

4) для каждого элемента $a \in P^*$ в множестве P^* существует левый обратный элемент a^{-1}, такой, что $a^{-1} \langle \times \rangle_K a = E$;

5) для любых элементов $a, b, c \in P^*$ выполняется ассоциативный закон

$$(a \langle \times \rangle_K b) \otimes c = a \langle \times \rangle_K (b \langle \times \rangle_K c).$$

Следовательно, рассматриваемое множество $P \equiv M$ действительно является полем.

Рассмотрим пространство L(G, P), областью определения функций в котором является аддитивная абелева группа G, а областью значений – поле P. Определим в этом пространстве функции, являющиеся аналогами экспонент. Известно [23, 31], что комплексную экспоненту $e^{i\mu x}$ можно определить как решение функционального уравнения

$$\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1)\, \varphi(x_2) \qquad (5)$$

над полем C комплексных чисел при условии $\varphi(0) = 1$. Или, другими словами, комплексная экспонента определяется как гомоморфизм аддитивной группы G в поле C (точнее – в мультипликативную подгруппу поля C). В пространстве L(G, P) аналогами экспонент являются решения уравнения вида (5), но над полем P.

Определение 4. Функции, удовлетворяющие уравнению (5) в пространстве L(G, P) при условии

$\varphi(0) = 1$, называются характерами абелевой группы G.

Определение 5. Отображение φ: $G_1 \to G_2$ группы $G_1 = (G_1, *)$ в группу $G_2 = (G_2, \bullet)$ называется гомоморфизмом, если для любых g_1, $g_2 \in G_1$ и $\varphi(g_1)$, $\varphi(g_2) \in G_2$ имеет место равенство

$$\varphi(g_1 * g_2) = \varphi(g_1) \bullet \varphi(g_2).$$

Определение 6. Если φ – взаимно-однозначный гомоморфизм группы G_1 в группу G_2, то он называется изоморфизмом.

В случае, если группа G имеет порядок g, а полем является поле C комплексных чисел, мультипликативная подгруппа P_{MP} поля P может состоять из корней степени g из единицы

$$\varepsilon_k = \sqrt[g]{1} = e^{i\frac{2\pi}{g}k}, \quad k = 0, 1, ..., g–1. \tag{6}$$

Очевидно, что в этом случае существует изоморфизм группы G в мультипликативную подгруппу P_{MP} поля P.

Пример 2. Пусть g = 6, тогда из (6) получим:

$$\varepsilon_0 = 1;\ \varepsilon_1 = e^{i\frac{\pi}{3}};\quad \varepsilon_2 = e^{i\frac{2}{3}\pi};\quad \varepsilon_3 = e^{i\pi} = -1;$$

$$\varepsilon_4 = e^{i\frac{4}{3}\pi};\quad \varepsilon_5 = e^{i\frac{5}{3}\pi}.$$

Легко проверить, что множество $\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_5\}$ замкнуто относительно умножения комплексных экспонент, каждый элемент имеет обратный, операция умножения коммутативна и для нее справедлив ассоциативный закон, следовательно, оно является мультипликативной группой.

Рассмотрим теперь пространство $L(G, P_G)$, в котором группа G является конечной аддитивной группой порядка g, а поле P – конечное поле Галуа $P_G = \{0, 1, ..., p–1, \langle+\rangle_K, \langle\times\rangle_K\}$, где p – простое число, $\langle+\rangle_K$, $\langle\times\rangle_K$ – операции сложения и умножения по модулю простого числа. Мультипликативная группа P_{MGG} поля Галуа P_G состоит из p – 1 элемента: {1, 2, ... , p – 1}. При определении выражения (5) как изоморфизма в пространстве $L(G, P_G)$ группа G изоморфна некоторой подгруппе P_{PMGG} мультипликативной группы P_{MGG} поля P_G, а в силу известной теоремы о том, что порядок любой подгруппы конечной группы является делителем порядка группы, число (p – 1) должно делиться на число g элементов группы G.

Точно также, как и в случае поля C комплексных чисел, можно рассмотреть корни степени g в конечной мультипликативной подгруппе P_{PMGG}. В самом деле, пусть элемент подгруппы $\varepsilon \in P_{PMGG}$ имеет максимальный порядок, тогда

$$\varepsilon^g = 1. \tag{7}$$

Из (7) формально можно записать

$$\varepsilon = \sqrt[g]{1}. \tag{8}$$

Если P_{PMGG} – циклическая прямонеразложимая группа, то она имеет ровно g корней. Формально, если известно одно решение ε_i уравнения (8), то все остальные можно найти с помощью соотношения

$$\varepsilon_k = \varepsilon_i^k, \quad k = 0, 1, ..., g–1. \tag{9}$$

Теорема 1. Если ε_i является решением уравнения (7) для циклической прямонеразложимой группы порядка g, то $\varepsilon_k = \varepsilon_i^k$, k = 0, 1, ..., g–1, также является решением этого уравнения.

Доказательство.

Если ε_i есть решение уравнения (7), то это означает выполнение условия

$$\varepsilon_i^g = 1.$$

Аналогичные условия должны выполняться и для других решений, т.е. для любого $\varepsilon_k = \varepsilon_i^k$, k = 0, 1, ... , g–1, необходимо:

$$\varepsilon_k^g = (\varepsilon_i^k)^g = 1.$$

Но это действительно так, поскольку

$$(\varepsilon_i^k)^g = \varepsilon_i^{kg} = (\varepsilon_i^g)^k = 1^k = 1.$$

Аналогичная теорема может быть доказана для аддитивной группы G, изоморфной мультипликативной подгруппе P_{PMGG}.

Все основные рассуждения при этом остаются в силе, меняется только форма записи исходного уравнения (7) и других соотношений, поскольку кратные элементы ε обозначаются $m\varepsilon$, а не ε^m. Точно также, как каждый элемент мультипликативной подгруппы P_{PMGG} является корнем уравнения (7) (или уравнения (8)), каждый элемент аддитивной группы G является решением аналогичного аддитивного уравнения. Каждому решению ε_i, $i = \overline{1,g}$, этого уравнения (или каждому элементу группы G) можно взаимооднозначно поставить в соответствие характер $\varphi_\alpha(x)$, $\alpha = 0, 1, ..., g–1$; $x \in G$, группы G:

$$\varphi_\alpha(x) = \varepsilon^{\alpha x}, \tag{10}$$

где ε – первообразный элемент, принадлежащий полю Галуа, т.е. это элемент, для которого выполняется условие

$$T(\varepsilon, p) = \varphi_э(p).$$

Здесь $\gamma = T(\varepsilon, p)$ – период или показатель, которому элемент ε принадлежит по модулю p:

$$\varepsilon^\gamma \equiv 1 \pmod p, \tag{11}$$

т.е. γ – наименьшее положительное число, при котором выполняется соотношение (11); $\varphi_э(p)$ – функция Эйлера, т.е. число целых положительных чисел, не превосходящих p и взаимно простых с p. Если p – простое число, то $\varphi_э(p) = p–1$.

Поле Галуа может содержать несколько первообразных элементов. В этом случае соотношение (10) порождает изоморфные группы характеров.

Пример 3. Рассмотрим систему характеров группы $G = G(\{0, 1, ..., 5\}, \langle + \rangle_K)$ порядка шесть над полем Галуа $P_G(7)$. Нетрудно убедиться с помощью табл. 3, в которой приведены степени элементов группы G, что первообразными элементами, принадлежащим полю $P_G(7)$ в нашем примере являются элементы $\varepsilon_1 = 3$, $\varepsilon_2 = 5$. Результаты построения системы характеров по соотношениям

$$\varphi_\alpha(x) = 3^{\alpha x} \pmod 7, \qquad (12)$$

$$\varphi_\alpha(x) = 5^{\alpha x} \pmod 7 \qquad (13)$$

приведены в табл. 4, 5.

Из сопоставления табл. 4 и 5 видно, что соотношения (12), (13) породили два изоморфных множества характеров.

С помощью табл. 4 (или табл. 5) несложно проверить, что при любом α имеет место основное свойство (5) характеров:

$$\varphi_\alpha(x_1 \langle + \rangle_K x_2) = \varphi_\alpha(x_1) \langle \times \rangle_K \varphi_\alpha(x_2). \qquad (14)$$

Таблица 3

Степени элементов группы G

Элемент группы G	Степени элементов группы G					
	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	2	4	1	2	4	1
3	3	2	6	4	5	1
4	4	2	1	4	2	1
5	5	4	6	2	3	1

Таблица 4

Система характеров (соотношение (12))

$\varphi_\alpha = 3^{\alpha x}$	x					
	0	1	2	3	4	5
φ_0	1	1	1	1	1	1
φ_1	1	3	2	6	4	5
φ_2	1	2	4	1	2	4
φ_3	1	6	1	6	1	6
φ_4	1	4	2	1	4	2
φ_5	1	5	4	6	2	3

Таблица 5

Система характеров (соотношение (13))

$\varphi_\alpha = 5^{\alpha x}$	x					
	0	1	2	3	4	5
φ_0	1	1	1	1	1	1
φ_1	1	5	4	6	2	3
φ_2	1	4	2	1	4	2
φ_3	1	6	1	6	1	6
φ_4	1	2	4	1	2	4
φ_5	1	3	2	6	4	5

Для $\alpha = 0$ соотношение (14) очевидно, т.к. $\varphi_0(x) \equiv 1$ и $\varphi_2(0) \equiv 1$. Для $\alpha = 1$ это следует из табл. 6, где каждой возможной сумме $x_1 \langle + \rangle_K x_2$ по модулю шесть приведены значения $\varphi_1(x_1 \langle + \rangle_K x_2)$, $\varphi_1(x_1)$, $\varphi_1(x_2)$, $\varphi_\alpha(x_1) \langle \times \rangle_K \varphi_\alpha(x_2)$ в соответствии с расположением, изображенном на рис. 1.

Очевидно, что несложно построить таблицы, аналогичные табл. 6 и доказывающие равенство (14), и при $\alpha \geq 2$.

Теорема 2. Множество $\Phi = \{\varphi_0(x), \varphi_1(x), ..., \varphi_{p-1}(x)\}$, характеров (10) относительно операции умножения "$\bullet$" $\equiv$ "$\langle \times \rangle_K$" образует коммутативную группу.

Доказательство.

Покажем, что множество Φ характеров с операцией умножения удовлетворяет всем аксиомам коммутативной группы:

1. Множество характеров замкнуто относительно операции умножения, т.е. для любых $\alpha, \beta \in \{0,1, ..., p-1\}$ справедливо

$$\varphi_\alpha(x) \bullet \varphi_\beta(x) = \varphi_{\alpha \oplus \beta}(x), \quad \varphi_{\alpha \oplus \beta}(x) \in \Phi, \qquad (15)$$

но это действительно так, поскольку множество $\{1, 2, ..., p-1\}$ совместно с операцией умножения $\langle \times \rangle_K$ является мультипликативной группой, а поскольку эта группа еще и абелева, то и выражение (15) справедливо при любом порядке сомножителей в левой части выражения (15), т.е. операция умножения характеров "$\bullet$" $\equiv$ "$\langle \times \rangle_K$" коммутативна.

Таблица 6

Доказательство (14) для $\alpha = 1$

<table>
<tr><th>x_2 / x_1</th><th colspan="2">0</th><th colspan="2">1</th><th colspan="2">2</th><th colspan="2">3</th><th colspan="2">4</th><th colspan="2">5</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0
1 1</td><td>1
1</td><td>1
1 3</td><td>3
3</td><td>2
1 2</td><td>2
2</td><td>3
1 6</td><td>6
6</td><td>4
1 4</td><td>4
4</td><td>5
1 5</td><td>5
5</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1
3 1</td><td>3
3</td><td>2
3 3</td><td>2
2</td><td>3
3 2</td><td>6
6</td><td>4
3 6</td><td>4
4</td><td>5
3 4</td><td>5
5</td><td>0
3 5</td><td>1
1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2
2 1</td><td>2
2</td><td>3
2 3</td><td>6
6</td><td>4
2 2</td><td>4
4</td><td>5
2 6</td><td>5
5</td><td>0
2 4</td><td>1
1</td><td>1
2 5</td><td>3
3</td></tr>
<tr><td>3</td><td>3
6 1</td><td>6
6</td><td>4
6 3</td><td>4
4</td><td>5
6 2</td><td>5
5</td><td>0
6 6</td><td>1
1</td><td>1
6 4</td><td>3
3</td><td>2
6 5</td><td>2
2</td></tr>
<tr><td>4</td><td>4
4 1</td><td>4
4</td><td>5
4 3</td><td>5
5</td><td>0
4 2</td><td>1
1</td><td>1
4 6</td><td>3
3</td><td>2
4 4</td><td>2
2</td><td>3
4 5</td><td>6
6</td></tr>
<tr><td>5</td><td>5
5 1</td><td>5
5</td><td>0
5 3</td><td>1
1</td><td>1
5 2</td><td>3
3</td><td>2
5 6</td><td>2
2</td><td>3
5 4</td><td>6
6</td><td>4
5 5</td><td>4
4</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td colspan="3">$x_2 = x_2^*$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$x_1 = x_1^*$</td><td colspan="2">$x_1^* \oplus x_2^* \pmod 6$</td><td>$\phi_1(x_1^* \oplus x_2^*)$</td></tr>
<tr><td>$\phi_1(x_1^*)$</td><td>$\phi_1(x_2^*)$</td><td>$\phi_1(x_1^*) \otimes \phi_1(x_2^*) \pmod 7$</td></tr>
</table>

Рис. 1. Значения $\varphi_1(x_1 \langle + \rangle_K x_2)$, $\varphi_1(x_1)$, $\varphi_1(x_2)$, $\varphi_\alpha(x_1) \langle \times \rangle_K \varphi_\alpha(x_2)$, соответствующие каждой возможной сумме $x_1 \langle + \rangle_K x_2$ по модулю шесть

2. Множество Φ характеров содержит левую единицу $E \equiv \varphi_0(x)$, такую, что для каждого $\varphi_i(x) \in \Phi$ выполняется соотношение

$$\varphi_0(x) \bullet \varphi_i(x) = \varphi_i(x).$$

3. 3) Для каждого характера $\varphi_i(x) \in \Phi$ существует левый обратный характер $\varphi_i^{-1}(x)$, такой, что

$$\varphi_i^{-1}(x) \bullet \varphi_i(x) = \varphi_0(x).$$

Действительно, поскольку $(\{1, 2, ..., p-1\}, \langle\times\rangle_K)$ – есть абелева группа, то для любого $I \in \{1, 2, ..., p-1\}$ существует обратный элемент $j = i^{-1}$, такой, что

$$i^{-1} \langle\times\rangle_K\, i = j \langle\times\rangle_K\, i = 1, \quad i, j, i^{-1} \in \{1, 2, ..., p-1\},$$

следовательно, для любого характера $\varphi_i(x) \in \Phi$ существует характер $\varphi_i^{-1}(x) = \varphi_j(x) \in \Phi$, такой, что

$$\varphi_j(x) \bullet \varphi_i(x) = \varphi_{j \oplus i}(x) = \varphi_0(x).$$

4. Для любых характеров $\varphi_\alpha(x)$, $\varphi_\beta(x)$, $\varphi_\gamma(x) \in \Phi$ выполняется ассоциативный закон, т.е.

$$(\varphi_\alpha(x) \bullet \varphi_\beta(x)) \bullet \varphi_\gamma(x) = \varphi_\alpha(x) \bullet (\varphi_\beta(x) \bullet \varphi_\gamma(x)).$$

Очевидно, что этот закон следует из выполнения ассоциативного закона для элементов $\alpha, \beta, \gamma \in \{1, 2, ..., p-1\}$ мультипликативной группы $(\{1, 2, ..., p-1\}, \langle\times\rangle_K)$.

Характеры $\varphi_\alpha(x)$, $\alpha = 0, 1, ..., g-1$; $x \in G$, группы G пространства $L(G, P_G)$, где P_G – поле Галуа, образуют ортонормированный базис [16], т.е. любую функцию $Z(x)$, определенную на группе G и принимающую значения в поле P_G, можно представить в виде конечной суммы

$$Z(x) = \sum_{\alpha=0}^{g-1} A(\alpha)\varphi_\alpha(x), \qquad (16)$$

где

$$A(\alpha) = \frac{1}{g}\sum_{x=0}^{g-1} Z(x)\varphi_\alpha^{-1}(x), \qquad (17)$$

а арифметические операции понимаются как операции поля Галуа.

Из соотношений (16), (17) следует, что решение любого K-значного линейного обыкновенного дифференциального уравнения вида (4) можно представить взвешенной линейной комбинацией соответствующих характеров. Однако эта линейная комбинация содержит g неизвестных коэффициентов $A(\alpha)$, $\alpha = 0, 1, ..., g-1$, определение которых в общем случае представляет собой отдельную задачу. Однако при решении отдельных классов задач с использованием K-значных уравнений вида (4) соотношения (16), (17) могут использоваться весьма эффективно. Примером такого класса задач служат задачи аппроксимации непрерывных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений K-значными обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Пример 4. Рассмотрим определение аналитического решения K-значного дифференциального уравнения

$$\frac{dZ}{dX} + aZ = 0, \qquad (18)$$

аппроксимирующего линейное непрерывное однородное дифференциальное уравнение, заданное на интервале [0, 5] с начальными условиями x_0, z_0:

$$\frac{dz}{dx} + \lambda z = 0, \quad x_0 = 0, \; z(0) = 6, \; \lambda = 1. \qquad (19)$$

С помощью формул (2), (3) непрерывную функцию $z = z(x)$ уравнения (19) можно представить в виде

$$z(x) = z_0 e^{-\lambda x} = 6e^{-x}.$$

Численное значение функции $z(x)$ при $x = 0, 1, ..., 5$ приведены во второй строке табл. 7.

Таблица 7

Значения функции z(x)

x	0	1	2	3	4	5
z	6	2,207	0,812	0,298	0,110	0,040
Z	6	2	1	0	0	0

Потребуем, чтобы аппроксимирующая дискретная функция Z, получаемая из уравнения (18), была определена на множестве {0, 1, ..., 5} и принимала значения из множества {0, 1, ..., 6} в соответствии с табл. 7. В этом случае аналитическое выражение для функции Z легко находится с помощью соотношений (16), (17).

Для рассматриваемого примера константа g, входящая в указанное выражение, равна шести, а характеры $\varphi_\alpha(x)$, $\alpha = 0, 1, ..., g-1$, приведены в табл. 4, арифметические операции понимаются как операции по модулю 7.

Рассчитаем вначале коэффициенты $A(\alpha)$, $\alpha = 0, 1, ..., g-1$, входящие в формулу (16). В соответствии с выражением (17) и табл. 4 и 7 имеем:

$$A(0) = \frac{1}{6}\sum_{x=0}^{5} Z(x) \langle\times\rangle_K \varphi_0^{-1}(x) =$$

$$= \frac{1}{6} \langle\times\rangle_K (6 \langle\times\rangle_K 1 \langle+\rangle_K 2 \langle\times\rangle_K 1 \langle+\rangle_K 1 \langle\times\rangle_K 1 \langle+\rangle_K \langle+\rangle_K 0 \langle\times\rangle_K 1 \langle+\rangle_K 0 \langle\times\rangle_K 1 \langle+\rangle_K 0 \langle\times\rangle_K 1) = 5.$$

Аналогично получаем:

$$A(1) = 1;\; A(2) = 5;\; A(3) = 2;\; A(4) = 0;\; A(5) = 0.$$

Подставляя значения коэффициентов $A(\alpha)$ в выражение (16), получим

$$Z(x) = 5 \langle\times\rangle_K \varphi_0(x) \langle+\rangle_K \varphi_1(x) \langle+\rangle_K 5 \langle\times\rangle_K \varphi_2(x) \langle+\rangle_K 2 \langle\times\rangle_K \varphi_3(x).$$

Нетрудно убедиться с помощью табл. 4, что функция z(x) принимает значения в соответствии с табл. 7, например:

$$z(0) = 5 \langle\times\rangle_K \cdot 1 \langle+\rangle_K 1 \langle+\rangle_K 5 \langle\times\rangle_K 1 \langle+\rangle_K 2 \langle\times\rangle_K 1 = 6,$$

$$z(1) = 5 \langle\times\rangle_K 1 \langle+\rangle_K 3 \langle+\rangle_K 5 \langle\times\rangle_K 2 \langle+\rangle_K 2 \langle\times\rangle_K 6 = 2,$$

$$z(2) = 5 \langle\times\rangle_K 1 \langle+\rangle_K 2 \langle+\rangle_K 5 \langle\times\rangle_K 4 \langle+\rangle_K 2 \cdot\langle\times\rangle_K 1 = 1$$

и т.д.

Выводы

Рассмотренные в статье возможности решения линейных дифференциальных уравнений с помощью характеров конечных абелевых групп с использованием *K*-значного алфавита показывают новые возможности моделирования цифровых элементов и устройств в системе *K*-значного моделирования. Такое моделирование дает новые перспективы исследования работоспособности при автоматизированном проектировании современных быстродействующих устройств, имеющих повышенную степень интеграции.

Список литературы

1. Разевиг В.Д. Применение программ P-CAD и PSpice для схемотехнического моделирования на ПЭВМ: В 4 вып. / В.Д. Разевиг. – М.: Радио и связь, 1992. – 234 с.

2. Разевиг В.Д. Система проектирования цифровых устройств OrCAD / В.Д. Разевиг. – М.: Солон, 2000. – 160 с.

3. Суворова Е.А. Проектирование цифровых систем на VHDL / Е.А. Суворова, Ю.Е. Шейнин. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003. – 57 с.

4. Разевиг В.Д. Система схемотехнического моделирования MICRO-CAP 5 / В.Д. Разевиг. – М.: СОЛОН, 1997 – 152 с.

5. Бохманн Д. Двоичные динамические системы // Д. Бохманн, Х. Постхоф. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 400 с.

6. Бохманн Д. Логическое дифференциальное исчисление: достижения, тенденции и приложения // Д. Бохманн, Р. Станкович, Ж. Тошич, В. Шмерко, С. Янушкевич // Автоматика и телемеханика. – 2000. – № 6. – С. 156 – 170.

7. Зайцева Е.Н. Анализ значимости элементов структурно-сложной системы с помощью логического дифференциального исчисления / Е.Н. Зайцева, В.Г. Леващенко // Автоматика и телемеханика. – 2013. – № 2. – С. 6 – 21.

8. Zaitseva E. Importance Analysis of Multi-State System by tools of Diferential Logical Calculus / Reliability, Risk and Safety. Theory and Applications. – CRC Press. – 2010. – P. 1579 – 1584.

9. Posthoff C. Logic Functions and Equitions. Binary Models for Computer Science / C. Posthoff, B. Steinbach. – Berlin: Sbringer, 2003.

10. Steinbach B. Logic Functions and Equitions. Examples and Exercises / B. Steinbach, C. Posthoff. – Berlin: Sbringer, 2009.

11. Чернов А.В. Развитие аппарата логического дифференциального исчисления в применении к задачам проектирования и диагностики телекоммуникационных систем / А.В. Чернов // Науч.-техн. ведомости Санкт-Петербургского гос. политехн. ун.-та. – 2008. – № 2. – С. 30 – 48.

12. Дмитриенко В.Д. K-значное дифференциальное исчисление и моделирование цифровых устройств // В.Д. Дмитриенко, С.Ю. Леонов. – Х.: Транспорт Украины, 1999. – 223 с.

13. Dmitrienko V.D. Research digital devices by means of modeling system on the basis of K-Value differential calculus / V.D. Dmitrienko, S.Yu. Leonov, T.V. Gladkikh // Radioelectronics & Informatics. – № 1. – 2008. – P. 63 – 69.

14. Dmitrienko V.D. Research digital devices by means of modeling system on the basis of K-Value differential calculus / V.D. Dmitrienko, S.Yu. Leonov, T.V. Gladkikh // Radioelectronics & Informatics. – № 1. – 2008. – P. 63 – 69.

15. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / И.Г. Петровский. – М.: Наука, 1970. – 279 с.

16. Вариченко Л.В. Абстрактные алгебраические системы и цифровая обработка сигналов / Л.В. Вариченко, В.Г. Лабунец, М.А. Раков. – К.: Наукова думка, 1986. – 247 с.

Поступила в редколлегию 29.03.2012

Рецензент: д-р техн. наук проф. В.Д. Дмитриенко, Национальный технический университет «ХПИ», Харьков.

ВИРІШЕННЯ ЛІНІЙНИХ *K-ЗНАЧНИХ* ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗА ДОПОМОГОЮ ХАРАКТЕРІВ КІНЦЕВИХ АБЕЛЕВИХ ГРУП

С.Ю. Леонов

У статті розглядається метод рішення лінійних K-значних диференційних рівнянь за допомогою характерів абелевих груп, який може бути використаний при моделюванні цифрових елементів і пристроїв в системі K-значного моделювання. Таке моделювання дає нові перспективи проектування складних пристроїв, виконаних на елементах з підвищеною мірою інтеграції.

Ключові слова: *метод рішення, лінійні K-значні диференційні рівняння, характери кінцевих абелевих груп, моделювання цифрових елементів і пристроїв, система K-значного моделювання.*

DECISION *OF* LINEAR *K-ЗНАЧНЫХ* OF DIFFERENTIAL EQUALIZATIONS BY CHARACTERS OF EVENTUAL ABELE GROUPS

S.Yu. Leonov

In the article the method of solution the linear K-Value differential equations by means of characters of abele groups which can be used when modeling digital elements and devices in system of K-Value modeling by the raised extent of integration is considered. Such modeling gives new prospects of design difficult devices executed on elements with raised extent of integration.

Keywords: *decision method, linear K-Value differential equations, characters of final abele groups, modeling digital elements and devices, system of K-Value modeling.*