

УДК 519.85

О.В. Серая

Национальный технический университет «ХПИ», Харьков

## ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ВРЕМЕННОГО РЯДА, ЗАДАННОГО ВЕЙВЛЕТ-АППРОКСИМАЦИЕЙ

Предложена методика прогнозирования временного ряда, заданного в виде вейвлет-аппроксимация. С использованием имитационной модели проведена оценка точности прогноза в зависимости от вариабельности исходного ряда и длины интервала прогноза. Сформулированы рекомендации по практическому применению предложенной технологии в реальных задачах прогнозирования временных рядов.

**Ключевые слова:** прогнозирование временных рядов, вейвлет-аппроксимация, оценка точности прогнозирования.

### Введение

Решение большого числа различных задач в технике, экономике, медицине, социологии и т.д. существенно опирается на возможность прогнозирования поведения какого-либо наблюдаемого параметра. Традиционная технология решения этой задачи состоит в следующем. Формируется математическая модель, описывающая поведение наблюдаемого процесса, параметры которой оцениваются статистически по результатам наблюдений. Если на основании априорных соображений предположительно адекватной моделью поведения параметра является, например, нормальный случайный процесс

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(t)} \exp\left\{-\frac{(x - m(t))^2}{2\sigma^2(t)}\right\}, \quad (1)$$

где  $m(t)$ ,  $\sigma^2(t)$  неизвестные функции, описывающие изменение во времени математического ожидания и дисперсии процесса, и имеются наблюдения процесса  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  в моменты времени  $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ , то аналитическое описание функций  $m(t)$  и  $\sigma^2(t)$  может быть получено методом максимума правдоподобия [1,2]. При этом функции  $m(t)$  и  $\sigma^2(t)$  обычно задаются в классе полиномов  $m(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_{d_m} t^{d_m}$ ,  $\sigma^2(t) = b_0 + b_1 t + \dots + b_{d_\sigma} t^{d_\sigma}$ , (2) после чего формируется функция правдоподобия

$$P(X, T) = \prod_{j=1}^n f(x_j, t_j) = \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{d_\sigma} b_i t_j^i\right)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{\left(x_j - \sum_{i=0}^{d_m} a_i t_j^i\right)^2}{2 \sum_{i=0}^{d_\sigma} b_i t_j^i}\right\}. \quad (3)$$

Функция правдоподобия обычно логарифмируется и получаемая при этом функция в дальнейшем оптимизируется по неизвестным параметрам  $A = \{a_0, a_1, \dots, a_{d_m}\}$  и  $B = \{b_0, b_1, \dots, b_{d_\sigma}\}$  описаний (2).

Задача несколько упрощается, если наблюдаемый процесс является эргодическим и имеются несколько его реализаций. Тогда появляется возможность независимой оценки значений  $m(t)$  и  $\sigma^2(t)$  в каждом из временных сечений  $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ . При этом получают наборы

$$M = \{\hat{m}_1, \hat{m}_2, \dots, \hat{m}_n\}, \quad D = \{\hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2, \dots, \hat{\sigma}_n^2\},$$

и параметры  $A$  и  $B$  отыскиваются методом наименьших квадратов [3]. Для этого вводятся матрицы

$$H_m = \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^{d_m} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \dots & t_2^{d_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \dots & t_n^{d_m} \end{pmatrix}, \quad H_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^{d_\sigma} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \dots & t_2^{d_\sigma} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \dots & t_n^{d_\sigma} \end{pmatrix},$$

векторы

$$A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_{d_m} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \dots \\ b_{d_\sigma} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \hat{m}_1 \\ \hat{m}_2 \\ \dots \\ \hat{m}_n \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_1^2 \\ \hat{\sigma}_2^2 \\ \dots \\ \hat{\sigma}_n^2 \end{pmatrix},$$

формируются функционалы наименьших квадратов:

$$I_A = (M - H_m A)^T (M - H_m A), \\ I_B = (D - H_\sigma B)^T (D - H_\sigma B).$$

Соответствующие МНК-оценки векторов  $A$  и  $B$  определяются по формулам

$$\hat{A} = (H_m^T H_m)^{-1} H_m^T M, \quad \hat{B} = (H_\sigma^T H_\sigma)^{-1} H_\sigma^T D. \quad (4)$$

К сожалению, во многих практических случаях описанные простые вычислительные процедуры не могут быть реализованы: во-первых, вследствие

отсутствия достаточных оснований для принятия гипотезы о нормальности наблюдаемого процесса, а во-вторых, из-за невозможности получения нескольких независимых его реализаций. Возможный путь преодоления возникающей здесь проблемы состоит в использовании вейвлет-аппроксимации наблюдаемого процесса. Новая проблема, которая при этом появляется, связана с трудностями непосредственного прогнозирования процесса, описанного вейвлет – рядом.

**Целью работы** является обоснование возможности прогнозирования поведения наблюдаемого процесса с использованием его вейвлет-аппроксимации и оценка точности предложенной технологии прогнозирования.

### Постановка задачи

Технология вейвлет–аппроксимации наблюдаемого процесса многократно описана [4 – 6] и состоит в разбиении приближения к наблюдаемому процессу на две составляющие – аппроксимирующую (грубую) и детализирующую с их последующим итерационным уточнением.

Для аппроксимации наблюдаемого процесса используется система функций, получаемых из так называемой порождающей функции с помощью целочисленных сдвигов. При этом система функций  $\phi(x - n)$ ,  $n \in Z$ , получаемых из порождающей функции  $\phi(x)$ , образует ортонормированный базис [4] и должна удовлетворять уравнению:

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_{n \in Z} h_n \phi(2x - n),$$

где  $\phi(2x - n)$  – функция, получаемая из  $\phi(x)$  путем масштабируемого сдвига. Точно так же ортонормированный базис образует другая система функций.

$$\phi_{j,n} = \sqrt{2^j} \phi(2^j x - n), \quad j = 1, 2, \dots,$$

Совокупность систем функций  $\phi_{j,n}(x)$ ,  $j \in N$ , используется для описания произвольной функции  $f(x)$  путем ее разложения по элементам ортогональных базисов  $\phi_{j,n}(x)$ . Разложение  $f(x)$ , полученное с применением операторов ортогонального проектирования, имеет вид:

$$P_j(f(x)) = \sum_{n \in Z} (f(x), \phi_{j,n}(x)) \cdot \phi_{j,n}(x), \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\begin{aligned} (f(x), \phi_{j,n}(x)) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \phi_{j,n}(x) dx = \\ &= \sqrt{2^j} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \phi(2^j x - n) dx. \end{aligned}$$

При этом, поскольку функция  $f(x)$  задана набором ее значений  $\{f_{0n}\}$ ,  $n \in Z$ , то

$$P_0(f(x)) = \sum_{n \in Z} (f(x), \phi_{0,n}(x)) \cdot \phi_{0,n}(x) = \sum_{n \in Z} f_{0n} \phi(x - n)$$

есть кусочно-постоянная функция, принимающая значение  $f_{0n}$  на промежутке  $[n, n + 1)$ , приближенно описывающая  $f(x)$ . Увеличение индекса оператора проектирования улучшает точность приближения функции. При этом более точное приближение  $P_{j+1}(f(x))$  является результатом суммирования приближения  $P_j(f(x))$  и дополнения – слагаемого  $P_j^W(f(x))$ , отражающего уточнение при переходе от  $P_j(f(x))$  к  $P_{j+1}(f(x))$ , т.е.

$$P_{j+1}(f(x)) = P_j(f(x)) + P_j^W(f(x)).$$

Аналитическое описание уточняющего разложения получают с использованием другого ортонормированного набора базисных функций – вейвлетов, порождающая функция  $\psi(x)$  для которых определяется по формуле [1 – 3]

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_n (-1)^n h_{N-n} \phi(2x - n).$$

При этом уточняющее разложение имеет стандартный вид:

$$P_j^W(f(x)) = \sum_{n \in Z} (f(x), \phi_{j,n}(x)) \psi_{j,n}(x),$$

$$(f(x), \psi_{j,n}(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi_{j,n}(x) dx =$$

где

$$-\sqrt{2^j} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi(2^j x - n) dx.$$

Получим разложение  $f(x)$  на некотором уровне  $j_0$ :

$$P_{j_0}(f(x)) = \sum_{k \in Z} a_{j_0-1,k} \phi_{j_0-1,k}(x) + \sum_{k \in Z} d_{j_0-1,k} \psi_{j_0-1,k}(x),$$

$$a_{j_0-1,k} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \phi_{j_0-1,k}(x) dx, \quad d_{j_0-1,k} =$$

где

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi_{j_0-1,k}(x) dx.$$

Обозначим полученные наборы коэффициентов символами  $A_1$  и  $D_1$ :  $A_1 = \{a_{j_0-1,k}\}$ ,  $D_1 = \{d_{j_0-1,k}\}$ ,  $k \in Z$ . Если коэффициенты  $(d_{j_0-1,k})$  заметно отличны от нуля, то процедура уточнения продолжается.

В результате проведения этой процедуры для глубины разложения, равной  $N$ , будет получен аппроксимирующий набор  $A_N = \{a_{j_0-N,k}\}$  и совокупность детализирующих наборов  $D_N = \{d_{j_0-N,k}\}$ ,  $D_{N-1} = \{d_{j_0-N+1,k}\}$ , ...,  $D_1 = \{d_{j_0-1,k}\}$ .

Описанная технология успешно решает задачи интерполяции функций. Однако остается открытым вопрос относительно возможности прогнозирования процесса с использованием его вейвлет – разложения. Эта проблема рассматривалась в [4].

### Основные результаты

Предложенный в [7] подход к решению этой задачи, основан на том обстоятельстве, что аппроксимирующая и детализирующие функции являются существенно более гладкими, нежели исходная функция. Пусть получены сглаженная аппроксимация функции  $f(x)$  и совокупность уточняющих детализаций в виде соответствующих наборов  $A_N, D_N, D_{N-1}, \dots, D_1$ . Эти наборы задают совокупность коэффициентов перед базисными функциями  $\phi_{j_0-N,k}(x)$  и вейвлетами  $\psi_{j_0-s,k}(x), s=1, 2, \dots, N$ . Все эти коэффициенты можно трактовать как отсчеты соответствующих функций, описывающих сглаженную и детализирующие части функции  $f(x)$ . Тогда для каждой из этих функций в отдельности может быть построена соответствующая аппроксимирующая модель, аналитическое описание которой можно получить методом наименьших квадратов. Далее эти модели используются для независимого вычисления величин отсчетов на момент прогноза. Сумма этих отсчетов определяет искомое прогнозное значение функции  $f(x)$ .

Оценку точности предложенной методики прогнозирования временного ряда, представленного его вейвлет-аппроксимацией, проведем с использованием имитационной модели. Введем временной ряд совокупностью отсчетов  $\{f_{0,j}\}, j=1, 2, \dots, n$ , порожаемых нормальным нечетко-случайным процессом

$$f(x, t_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_j}} \exp\left\{-\frac{(x - m_j)^2}{2\sigma_j^2}\right\} \quad (5)$$

в моменты времени  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , где  $m_j$  – нечеткое значение математического ожидания процесса в момент  $t_j$  с функцией принадлежности  $\mu(m)$ ,  $\sigma_j^2$  – нечеткое значение среднего квадратического отношения в момент времени  $t_j$  с функцией принадлежности  $\mu(\sigma)$ .

В качестве функций принадлежности  $\mu_j(m)$  и  $\mu_j(\sigma)$  выберем треугольные функции принадлежности вида

$$\mu_j(m) = \begin{cases} 0, & m < \bar{m} - \Delta_m, \\ (m - (\bar{m} - \Delta_m)) / \Delta_m, & \bar{m} - \Delta_m \leq m < \bar{m}, \\ (\bar{m} + \Delta_m - m) / \Delta_m, & \bar{m} \leq m < \bar{m} + \Delta_m, \\ 0, & m > \bar{m} + \Delta_m, \end{cases} \quad (6)$$

$$\mu_j(\sigma) = \begin{cases} 0, & \sigma < \bar{\sigma} - \Delta_\sigma, \\ (\sigma - (\bar{\sigma} - \Delta_\sigma)) / \Delta_\sigma, & \bar{\sigma} - \Delta_\sigma \leq \sigma < \bar{\sigma}, \\ (\bar{\sigma} + \Delta_\sigma - \sigma) / \Delta_\sigma, & \bar{\sigma} \leq \sigma < \bar{\sigma} + \Delta_\sigma, \\ 0, & \sigma > \bar{\sigma} + \Delta_\sigma. \end{cases} \quad (7)$$

Имитационное моделирование проводилось для следующих значений  $\bar{\sigma}$ :

$$\bar{\sigma}_1 = 0,1\bar{m}, \bar{\sigma}_2 = 0,3\bar{m}, \bar{\sigma}_3 = 0,5\bar{m}.$$

В процессе моделирования сначала для каждого момента времени  $t_j$  с использованием функций принадлежности  $\mu(m)$  и  $\mu(\sigma)$  формировались нечеткие значения  $m_j$  и  $\sigma_j$ . Затем полученные значения применялись при формировании случайного значения  $f_{0,j}$  в этот момент времени  $t_j$ , нормально распределенного в соответствии с (5).

Для получения нечетких чисел с заданной функцией принадлежности использовалась процедура, аналогичная реализованной в известном методе Неймана. Для формирования, например, нечеткого значения  $m$  введем функцию

$$\tilde{\mu}(m) = \mu(m) / \int_{-\infty}^{\infty} \mu(m) dm.$$

Получаемая при этом неотрицательная функция, удовлетворяющая условию нормировки, обладает всеми свойствами плотности распределения случайных величин. Теперь, в соответствии с методом Неймана, используя датчик случайных величин, равномерно распределенных в  $[0,1]$ , формируем сначала случайное число  $\zeta \in [0,1]$  и, затем, случайное число  $\xi$ , равномерно распределенное в  $[\bar{m} - \Delta_m, \bar{m} + \Delta_m]$ . Далее проверяется неравенство  $M(\xi) \leq \zeta$ . Если оно выполняется, то случайное число  $\xi$  распределено в соответствии с плотностью  $\tilde{\mu}(m)$ . В противном случае формируется новая пара случайных величин  $\zeta$  и  $\xi$ .

Процедура получения нечеткого значения  $\sigma$  с функцией принадлежности  $\mu(\sigma)$  аналогична. Для получаемого в результате ряда  $\{f_{0,j}\}$  в соответствии с изложенной выше методикой выполняется вейвлет – аппроксимация, которая используется для прогнозирования. Прогнозные значения вычислялись в точках  $t_{q1} = 1,1t_n, t_{q2} = 1,3t_n$  и  $t_{q3} = 1,5t_n$ . Оценка качества прогноза определялась соотношением

$$\eta_{s,k} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \left( f_{0,qk}^{(s,l)} - f_{qk}^{(l)} \right)^2 / \left( f_{0,qk}^{(s,l)} \right)^2, \quad s, k = 1, 2, 3,$$

где  $f_{0,qk}^{(s,l)}$  – формируемое в  $l$ -й реализации имитационной модели значение временного ряда в сече-

нии  $t_{qk}$  для значения  $\bar{\sigma}_s$  среднего квадратического отклонения,  $s=1,2,3$ ,  $k=1,2,3$ ,  $f_{qk}^{(1)}$  – прогнозируемое значение временного ряда во временном сечении  $t_{qk}$  для значения  $\bar{\sigma}_s$  среднего квадратического отклонения,  $s=1,2,3$ ,  $k=1,2,3$ .

Результаты расчетов приведены на рис. 1.

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы.

1. Предложенная методика прогнозирования вейвлет – ряда решает эту задачу и может быть рекомендована для практического использования.

2. Точность прогноза ухудшается с увеличением уровня вариабельности прогнозируемого ряда и длины интервала прогноза.

3. Для представляющей практический интерес ситуации, когда длина интервала прогноза составляет (10 – 20)% от длины интервала наблюдений, относительная погрешность прогноза является приемлемой.

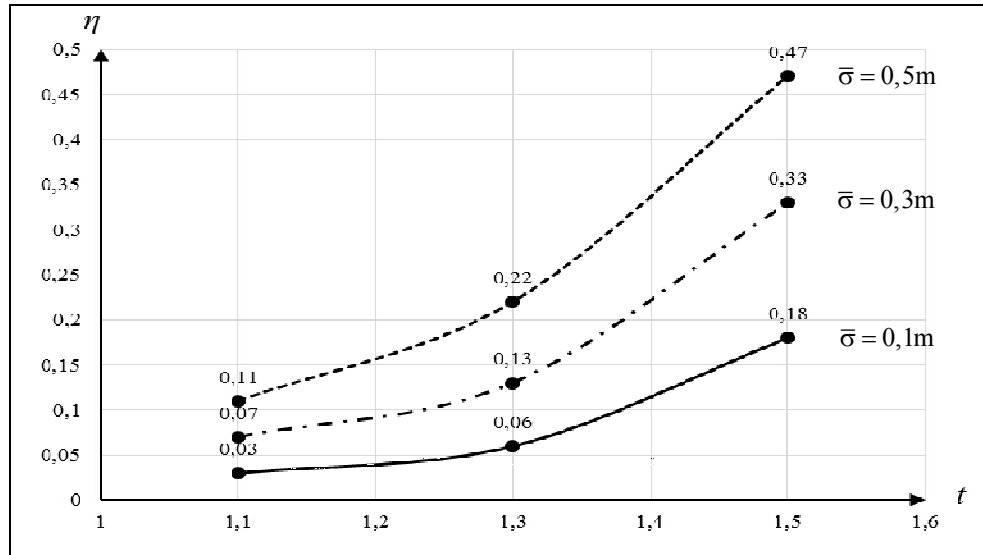


Рис. 1. Зависимость точности прогноза от вариабельности исходного временного ряда и длины интервала прогноза

### Выводы

Таким образом, с использованием имитационного моделирования проведена оценка эффективности прогнозирования временного ряда, представленного вейвлет-аппроксимацией. Показано, что в реальных задачах прогнозирования обеспечивается приемлемая точность решения задачи.

### Список литературы

1. Пугачев В.С. Теория вероятностей и математическая статистика / В.С. Пугачев. – М.: Физматлит, 2002. – 496 с.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 2002. – 479 с.

3. Большаков А.А. Методы обработки многомерных данных и временных рядов / А.А. Большаков, Р.Н. Карманов. – М.: Горячая линия. – Телеком. – 522 с.
4. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам / И. Добеши. – М.: РХД, 2001. – 189 с.
5. Малла С. Вэйвлеты в обработке сигналов: Пер. с англ. / С. Малла. – М.: Мир, 2005. – 671 с.
6. Серая О.В. Многомерные модели логистики в условиях неопределенности / О.В. Серая. – Х.:ФЛ-П Стеценко И.И., 2010. – 512с.
7. Серая О.В. Прогнозирование вейвлет-аппроксимации временного ряда / О.В. Серая // Восточно-европейский журнал перед. технол. – 2011. – № 4/4 (52). – С. 49-51.

Поступила в редколлегию 29.03.2012

Рецензент: д-р техн. наук проф. Л.Г. Раскин, Национальный технический университет «ХПИ», Харьков.

### ОЦІНКА ТОЧНОСТІ ПРОГНОЗУВАННЯ ЧАСОВОГО РЯДУ, ЗАДАНОГО ВЕЙВЛЕТ-АПРОКСИМАЦІЄЮ

О.В. Сіра

Запропоновано методику прогнозування часового ряду, заданого у вигляді вейвлет-апроксимації. З використанням імітаційної моделі проведена оцінка точності прогнозу залежно від варіабельності вихідного ряду і довжини інтервалу прогнозу. Сформульовано рекомендації щодо практичного застосування запропонованої технології в реальних задачах прогнозування часових рядів.

**Ключові слова:** прогнозування часових рядів, вейвлет-апроксимація, оцінка точності прогнозування.

### ASSESSMENT OF THE ACCURACY OF FORECASTING TIME SERIES, GIVEN WAVELET-APPROXIMATION

O.V. Sira

The technique of forecasting time series, given in the form of wavelet - approximation. Using a simulation model evaluated the forecast accuracy depends on the variability of the original series and the length of the interval forecast. Recommendations on the practical application of the proposed technology in real problems for time series prediction.

**Keywords:** prognostication of temporal rows, wavelet-approximation, estimation of exactness of prognostication.