УДК 519.874

Ю.Є. Мегель, А.П. Руденко, І.В. Чалий, С.М. Коваленко

Харківський національний технічний університет сільського господарства імені Петра Василенка, Харків

ОПТИМІЗАЦІЯ ДИСКРЕТНИХ ПОСТАЧАНЬ РЕСУРСУ В РАЗІ НЕРІВНОМІРНОГО БЕЗПЕРЕРВНОГО ЙОГО ВИКОРИСТАННЯ

У даній роботі розглядається задача оптимізації управління величиною і часом дискретних постачань з метою мінімізації загальних витрат коштів на постачання і зберігання ресурсу для деяких випадків нерівномірного безперервного його витрачання, якщо задано кількість постачань, загальний потрібний обсяг всіх постачань, швидкість використання ресурсу, вартість кожного постачання і зберігання одиниці ресурсу за одиницю часу.

***Ключові слова**: математичні моделі, оптимізація, поставка, ресурс.*

Вступ

Незалежно від того, якими є матеріальні потоки по відношенню до підприємства, зовнішніми або внутрішніми, на практиці це створення запасів. Таким чином, запас – це форма існування матеріального потоку [1]. Наявність запасів створює додаткові витрати на їх зберігання, але відсутність запасів – це також витрати, тільки у формі різноманітних збитків [2, 3]. При прийнятті рішень з метою мінімізації витрат незалежно від сфери діяльності виробництва актуальною є задача оптимізації таких витрат [4].

У відомій задачі оптимізації управління величиною дискретних у часі постачань запасів ресурсу з метою мінімізації вартості його постачання і зберігання витрачання ресурсу відбувається рівномірно і безперервно з незмінною швидкістю витрачання q(t)=cons [5]. Але у багатьох випадках потрібно знаходити оптимальне управління величиною і часом дискретних постачань, коли використання ресурсу в часі здійснюється нерівномірно $q(t)\neq const$ [1]. У даній роботі розглядається задача оптимізації управління величиною і часом дискретних постачань з метою мінімізації загальних витрат коштів на постачання і зберігання ресурсу для деяких випадків нерівномірного безперервного його витрачання, якщо задано кількість n постачань, загальний потрібний обсяг всіх постачань Q, швидкість q(t) використання ресурсу, вартість кожного постачання $C_п$ і зберігання $c_з$ одиниці ресурсу за одиницю часу.

Постановка задачі. У загальному вигляді дану задачу можна сформулювати наступним чином: для заданих загального обсягу Q всіх n дискретних постачань і швидкості q(t) безперервного споживання ресурсу (рис. 1) потрібно визначити оптимальні обсяги кожного дискретного постачання S_i, i=0,1,…, n і оптимальні проміжки часу T_i, i=0,1,…, n між сусідніми постачаннями, при яких загальна вартість Z усіх постачань і зберігання ресурсу за розрахунковий період часу T є мінімальною. Якщо на початку T_0 запас ресурсу дорівнює нулю $s_0(0)=0$, кожне постачання S_i здійснюється на початку кожного проміжку T_i після повного витрачання ресурсу від попереднього постачання S_{i-1}, споживання відбувається безперервно зі швидкістю $q(t)=q(0)+at$, тоді, вважаючи $q(0)=0$, можна формулювати загальну вартість всіх постачань і зберігання ресурсу за весь період T у такому вигляді:

$$Z(T_0, T_1, \cdots, T_i, \cdots, T_n) = (n+1)\cdot C_п + c_з \cdot \left[\sum_{i=0}^{n}\int_0^{T_i} s_i(t_i)dt_i\right] =$$

$$= (n+1)\cdot C_п + c_з \cdot \left\{\sum_{i=1}^{n}\int_0^{T_i}\left[S_i - \int_0^{t_i} q_i(t)dt\right]dt_i\right\} \to \min, \quad (1)$$

де $s_i(t_i)$ – залишок запасу ресурсу від i-го постачання S_i, який зберігається в момент t_i в проміжку часу T_i;

S_i – необхідний обсяг постачання ресурсу, який повністю витрачається за час T_i;

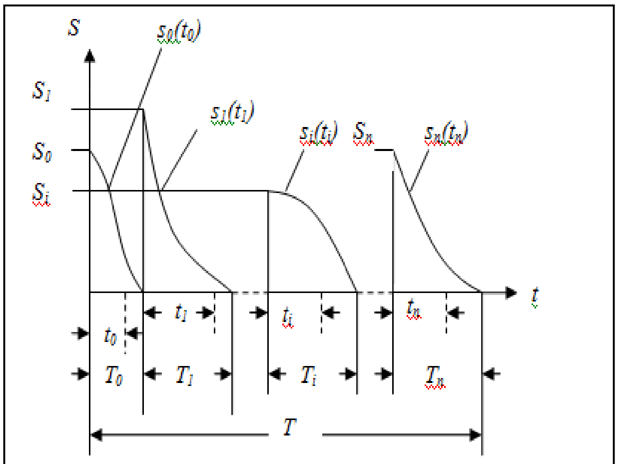

Рис. 1. Вигляд функції загального обсягу Q всіх n дискретних постачань і швидкості q(t) безперервного споживання ресурсу

$$S_i = \int_0^{T_i} q_i(t_i)dt_i\,, \qquad (2)$$

$q_i(t)$ – швидкість витрачання ресурсу в момент t на i-у проміжку часу t_i,

$$q_i(t) = a\left(\sum_{k=0}^{i-1} T_k + t\right),$$

і виконуються умови

$$\sum_{i=0}^{n} T_i = T, \quad \sum_{i=0}^{n} S_i = Q\ . \qquad (3)$$

У випадку q(0) > 0 формула (1) буде більш громіздкою. Розглянемо деякі найпростіші задачі з лінійним зростанням q(t) = q(0) + at, або зменшенням q(t) = q(0) – at швидкості витрачання.

Основна частина

Коли планується тільки одне постачання (n=0) на весь період часу T_0 =T (рис. 2) з лінійно зростаючою швидкістю витрачання q(t)=at (вважаємо, що q(0)=0), тоді очевидно, що це постачання повинно бути виконано на початку періоду T_0 в кількості

$$S_0 = Q = \int_0^{T_0} q(t)dt\,, \qquad (4)$$

а вартість одного постачання і зберігання ресурсу

$$Z(T) = C_п + c_з \cdot \left[\int_0^{T_0} S_0 - \int_0^{t_0} q(t_0)dt_0\right]. \qquad (5)$$

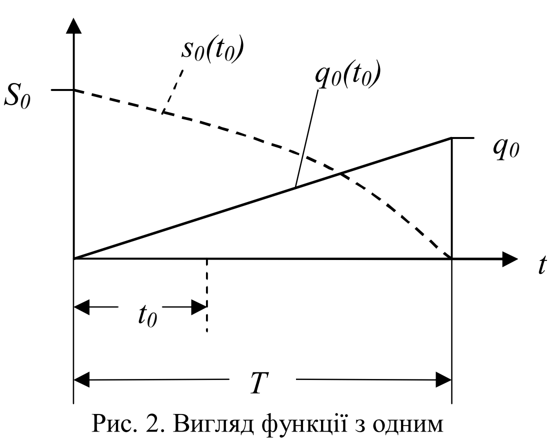

Рис. 2. Вигляд функції з одним постачанням за визначений інтервал часу

Швидкість використання ресурсу в кінці періоду T_0 становить $q_0 = q(T_0) = aT_0$. Визначаємо необхідну і достатню кількість ресурсу в одному постачанні на весь період

$$S_0 = Q = \int_0^{T_0} atdt = \frac{1}{2}aT_0^2 = \frac{q_0^2}{2a}\,,$$

функцію залишку ресурсу

$$s_0(t_0) = S_0 - \int_0^{t_0} atdt = \frac{a}{2}(T_0^2 - t_0^2)$$

і загальну вартість одного постачання і зберігання ресурсу протягом розрахованого часу T_0:

$$Z(T_0) = C_п + c_з \cdot \left[\int_0^{T_0} S_0 - \int_0^{t_0} q(t_0)dt_0\right] =$$

$$= C_п + \frac{1}{2}c_з a\left[\int_0^{T_0}\left(T_0^2 - t_0^2\right)dt_0\right] = C_п + c_з\frac{q_0^3}{3a^2}\,.$$

Якщо планується два постачання (n=1), тоді перше постачання S_0 потрібно виконати на початку першого проміжку часу T_0, а друге S_1 – на початку другого проміжку часу T_1 (рис. 2). До визначення оптимальних значень S_0, S_1, T_0, T_1 запишемо спочатку функції, які необхідні в разі формулювання функції мети (1) (рис. 3):

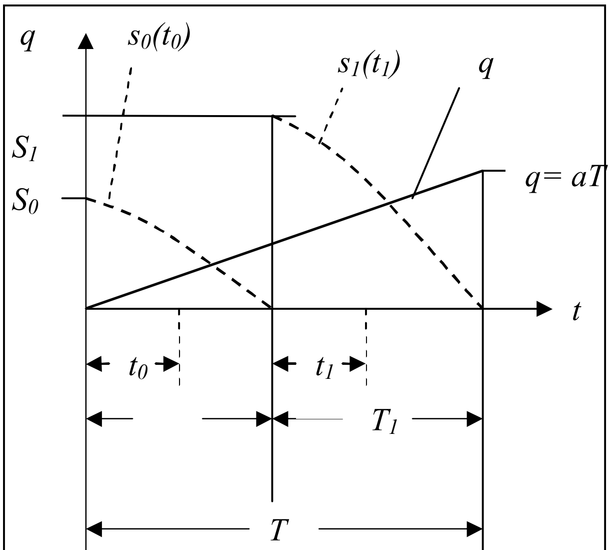

Рис. 3. Вигляд функції з двома постачаннями за різні проміжки часу

$$q_0(t_0) = at_0\,,\ \ q_1(t_1) = a\left(T_0 + t_1\right),\ \ Q = \frac{q^2}{2a}\,, \qquad (5)$$

$$S_0 = \int_0^{T_0} at_0 dt_0 = \frac{aT_0^2}{2},$$

$$S_1 = a\int_0^{T_1}\left(T_0 + t_1\right)dt_1 = aT_1\left(T_0 + \frac{T_1}{2}\right), \qquad (6)$$

$$s_0(t_0) = S_0 - a\int_0^{t_0} tdt = \frac{a}{2}\left(T_0^2 - t_0^2\right)\,, \qquad (7)$$

$$s_1(t_1) = S_1 - a\int_0^{t_1}\left(T_0 + t\right)dt =$$

$$= a\left[T_1\left(T_0 + \frac{T_1}{2}\right) - t_1\left(T_0 + \frac{t_1}{2}\right)\right], \qquad (8)$$

$$Z(T_0, T_1) = 2C_п + c_з a \left\{ \int_0^{T_0} \frac{1}{2}(T_0^2 - t_0^2)dt_0 + \right.$$

$$\left. + \int_0^{T_1} \left[T_1\left(T_0 + \frac{T_1}{2}\right) - t_1\left(T_0 + \frac{t_1}{2}\right) \right] \right\} dt_1;$$

$$= 2C_п + c_з a \left[\frac{T_0^3 + T_1^3}{3} + \frac{T_0 T_1^2}{2} \right] \to \min, \quad (9)$$

$$T_0 + T_1 = \frac{q}{a} = T. \quad (10)$$

Оптимальні значення S_{0opt}, S_{1opt}, T_{0opt}, T_{1opt}, які забезпечують мінімум функції мети (9), можна визначити методом множників Лагранжа. Запишемо функцію Лагранжа для функції (9) і обмеження (10)

$$L(T_0, T_1, \lambda) = 2C_п + c_з a \cdot \left(\frac{T_0^3 + T_1^3}{3} + \frac{T_0 T_1^2}{2} \right) + \\ + \lambda\left(\frac{q}{a} - T_0 - T_1\right), \quad (11)$$

і прирівнюємо нулю всі її похідні

$$\frac{\partial L}{\partial T_0} = T_0^2 + \frac{T_1^2}{2} - \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial T_1} = T_1^2 + T_0 T_1 - \lambda = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{q}{a} - T_0 - T_1 = 0.$$

В системі рівнянь (12) віднімаємо друге рівняння від першого

$$T_0^2 + \frac{T_1^2}{2} - T_1^2 - T_0 T_1 = T_0^2 + \frac{T_1^2}{2} - T_1(T_1 + T_0), \quad (13)$$

і, враховуючи третє рівняння системи (12), отримуємо з (13) квадратне рівняння відносно невідомої T_1:

$$\frac{3}{2}T_1^2 - 3TT_1 + T^2 = 0,$$

з якого знаходимо оптимальні значення T_0 і T_1:

$$T_{0opt} = \frac{q\sqrt{3}}{3a} = \sqrt{\frac{1}{3}}T = 0,577T, \quad (14)$$

$$T_{1opt} = \frac{q\left(3 - \sqrt{3}\right)}{3a} = \left(1 - \sqrt{\frac{1}{3}}\right)T = 0,423T. \quad (15)$$

Підставляємо (12) і (13) у (6) і (9), з яких визначаємо оптимальні значення S_0 і S_1:

$$S_{0opt} = \frac{q^2}{6a}, \quad S_{1opt} = \frac{q^2}{3a} \quad (16)$$

та мінімальне значення функції мети

$$Z_{min} = 2C_п + c_з a \times$$

$$\times \left\{ \left(q\sqrt{3}/(3a)\right)^3 + \left[q\left(3-\sqrt{3}\right)/(3a)\right]^3 \Big/ 3 + \right.$$

$$\left. + \left(q\sqrt{3}/(3a)\right) \cdot \left[q\left(3-\sqrt{3}\right)/(3a)\right]^2 \Big/ 2 \right\} =$$

$$= 2C_п + \frac{c_з q^3}{27a^2}\left(54 - 18\sqrt{3}\right) = 2C_п + \frac{22,8 c_з q^3}{162a^2}. \quad (17)$$

Наведений приклад показує, що аналітичне знаходження оптимального плану постачань вимагає досить трудомістких обчислень. Вразі швидких практичних розрахунків оптимального плану скористаємось додатком «Поиск решения» таблиці Excel, в яку вводимо задані числові значення, функцію мети і обмеження задач. В табл. 1 наведено аркуш Excel пошуку оптимального плану постачань для даного прикладу, результати якого співпадають з результатами по формулах (14) – (17).

Таблиця 1

Аркуш Excel пошуку оптимального плану постачань для даного прикладу

	B	C	D	E	F	G	H	I
2	Розрахунок 2-х оптимальних постачань для q=at							
3			T=	10,00	Сп=	20	Сз=	1
4	q=	10	Q=	50,00				
5	a=	1	S(0)=	16,67	S(1)=	33.33		
6	T(0)=	5,77	T(1)=	4,23	∑T	10	T=	10
7	Z=	180,88						
8	T0/T=	0,58						
9	T1/T=	0,42						

Аналогічне дослідження задачі з двома постачаннями можна виконати для випадку лінійного зменшення швидкості q–at витрачання ресурсу від початкового значення q(0) = q на початку періоду T до нуля в кінці цього періоду, як показано на рис. 4. Записуємо формули для обчислення

$$Q,\ T,\ q_i(t),\ S_i,\ s_i(t_i), i = \overline{0,1},\ Z(T_0, T_1):$$

$$Q = \int_0^T (q - at)dt = \frac{q^2}{2a}, \quad T = \frac{q}{a}, \quad (18)$$

$$q_0(t_0) = q - at_0, \quad q_1(t_1) = q - a(T_0 + t_1),$$

$$S_0 = \int_0^{T_0} q_0(t_0)dt_0 = qT_0 - \frac{aT_0^2}{2} = a\left(TT_0 - \frac{T_0^2}{2}\right), \quad (19)$$

$$S_1 = \int_0^{T_1} q_1(t_1)dt_1 = qT_1 - a(T_0 T_1 + \frac{T_1^2}{2}) =$$

$$= a\left(TT_1 - T_0 T_1 - T_1^2/2\right). \quad (20)$$

$$s_0(t_0) = S_0 - \int_0^{t_0} q_0(t)dt = q(T_0 - t_0) - a\left(\frac{T_0^2 - t_0^2}{2}\right), \quad (21)$$

$$s_1(t_1) = S_1 - \int_0^{t_1} q_1(t)dt = q(T_1 - t_1) + \\ + a\left(T_0 t_1 + t_1^2/2 - T_0 T_1 - T_1^2/2\right), \quad (22)$$

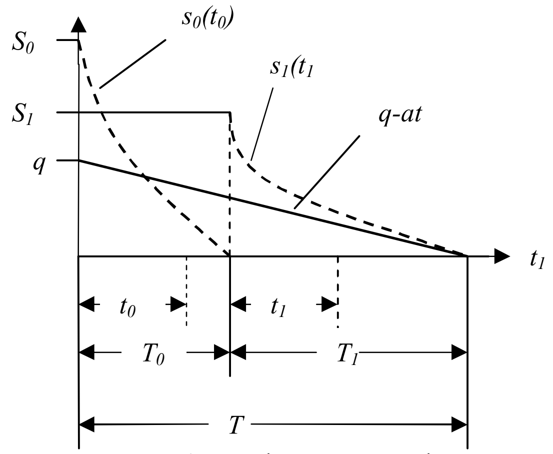

Рис. 4. Дослідження задачі з двома постачаннями

$$Z(T_0,T_1)=2C_п+c_з\cdot\left[\int_0^{T_0}s_0(t_0)dt_0+\int_0^{T_1}s_1(t_1)dt_1\right];$$

$$Z(T_0,T_1)=2C_п+c_з\times$$

$$\times\left[-\frac{a\left(T_0^3+T_1^3\right)}{3}+\frac{q\left(T_0^2+T_1^2\right)}{2}-\frac{aT_0T_1^2}{2}\right]\to\min, \quad (23)$$

$$T_0+T_1=T=q/a. \quad (24)$$

Враховуючи (18), функцію (23) можна записати спрощеному вигляді

$$Z(T_0,T_1)=2C_п+c_зa\times$$

$$\times\left[-\frac{\left(T_0^3+T_1^3\right)}{3}+\frac{T\left(T_0^2+T_1^2\right)}{2}-\frac{T_0T_1^2}{2}\right]\to\min.$$

Записуємо функцію Лагранжа для (23) і (24):

$$L(T_0,T_1,\lambda)=Z(T_0,T_1)+\lambda\left(\frac{q}{a}-T_0-T_1\right). \quad (25)$$

Прирівнюємо нулю всі перші похідні функції (24):

$$\frac{\partial L}{\partial T_0}=c_з(-aT_0^2+qT_0-a\frac{T_1^2}{2})-\lambda=0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial T_1}=c_з(-aT_1^2+qT_1-aT_0T_1)-\lambda=0, \quad (26)$$

$$\frac{\partial L}{\partial\lambda}=\frac{q}{a}-T_0-T_1=0.$$

Розв'язавши систему рівнянь (26), знаходимо

$$T_{0opt}=\frac{q}{3a}=\frac{1}{3}T,\ \ T_{1opt}=\frac{2q}{3a}=\frac{2}{3}T;$$

$$S_{0opt}=\frac{5q^2}{18a},\ \ S_{1opt}=\frac{2q^2}{9a}; \quad (27)$$

$$Z_{min}=5q^2/(54a).$$

Дослідження функції (23) показує, що знайдені значеннях невідомих T_{00pt} і T_{1opt} забезпечують їй мінімум. В табл. 2 показано аркуш Excel з результатами знаходження оптимальних постачань для даної задачі з допомогою додатка «Поиск решения». Вони повністю співпадають з оптимальними значеннями по формулах (27).

Таблиця 2

Результати знаходження оптимальних постачань для даної задачі з допомогою додатка «Поиск решения»

	B	C	D	E	F	G
2	Два оптимальні постачання для q = q(0) – at					
3	T=	10,00	Сп=	10,00	Сз=	1,00
4	q=	40,00	Q=	200,00		
5	a=	4,00	S(0)=	111,11	S(1)=	88,89
6	T(0)=	3,33	T(1)=	6,67	∑T	10,00
7	Z=	390,37				
8	T(0)/T=	0,3333				
9	T(1)/T=	0,6667				

Тепер запишемо загальну модель оптимізації $T_i, S_i, i=\overline{1,n}$ заданої кількості n постачань для лінійного зростання швидкості q = at витрачання ресурсу від нульового значення q(0) = 0 на початку періоду T до кінцевого значення q(T) = aT згідно рис. 5.

Записуємо вирази для обчислення $T, Q, q_i(t)$, $S_i, s_i(t_i), i=\overline{1,n},\ Z(T_0,\cdots,T_i,\cdots,T_n)$ аналогічно формулам (5) – (11):

$$\sum_{i=0}^{n}T_i=T,\ \sum_{0}^{n}S_i=Q=\frac{aT^2}{2}; \quad (28)$$

$$q_0(t_0)=at_0;$$

$$q_i(t_i)=a\left(\sum_{k=0}^{i-1}T_k+t_i\right),\ \ i=\overline{1,n}, \quad (29)$$

$$T_i, S_i, i=\overline{1,n};$$

$$S_0=\int_0^{T_0}q_0(t_0)dt_0=a\int_0^{T_0}t_0dt_0=\frac{aT_0^2}{2};$$

$$s_0(t_0)=S_0-\int_0^{t_0}q_0(t_0)dt_0=S_0-a\int_0^{t_0}t_0dt_0=a\frac{T_0^2-t_0^2}{2};$$

$$s_i(t_i)=S_i-\int_0^{t_i}q_i(t_i)dt_i=aT_i\left(\sum_{k=0}^{i-1}T_k+\frac{T_i}{2}\right)$$

$$-a\left(\int_0^{t_i}\sum_{k=0}^{i-1}T_k+t_i\right)dt_i=aT_i\left(\sum_{k=0}^{i-1}T_k+\frac{T_i}{2}\right)-$$

$$-at_i\left(\sum_{k=0}^{i-1}T_k+\frac{t_i}{2}\right); \quad (31)$$

$$Z(T_0,T_1,\cdots,T_i,\cdots,T_n)=(n+1)C_п+c_зa\int_0^{T_0}s_0(t_0)dt_0+$$

$$+c_зa\sum_{i=1}^{n}\int_0^{T_i}s_i(t_i)dt_i=(n+1)C_п+c_зa\int_0^{T_0}\frac{T_0^2-t_0^2}{2}dt_0+$$

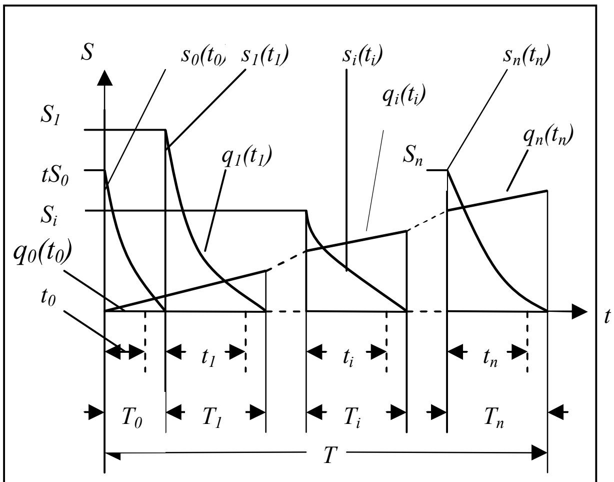

Рис. 5. Загальна модель оптимізації

$$+c_3a\sum_{i=0}^{n}\int_0^{T_i}\left(T_i\sum_{k=1}^{i-1}T_k+\frac{T_i^2}{2}-t_i\sum_{k=0}^{i-1}T_k-\frac{t_i^2}{2}\right)dt_i=$$

$$=(n+1)C_п+c_3a\left(\sum_{i=0}^{n}T_i^3\Big/3+\sum_{i=0}^{n-1}T_i\sum_{k=i+1}^{n}T_k^2\Big/2\right). \quad (32)$$

Записуємо функцію Лагранжа що до функції мети (32) і обмеження (28):

$$L(T_0,T_1,\cdots,T_i,\cdots,T_n,\lambda)=(n+1)C_п+c_3a\int_0^{T_0}s_0(t_0)dt_0+$$

$$+c_3a\sum_{k=0}^{i-1}\int_0^{T_i}s_i(t_i)dt_i+\lambda\left(T-\sum_{i=0}^{n}T_i\right)=$$

$$=(n+1)C_п+c_3a\int_0^{T_0}\frac{T_0^2-t_0^2}{2}dt_0+$$

$$+c_3a\sum_{i=0}^{n}\int_0^{T_i}\left(T_i\sum_{k=1}^{i-1}T_k+\frac{T_i^2}{2}-t_i\sum_{k=0}^{i-1}T_k-\frac{t_i^2}{2}\right)dt_i-$$

$$-\lambda\left(T-\sum_{i=0}^{n}T_i\right)=\lambda\left(T-\sum_{0}^{n}T_i\right)+$$

$$+(n+1)C_п+c_3a\left(\sum_{i=0}^{n}T_i^3\Big/3+\sum_{i=0}^{n-1}T_i\sum_{k=i+1}^{n}T_k^2\Big/2\right) \quad (33)$$

і всі перші похідні по кожній невідомій функції (33), прирівнявши їх рівними нулю:

$$\frac{\partial L}{\partial T_0}=c_3a\left(T_0^2+\sum_{k=1}^{n}T_k^2\Big/2\right)-\lambda=0\,;$$

$$\frac{\partial L}{\partial T_1}=c_3a\left(T_1^2+T_0T_1+\sum_{k=2}^{n}T_k^2\Big/2\right)-\lambda=0\,;$$

$$\frac{\partial L}{\partial T_2}=c_3a\left(T_2^2+(T_0+T_1)T_2+\sum_{k=3}^{n}T_k^2\Big/2\right)-\lambda=0\,;$$

. . . .

$$\frac{\partial L}{\partial T_i}=c_3a\left(T_i^2+T_i\sum_{0}^{i-1}T_k+\sum_{k=i+1}^{n}T_k^2\Big/2\right)-\lambda=0\,; \quad (34)$$

. . . .

$$\frac{\partial L}{\partial T_i}=c_3a\left(T_n^2+T_n\sum_{k=0}^{n-1}T_k\right)-\lambda=0\,;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=T-\sum_{i=0}^{n}T_i=0\,.$$

Розв'язавши систему рівнянь (34), можемо знайти оптимальне рішення даної задачі.

Наведемо приклад знаходження оптимального плану для 4-х постачань, користуючись формулами (32) – (34). По формулі (32) записуємо функцію вартості 4-х постачань і зберігання ресурсу

$$Z(T_0,T_1,T_2,T_3)=4C_п+c_3a\cdot,$$

а також обмеження (28)

$$T_0+T_1+T_2+T_3=\frac{q}{a}=T\,,$$

функцію Лагранжа

$$Z(T_0,T_1,T_2,T_3)=4C_п+c_3a\times$$

$$\times\Big[\Big(T_0\left(T_1^2+T_2^2+T_3^2\right)+T_1\left(T_2^2+T_3^2\right)+T_2T_3^2\Big)\Big/2+$$

$$+\left(T_0^3+T_1^3+T_2^3+T_3^3\right)\Big/3\Big]+\lambda\left(T-T_0-T_1-T_2-T_3\right)$$

і систему рівнянь для всіх перших похідних від функції Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial T_0}=T_0^2+\frac{T_1^2+T_2^2+T_3^2}{2}-\lambda=0\,;$$

$$\frac{\partial L}{\partial T_1}=T_1^2+T_0T_1+\frac{T_2^2+T_3^2}{2}-\lambda=0\,;$$

$$\frac{\partial L}{\partial T_2}=T_2^2+(T_0+T_1)T_2+\frac{T_3^2}{2}-\lambda=0\,;$$

$$\frac{\partial L}{\partial T_3}=T_3^2+(T_0+T_1+T_2)T_3-\lambda=0\,;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=T-T_0-T_1-T_2-T_3=0\,.$$

Як видно з останнього прикладу, обчислювальні труднощі знаходження оптимального рішення стрімко зростають зі збільшенням n. Тому слід скористатися додатком «Поиск решения» електронної таблиці Excel персонального комп'ютера, в якому для пошуку оптимального рішення достатньо ввести в таблицю числові значення заданих параметрів, функцію мети і обмеження задачі. В табл. 3 показано оптимальне рішення для вище наведеного прикладу на аркуші Excel з числовими значеннями заданих параметрів, введеною функцією мети і обмеженням.

Для побудови загальної моделі оптимізації $T_i, S_i, i=\overline{1,n}$ заданої кількості n постачань з лінійним зменшенням швидкості q–at витрачання ресурсу від нульового значення q(0)=aT на початку періоду T до кінцевого значення q(T)= 0 запишемо вирази в разі обчислення $T, Q, q_i(t), S_i, s_i(t_i), i=\overline{1,n}$, $Z(T_0,\cdots,T_i,\cdots,T_n)$, $L(T_0,\cdots,T_i,\cdots,T_n,\lambda)$ аналогічно формулам (18) – (24).

Таблиця 3

Оптимальне рішення для вище наведеного прикладу

	B	C	D	E	F	G	H	I
2	Розрахунок 4-х оптимальних постачань д ля q = at							
3	T0=	3,44	T1=	2,52	T2=	2,13	T3=	1,91
4	q=	10	a=	1	T=	10	∑T	10
5	S0=	5,91	S1=	11,82	S2=	14,99	S3=	17,27
6	Сп=	20	Сз=	1				
7	Z=		143,65					

$$q_0(t_0)=q-at_0=a\left(T-t_0\right);$$
$$q_1(t_1)=q-a(T_0+t_1)=a\left(T-T_0-t_1\right);$$
$$q_2(t_2)=q-a(T_0+T_1+t_2)=a\left(T-T_0-T_1-t_2\right);$$
$$q_3(t_3)=q-a(T_0+T_1+T_2+t_3)=$$
$$=a\left(T-T_0-T_1-T_3-t_3\right);$$
. . . .
$$q_i(t_i)=q-a(\sum_{k=1}^{i-1}T_k+t_i)=a\left(T-\sum_{k=0}^{i-1}T_k-t_i\right);\quad(35)$$
. . . .
$$q_n(t_n)=q-a(\sum_{k=1}^{i-1}T_k+t_n)=a\left(T-\sum_{k=0}^{i-1}T_k-t_i\right);$$
$$S_0=\int_0^{T_0}q_0(t_0)dt_0=a\left(TT_0-\frac{T_0^2}{2}\right);$$
$$S_1=\int_0^{T_1}q_1(t_1)dt_1=a\left(TT_1-T_0T_1-\frac{T_1^2}{2}\right);$$
$$S_2=\int_0^{T_1}q_2(t_2)dt_2=a\left[TT_2-\left(T_0+T_1\right)T_1-\frac{T_2^2}{2}\right];$$
$$S_3=\int_0^{T_1}q_3(t_3)dt_3=a\left[TT_3-\left(T_0+T_1+T_2\right)T_3-\frac{T_3^2}{2}\right];$$
. . . .
$$S_i=\int_0^{T_i}q_i(t_i)dt_i=a\left(TT_i-T_i\sum_{k=0}^{i-1}T_k-\frac{T_i^2}{2}\right);\quad(36)$$
. . . .
$$S_n=\int_0^{T_n}q_n(t_n)dt_n=a\left(TT_n-T_n\sum_{k=0}^{i-1}T_k-\frac{T_n^2}{2}\right);$$
$$s_0\left(t_0\right)=S_0-\int_0^{t_0}q_0(t)dt=a\left(TT_0-\frac{T_0^2}{2}-T_0t_0+\frac{t_0^2}{2}\right);$$
$$s_1\left(t_1\right)=S_1-\int_0^{t_1}q_1(t)dt=$$
$$=a\left(TT_1-T_0T_1-T_1^2/2-Tt_1+t_1T_0+t_1^2/2\right);$$
$$s_2\left(t_2\right)=S_2-\int_0^{t_2}q_2(t)dt=$$
$$=a\left[TT_2-(T_0+T_1)T_2-\frac{T_2^2}{2}-Tt_2+\left(T_0+T_1\right)t_2+\frac{t_2^2}{2}\right];$$
$$s_3\left(t_2\right)=S_3-\int_0^{t_3}q_3(t)dt=$$
$$a\left[TT_3-(T_0+T+T_2)T_3-\frac{T_2^2}{2}-Tt_2+\left(T_0+T_1\right)t_3+\frac{t_3^2}{2}\right];$$
. . . .
$$s_i\left(t_i\right)=S_i-\int_0^{t_i}q_i(t)dt=$$
$$=a\left(TT_i-T_i\sum_{k=0}^{i-1}T_k-\frac{T_i^2}{2}-Tt_i+t_i\sum_{k=0}^{i-1}T_k+\frac{t_1^2}{2}\right);\quad(37)$$
. . . .
$$s_n\left(t_n\right)=S_n-\int_0^{t_i}q_n(t)dt=$$
$$=a\left(TT_n-T_n\sum_{k=0}^{n-1}T_k-\frac{T_n^2}{2}-TT_n+t_n\sum_{k=0}^{n-1}T_k+\frac{t_n^2}{2}\right);$$
$$Z\left(T,T,\cdots,T_i,\cdots,T_n\right)=\left(n+1\right)C_п+c_3a\sum_{i=0}^{n}z_i;\quad(38)$$
$$z_0=\int_0^{T_0}s_0(t_0)dt_0=\int_0^{T_0}\left(TT_0-\frac{T_0^2}{2}-T_0t_0+\frac{t_0^2}{2}\right)dt_0=$$
$$=\left(\frac{TT_0^2}{2}-\frac{T_0^3}{3}\right);$$
$$z_1=\int_0^{T_1}s_1(t_1)dt_1=$$
$$=\int_0^{T_1}\left(TT_1-T_0T_1-\frac{T_1^2}{2}-Tt_1+t_1T_0+\frac{t_1^2}{2}\right)dt_1=$$
$$=\left[\frac{TT_1^2-T_1^2T_0}{2}-\frac{T_1^3}{3}\right];$$
$$z_2=\int_0^{T_2}s_2(t_2)dt_2=\int_0^{T_2}\left[TT_2-(T_0+T_1)T_2-\frac{T_2^2}{2}-\right.$$
$$\left.-Tt_2+\left(T_0+T_1\right)t_2+\frac{t_2^2}{2}\right]dt_2=$$
$$=\left[\frac{TT_2^2-T_2^2\left(T_0+T_1\right)}{2}-\frac{T_2^3}{3}\right];$$
$$z_3=\int_0^{t_2}s_3(t_3)dt_3=\int_0^{T_2}\left[TT_3-(T_0+T_1+T_2)T_3-\frac{T_3^2}{2}-\right.$$
$$\left.-Tt_3+\left(T_0+T+T_2\right)t_3+t_3^2/2\right]dt_3=$$

$$=\left[\frac{TT_3^2-T_3^2\left(T_0+T_1+T_2\right)}{2}-\frac{T_3^3}{3}\right];$$

. . . .

$$z_i=\int_0^{T_i}s_i(t_i)dt_i=$$

$$=\int_0^{T_i}\left[TT_i-T_i\sum_{k=0}^{i-1}T_k-\frac{T_i^2}{2}-Tt_i+\right.$$

$$\left.+\left(T_0+T+T_2\right)t_i+\frac{t_i^2}{2}\right]dt_i=$$

$$=\left[\frac{TT_i^2-T_i^2\sum\limits_{k=0}^{i-1}T_k}{2}-\frac{T_i^3}{3}\right];\qquad(39)$$

. . . .

$$z_n=\int_0^{T_T}s_n(t_n)dt_n=$$

$$=\int_0^{T_n}\left[TT_n-T_n\sum_{k=0}^{n-1}T_k-\frac{T_n^2}{2}-\right.$$

$$\left.-Tt_n+t_n\sum_{k=0}^{n-1}T_k+\frac{t_n^2}{2}\right]dt_n=$$

$$=\left[\frac{TT_n^2-T_n^2\sum\limits_{k=0}^{i-1}T_k}{2}-\frac{T_n^3}{3}\right];$$

$$Z\left(T_0,T_1,\cdots,T_i,\cdots,T_n\right)=\left(n+1\right)C_п+c_зa\times$$

$$\times\left(\frac{TT_0^2}{2}-\frac{T_0^3}{3}+\sum_{i=1}^{n}\left(TT_i^2-T_i^2\sum_{k=o}^{i-1}T_k\right)\Big/2-\frac{T_i^3}{3}\right);\qquad(40)$$

$$\sum_{i=1}^{n}T_i=T.\qquad(41)$$

$$L\left(T_0,T_1,\cdots,T_i,\cdots,T_n,\lambda\right)=\left(n+1\right)C_п+$$

$$+c_зa\left(\frac{TT_0^2}{2}-\frac{T_0^3}{3}+\sum_{i=1}^{n}\left(TT_i^2-T_i^2\sum_{k=o}^{i-1}T_k\right)\Big/2-\frac{T_i^3}{3}\right)+$$

$$+\lambda\left(T-\sum_{i=0}^{n}T_i\right).\qquad(42)$$

$$\frac{\partial L}{\partial T_0}=c_зa\left(TT_0-T_0^2-\sum_{i=1}^{n}T_i^2\Big/2\right)-\lambda=0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial T_1}=c_зa\left(TT_1-T_0T_1-T_1^2\right)-\lambda=0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial T_2}=c_зa\left[TT_2-\left(T_0+T_1\right)T_2-T_2^2\right]-\lambda=0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial T_3}=c_зa\left[TT_3-\left(T_0+T_1+T_2\right)T_3-T_3^2\right]-\lambda=0;$$

. . . . . .

$$\frac{\partial L}{\partial T_i}=c_зa\left(TT_i-T_i\sum_{k=0}^{i-1}T_k-T_i^2\right)=0;\qquad(43)$$

. . . . . .

$$\frac{\partial L}{\partial T_n}=c_зa\left(TT_n-T_n\sum_{k=0}^{n-1}T_k-T_n^2\right)-\lambda=0.$$

$$\frac{\partial L}{\partial\lambda}=T-\sum_{i=0}^{n}T_i=0.$$

За допомогою даної моделі можна знайти оптимальний план задачі з будь-якою кількістю постачань скориставшись додатком «Поиск решения» системи «Excel».

Наведемо приклад знаходження оптимальних постачань з допомогою формул (36), (40), (41) для n=2.

По формулах (40) і (41) отримуємо

$$Z\left(T_0,T_1,T_2\right)=\left(n+1\right)C_п+c_зa\times$$

$$\times\left(\frac{TT_0^2}{2}-\frac{T_0^3}{3}+\sum_{i=1}^{2}\left(TT_i^2-T_i^2\sum_{k=o}^{i-1}T_k\right)\Big/2-\frac{T_i^3}{3}\right)=$$

$$=\left(n+1\right)\times$$

$$\times C_п+c_зa\left[\left(T\left(T_0^2+T_1^2+T_2^2\right)-T_0T_1^2-\left(T_0+T_1\right)T_2^2\right)\Big/2-\right.$$

$$\left.-\left(T_0^3+T_1^3+T_2^3\right)\Big/3\right],\quad T_0+T_1+T_2=T,$$

а по формулах (42), (43) – функцію Лагранжа і всі її перші похідні

$$L\left(T_0,T_1,T_2,\lambda\right)=\left(n+1\right)C_п+$$

$$+c_зa\left(\frac{TT_0^2}{2}-\frac{T_0^3}{3}+\sum_{i=1}^{2}\left(TT_i^2-T_i^2\sum_{k=o}^{i-1}T_k\right)\Big/2-\frac{T_i^3}{3}\right)+$$

$$+\lambda\left(T-\sum_{i=0}^{2}T_i\right);$$

$$\frac{\partial L}{\partial T_0}=c_зa\left(TT_0-T_0^2-\sum_{i=1}^{2}T_i^2\Big/2\right)-\lambda=0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial T_1}=c_зa\left(TT_1-T_0T_1-T_1^2\right)-\lambda=0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial T_2}=c_зa\left[TT_2-\left(T_0+T_1\right)T_2-T_2^2\right]-\lambda=0.$$

За допомогою додатка «Поиск решения» системи Excel можливо оперативно знаходити оптимальні рішення даної задачі, використовуючи формули (36), (40), (41) при наявності будь-яких значень n, a, $C_п$, $c_з$.

В табл. 4 показано аркуш Excel з розрахунками оптимальних постачань для значень $n = 2$, $a = 1$, $C_п = 20$, $c_з = 1$.

Таблиця 4

Розрахунками оптимальних постачань
для значень n =2, a=1, $C_п$= 20 , $c_з$= 1

	B	C	D	E	F	G
2	Розрахунок 3-х оптимальних постачань					
3	для q(t)=q-at					
4	T0=	2,17	T1=	2,61	T2=	5,22
5	q=	10,00	a=	1,00		
6	Cп=	20,00	Cз=	1,00		
7	∑T	10,00	T=	10,00		
8	S0=	19,38	S1=	17,01	S2=	13,61
9	Z=	124,59				
10	Q=	50,00				
12	T0/T=	0,22				
13	T1/T=	0,26				
14	T2/T=	0,52				

Дослідження оптимальних рішень розглянутих задач свідчать про те, що до заданої кількості постачань n відношення T_{iopt}/T і S_{iopt}/Q залишаються незмінним до будь-яких значень a. Але значення цих відношень при лінійному зростанні швидкості відрізняються від значень цих же відношень при лінійному зменшенні швидкості. Знаючі вказані відношення, можна досить просто і швидко знаходити оптимальні рішення подібних задач, не вдаючись до запису їх моделі.

Висновки

Запропонована методика побудови математичних моделей оптимізації дискретних постачань. Отримані формули дають можливість знаходити теоретично обґрунтовані оптимальні рішення задач управління постачанням ресурсів на підприємстві для заданих умов витрачання в заданий період часу. Цю методику можна поширити на інші умови постачання і витрачання ресурсу, наприклад з метою вирішення задачі з лінійним зростанням швидкості, в яких q(0)>0; а також в разі задачі, де на початку розрахункового періоду T є деякий запас ресурсу s(0)>0. Такі моделі дозволяють оперативно знаходити оптимальне рішення за допомогою відомих програмних засобів персонального комп'ютера, що сприяє застосуванню їх в практичній роботі по підвищенню ефективності управління підприємствами та прийняттю обґрунтованих рішень.

Список літератури

1. *Ван Хорн Дж. Основы финансового менеджмента, 11-е издание.: Пер. с англ. / Дж. Ван Хорн, Д. Вахович. – М.: Издательский дом "Вильямс", 2003. – 992 с.*
2. *Бердышев С.Н. Состав затрат, включаемых в себестоимость продукции / С.Н. Бердышев, В.Н. Овсянникова. – Издательство «Гросс-Медиа», 2006. – 128 с.*
3. *Шевченко Н.С. Управление затратами, оборотными средствами и производственными запасами / Н.С. Шевченко, А.Ю. Черных, С.А. Тиньков, Э.Н. Кузьбожев; Под ред. д.э.н., проф. Э.Н. Кузьбожева. – Курск: Курск. гос. тех. ун-т, 2000. – 164 с.*
4. *Петров Э.Г. Методы и средства принятия решений в социально-экономических и технических системах: Учебное пособие под общей редакцией Э.Г. Петрова / Э.Г. Петров, М.В. Новожилова, И.В. Гребенник, Н.А. Соколова. – Херсон, 2003.*
5. *Кудрявцев Е.М. Исследование операций в задачах, алгоритмах, программах / Е.М. Кудрявцев. – М.: Радио и связь, 1984. – 183 с.*
6. *Акулич И.Л. Экономико-математические методы и модели. Компъютерные технологии и решения / И.Л. Акулич. – Минск: БГЭУ, 2003.*
7. *Леснікова І.Ю. Дослідження операцій у середовищі електронних таблиць / І.Ю. Леснікова, Н.В. Халіпова, М.В. Терещенко, С.М. Харченко, Н.М. Єршова. – К.: Центр учбової літератури, 2007.*

Надійшла до редколегії 5.03.2013

Рецензент: д-р техн. наук проф. Ю.В. Стасєв, Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків.

ОПТИМИЗАЦИЯ ДИСКРЕТНЫХ ПОСТАВОК РЕСУРСА В СЛУЧАЕ НЕРАВНОМЕРНОГО НЕПРЕРЫВНОГО ЕГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ

Ю.Е. Мегель, А.П. Руденко, И.В. Чалый, С.Н. Коваленко

В данной работе рассмотрена задача оптимизации управления величиной и временем дискретных поставок с целью минимизации общих финансовых затрат на поставки и хранение ресурсов для некоторых случаев неравномерного непрерывного их использования, если задана количество поставок, общий необходимый объем всех поставок, скорость использования ресурса, стоимость каждой поставки и хранения единицы ресурса за единицу времени.

Ключевые слова: *математические модели, оптимизация, поставка, ресурс.*

OPTIMIZATION OF DISCRETE RESOURCE SUPPLY IN CASE IRREGULAR CONTINUOUS USAGE

Y.E. Megel, A.P. Rudenko, I.V. Chaliy, S.N. Kovalenko

The article deals with problem of optimization of management of size and time of discrete deliveries is considered with the purpose of minimization of total financial expenses on deliveries and storage resources for some cases of uneven continuous of their use, if set amount of deliveries, general necessary volume of all deliveries, speed of the use of resource, every delivery and storage resource unit per unit of time.

Keywords: *mathematical models, optimization, delivery, resource.*