

УДК 621.3.08

В.К. Волосюк, А.А. Шматко, В.И. Зворский, Е.А. Аксёнов

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина

## АНАЛИЗ ОСОБЕННОСТЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПОЛЯ И ВОССТАНОВЛЕНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЯ ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ В ЗОНЕ ФРАУНГОФЕРА

В работе проведен анализ особенностей математического представления спекл-интерференционного поля, сформированного рассеянным на шероховатой поверхности когерентным излучением. Показана возможность восстановления изображения шероховатой поверхности в зоне Фраунгофера по её спекл-изображению. Рассмотрено поле, создаваемое единичным элементом поверхности, и отраженное поле у исследуемой поверхности. Исследована возможность восстановления комплексного коэффициента рассеяния шероховатой поверхности, а также предельная разрешающая способность восстановления изображения поверхности.

**Ключевые слова:** лазерное излучение, спекл-изображение, шероховатая поверхность, восстановление изображений в зоне Фраунгофера.

### Введение

В машиностроении, микроэлектронике и др. областях науки и техники важное место занимает измерение параметров шероховатых поверхностей (ШП). Существующие методы и средства измерения являются контактными либо громоздкими бесконтактными оптическими измерителями, что исключает возможность их использования в автоматизированных технологических процессах [1, 2]. Для решения задач создания бесконтактных измерителей параметров ШП особый интерес представляют спекл-изображения (СИ) (результат интерференции рассеянного шероховатой поверхностью когерентного излучения).

В работе проводится строгое математическое исследование формирующегося интерференционного поля, в зоне Фраунгофера, а также рассматривается возможность восстановления комплексного коэффициента рассеяния (ККР) ШП [3].

**Постановка задачи.** Необходимо провести математическое исследование рассеянного ШП когерентного излучения в зоне Фраунгофера и обосновать возможность восстановления ККР ШП по её СИ.

### Решение задачи

Рассмотрим плоскую задачу, геометрия которой приведена на рис. 1. На рисунке приведены следующие обозначения:  $R_0$  – расстояние от фазового центра излучающей (переотражающей) площадки к точке наблюдения В; координаты излучающей поверхности лежат в пределах  $[-0,5X; 0,5X]$ .

Если  $R_0 \gg X$ , то в точку В, находящуюся в дальней зоне, лучи идут параллельным пучком.

Тогда комплексное поле в точке В:

$$\dot{S}_B(t, \theta_x) = \int_X \dot{F}(x) \exp\{j\omega[t - t_d(\theta_x)]\} dx =$$

$$= \exp\{j\omega t\} \dot{S}_B(\theta_x), \quad (1)$$

где  $\dot{S}_B(\theta_x) = \int_X \dot{F}(x) \exp\{-jk[R_0 - x \cos \theta_x]\} dx$  –

комплексная амплитуда поля,  $k = \omega c^{-1} = 2\pi\lambda^{-1}$ ,

$$t_d(\theta_x) = R(\theta_x) c^{-1} = (R_0 - x \cos \theta_x) c^{-1}.$$

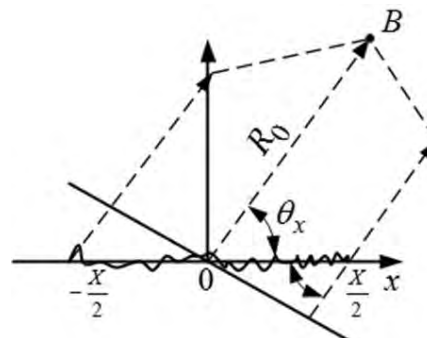


Рис. 1. Геометрия упрощенной плоской задачи для математического описания поля в дальней зоне

В большинстве случаев практический интерес представляет модуль функции  $|\dot{F}(x)|$ , и так как расстояние  $R_0$  обычно неизвестно, то множитель  $\exp\{-jkR_0\}$  целесообразно включить в функцию  $\dot{F}(x)$ , т.е.

$$\dot{F}(x) \exp\{-jkR_0\} = \dot{F}(x). \quad (2)$$

Тогда

$$\dot{S}_B(\theta_x) = \int_D \dot{F}(x) \exp\{jk \cos \theta_x x\} dx. \quad (3)$$

При выводе этой формулы природа излучения и формирования функции  $\dot{F}(x)$  не рассматривалась. Излучение может быть как собственным тепловым происхождением, так и обусловленным отражением (рассеянием) подсвечивающего излучения от вспомогательного источника, например, лазера.

Пусть излучение  $\dot{F}(x)$  обусловлено подсветкой источником, находящимся в точке А, рис. 2 [4].

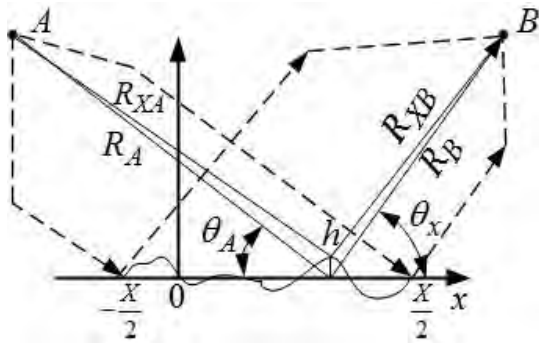


Рис. 2. Точка А является излучающей. Точка В – точка наблюдения

Полагаем, что точки А и В находятся в дальних зонах, т.е. соответствующие направления падения и излучения колебаний в пределах исследуемого участка X – параллельны. Тогда запишем последовательно выражения для падающего и отраженного полей непосредственно на линии  $x \in (-0,5X; 0,5X)$  (в двумерном варианте – на плоскости), выражения для значения поля в точке В, создаваемого элементом поверхности (рис. 3) на высоте  $h(x)$  над точкой x, а также результирующего поля в точке В, создаваемого совокупностью всех элементов области  $x \in (-0,5X; 0,5X)$ .

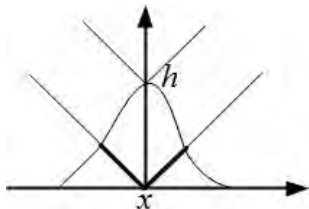


Рис. 3. Задержки фаз, обусловленные влиянием высоты неровностей  $h(x)$

Падающее поле

$$S_{inc.}(t, x, \theta_A) = S_0 \exp\{j\omega[t - R_A(x, \theta_A)c^{-1}]\}, \quad (4)$$

$$R_A(x, \theta_A) = R_{xA} - h \sin \theta_A, \quad R_{xA} = R_{0A} + x \cos \theta_A,$$

где  $R_{0A}$  – расстояния от точки А до начала координат.

Рассмотрим отраженное поле у поверхности. В идеальном случае, если не учитывать фазовые сдвиги отраженных волн, обусловленные влиянием высот неровностей  $h(x)$ , отраженное поле, приведенное к точкам оси x (в двумерном описании – к плоскости) можно записать в виде

$$S_{inc.}(t, x, \theta_A) \dot{K}_{ref.}(x, \theta_A, \theta_x) = \dot{F}(x, \theta_A, \theta_x) \exp\{j\omega t\},$$

где  $R_B = R_{0B} - x \cos \theta_x - h \sin \theta_x$ .

$$\begin{aligned} \text{Тогда} \quad d\dot{S}_B &= \dot{F}(x, \theta_A, \theta_x) \times \\ &\times \exp\{j\omega t - kR_{0B} + kx \cos \theta_x + kh \sin \theta_x\} dx. \end{aligned}$$

При решении многих практических задач чаще интересуются модулем коэффициента отражения. Кроме того, не всегда удастся оценить фазовые сдвиги, обусловленные влиянием расстояний  $R_{0A}$ ,  $R_{0B}$  и высоты  $h(x)$ . Поэтому вначале для упрощения можно соответствующие экспоненциальные множители объединить в одной функции

$$\dot{F}(x) = \dot{F}(x, \theta_A, \theta_x) \exp\{-kR_{0B} + kh \sin \theta_x\}, \quad (5)$$

которую в дальнейшем будем называть удельным комплексным коэффициентом рассеяния элемента dx,

$$\dot{F}(x) = \frac{d\dot{S}_B(x)}{dx}. \quad (6)$$

Тогда  $d\dot{S}_B = \dot{F}(x) \exp\{kx \cos \theta_x\} \exp\{j\omega t\} dx$ , а полное поле, в точке В, обусловленное отражениями от всех элементов поверхности, примет вид

$$\dot{S}_B(t, \theta_x) = \exp\{j\omega t\} \int_X \dot{F}(x) \exp\{jkx \cos \theta_x\} dx,$$

где выражение для комплексной амплитуды совпадает с формулой (3). Таким образом, немного усложнив геометрию, мы пришли к аналогичной формуле для комплексной амплитуды, которую целесообразно записать в таком виде

$$\dot{S}_B(\vartheta_x) = \int_X \dot{F}(x) \exp\{jkx \vartheta_x\} dx, \quad (7)$$

где  $\vartheta_x = \cos \theta_x$  – направляющий косинус.

В бесконечных пределах это выражение представляет собой комплексную амплитуду пространственной гармоники входящей в функцию  $\dot{F}(x)$  на пространственной частоте

$$f_x = \frac{\omega_x}{2\pi},$$

$$\omega_x = 2\pi\lambda^{-1} \cos \theta_x. \quad (8)$$

$$\text{Тогда} \quad f_x(\theta) = \cos \theta_x \lambda^{-1},$$

а пространственный период этой гармоники (рис. 4):

$$\Lambda_x(\theta) = \lambda (\cos \theta_x)^{-1}. \quad (9)$$

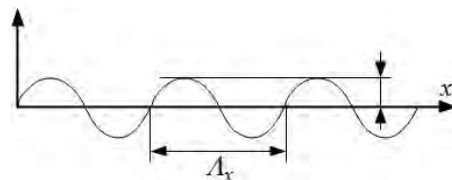


Рис. 4. Амплитуда и период пространственной гармоники

Заметим, что при  $\theta_x = 0$  получим

$$f_x = \lambda^{-1}, \quad \Lambda_x = \lambda, \quad (10)$$

а при  $\theta_x = 0,5\pi$  имеем

$$f_x = 0, \quad \Lambda_x = \infty. \quad (11)$$

Таким образом, изменяя угол  $\theta_x$  в пределах от  $\pi/2$  до 0, мы регистрируем комплексные амплитуды пространственных гармоник на частотах в диапазоне от  $f_x = 0$  до  $f_x = \lambda^{-1}$ , и значениях периодов от  $\Lambda_x = \lambda$  до  $\Lambda_x = \infty$ , рис. 5.

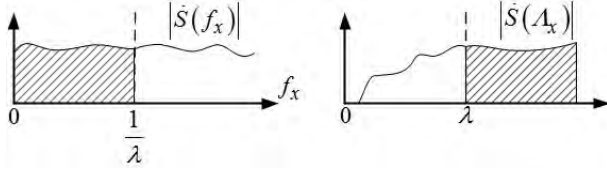


Рис. 5. Наблюдаемые спектры как функции пространственных частот  $f_x$  и периодов

Таким образом, очевидно, что предельная разрешающая способность при взятии обратного преобразования Фурье ограничивается длиной волны  $\lambda$ . Из рассмотренного следует, что составляющие с меньшим периодом при заданной длине волны принципиально не могут быть наблюдаемыми. Тогда, при взятии обратного преобразования Фурье по отношению к (3) эти составляющие с меньшим периодом не могут быть восстановлены.

Рассмотрим следующую геометрию (рис. 6).

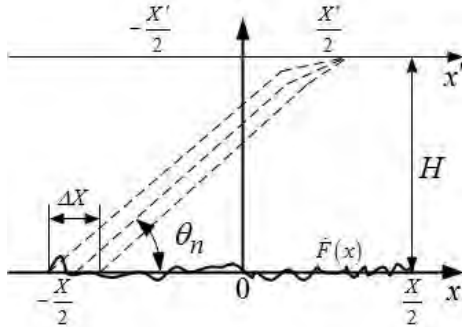


Рис. 6. Наименьший период гармоники определяется крайними точками областей излучения  $X$  и наблюдения  $X'$

На рис. 6 область излучения  $x \in (-0,5X; 0,5X)$ , область наблюдения  $x' \in (-0,5X'; 0,5X')$ . Можно считать, что небольшая область  $\Delta x$  источника излучения по отношению к точке регистрации  $0,5x'$  приближенно находится в дальней зоне Фраунгофера (лучи практически параллельны). Из анализа рис. 6 следует, что пространственные гармоники наименьшего периода  $\Lambda$  могут быть зарегистрированы крайними точками области  $x'$  с наименьшим углом  $\theta_n$

$$\Lambda(\theta_n) = \lambda(\cos \theta_n)^{-1} \geq \lambda. \quad (12)$$

Представляет интерес рассмотрение задачи, иллюстрируемой рис. 7. Здесь излучатель (лазер) и оптический приемник (ОП) расположены практически рядом. Излучение и прием осуществляется практически из одного направления.

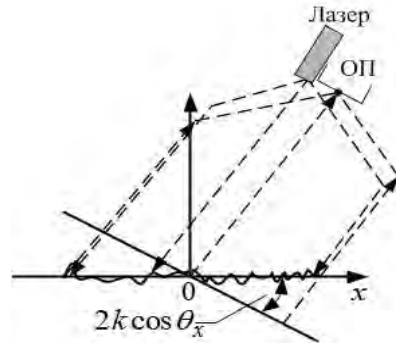


Рис. 7. Излучатель и приемник расположены рядом

Полагаем, что излучение и прием осуществляется из одного направления, тогда вместо интеграла (3) можно записать такой же интеграл, но с удвоенной фазой  $2k \cos \theta$ . При этом частота (пространственная) практически удваивается, а длина периода равна

$$\Lambda_x \approx 0,5\lambda,$$

а выражение (3) примет вид

$$\hat{S}_B(\theta) = \int_X \hat{F}(x) \exp\{j2kx\vartheta_x\} dx. \quad (13)$$

Рассмотрим возможность восстановления функции  $\hat{F}(x)$ . В бесконечных пределах выражение (3) – это преобразование Фурье. Если взять в конечных пределах, обратное ПФ, то мы восстановим  $\hat{F}(x)$  с потерями в разрешении

$$\hat{F}(x) = \int_{-1}^1 \hat{S}_B(\vartheta_x) \exp\{-jkx\vartheta_x\} d\vartheta_x,$$

$$\vartheta_x \in (\cos(\pi), \cos(0)) = (-1, 1). \quad (14)$$

Формулы (3) и (14) можно записать в бесконечных пределах интегрирования в таком виде

$$\hat{S}(\vartheta_x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}_\Pi(x) \exp\{jk\vartheta_x x\} dx, \quad (15)$$

$$\hat{F}_\Pi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}_\Pi(\vartheta_x) \exp\{-jk\vartheta_x x\} d\vartheta_x, \quad (16)$$

где  $\hat{F}_\Pi(x)$  – оценка  $\hat{F}(x)$ ,

$$\hat{F}_\Pi(x) = \Pi(x)\hat{F}(x), \quad \hat{S}_\Pi(\vartheta_x) = \Pi(\vartheta_x)\hat{S}(\vartheta_x); \quad (17)$$

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-X/2, X/2); \\ 0, & x \notin (-X/2, X/2), \end{cases} \quad (18)$$

$$\Pi(\vartheta_x) = \begin{cases} 1, & \vartheta_x \in (-1, 1); \\ 0, & \vartheta_x \notin (-1, 1). \end{cases} \quad (19)$$

Тогда (16) можно записать в таком виде

$$\hat{F}_\Pi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(\vartheta_x) \hat{S}_\Pi(\vartheta_x) \times \exp\{-jk\vartheta_x x\} d\vartheta_x = \hat{F}_\Pi(x) \otimes F[\Pi(\vartheta_x)], \quad (20)$$

$$F[\Pi(\vartheta_x)] = \int_{-1}^1 \exp\{-jkx\vartheta_x\} d\vartheta_x = \exp\{-jkx\} - \exp\{jkx\} / (-jkx) = 2 \operatorname{sinc} kx. \quad (21)$$

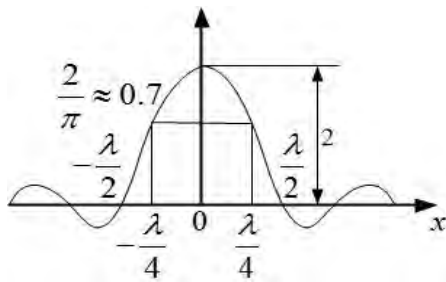


Рис. 8. Разрешающая способность восстановления  $\hat{F}_{\Pi}(x)$

Ширина этой функции на нулевом уровне находится из соотношения

$$kx = \pi, \quad x = \frac{\pi}{k} = \frac{\pi}{2\pi\lambda^{-1}} = \frac{\lambda}{2}.$$

При  $kx = \pi/2$

$$x = \frac{\pi}{2k} = \frac{\pi}{4\pi\lambda^{-1}} = \frac{\lambda}{4}, \quad \text{sinc} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{0.5\pi} = \frac{2}{\pi} \approx 0,7.$$

Таким образом, на уровне  $2/\pi \approx 0,7$  разрешающая способность восстановления функции  $F_{\Pi}(x)$  равна  $0,5\lambda$ .

Результат восстановления с потерями на разрешении, обусловленный тем, что гармоники с периодом  $\Lambda_x = \lambda$  не наблюдаются, имеет вид

$$\hat{F}_{\Pi}(x) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}_{\Pi}(\xi) \text{sinc} k(x\xi) d\xi. \quad (22)$$

Формулы (21) и (22) соответствуют идеальному наблюдению в диапазоне углов  $\theta \in (-\pi, \pi)$ . Реальный сектор наблюдения значительно меньше. Пусть сектор наблюдения составляет  $\pm 30^\circ$ , т.е.  $\theta_x \in (-60^\circ, 60^\circ)$ ,  $\vartheta_x = (-0,5, 0,5)$  (рис. 9). Тогда разрешающая способность определяется из решения уравнения

$$\int_{-0,5}^{0,5} \exp\{-jk\vartheta_x x\} d\vartheta_x = \text{sinc} 0,5kx,$$

а ширина этой функции на нулевом уровне составляет

$$0,5kx = \pi \Rightarrow x = \lambda$$

(с двух сторон  $-2\lambda$ ), т.е. в таком секторе можно

восстановить изображение  $\hat{F}(x)$  с разрешающей способностью  $\lambda$ .

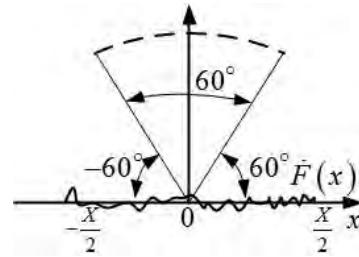


Рис. 9. Сектор обзора

## Заключение

В работе проведено математическое исследование формирующегося спекл-интерференционного поля отраженного ШП в зоне Фраунгофера (СИ), а также рассмотрена возможность восстановления ККР ШП. Определена предельная разрешающая способность восстановления изображения поверхности.

## Список литературы

1. Табенкин А.Н. Шероховатость, волнистость, профиль [Текст] / А.Н. Табенкин, С.Б. Тарасов, С.Н. Степанов. – СПб.: Издательство Политехнического университета, 2007. – 136 с.
2. T.R. Thomas Rough Surfaces [Текст] / Tom R. Thomas. – Sweden: Imperial College Press, 1999. – 278 p.
3. Волосюк В.К. Статистическая теория радиотехнических систем дистанционного зондирования и радиолокации [Текст] / В.К. Волосюк, В.Ф. Кравченко. – М.: Физматлит, 2008. – 704 с.
4. Волосюк В.К. Статистические методы оценивания параметров электродинамических моделей земной поверхности при дистанционном зондировании [Текст]: учеб. пособие / В.К. Волосюк; Гос. ком. СССР по нар. обр., Харьк. ордена Ленина авиационный институт им. Н.Е. Жуковского. – Х.: Изд-во Харьк. ордена Ленина авиационный институт им. Н.Е. Жуковского, 1991. – 112 с.

Поступила в редколлегию 5.06.2013

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. И.В. Барышев, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.

## АНАЛІЗ ОСОБЛИВОСТЕЙ МАТЕМАТИЧНОГО ПОДАВАННЯ ПОЛЯ І ВІДНОВЛЕННЯ ЗОБРАЖЕННЯ ШОРСТКОЇ ПОВЕРХНІ В ЗОНІ ФРАУНГОФЕРА

В.К. Волосюк, О.О. Шматко, В.І. Зворський, Є.О. Аксьонов

У роботі проведено аналіз особливостей математичного подання спекл-інтерференційного поля, сформованого розсіяним на шорсткій поверхні когерентним випромінюванням. Показано можливість відновлення зображення шорсткої поверхні в зоні Фраунгофера за її спекл-зображенням. Розглянуто поле, створюване одним елементом поверхні і відбите поле у досліджуваній поверхні. Досліджено можливість відновлення комплексного коефіцієнта розсіювання шорсткої поверхні, а також гранична роздільна здатність відновлення зображення поверхні.

**Ключові слова:** лазерне випромінювання, спекл-зображення, шорстка поверхня, відновлення зображень в зоні Фраунгофера.

## ANALYSIS OF THE CHARACTERISTICS OF THE MATHEMATICAL REPRESENTATION A FIELD AND RESTORE THE IMAGE OF A ROUGH SURFACE IN THE FRAUNHOFER ZONE

V.K. Volosyuk, A.A. Shmatko, V.I. Zvorsky, E.A. Aksyonov

The paper analyzes the characteristics of the mathematical representation of the speckle interference field formed by scattered on the rough surface of the coherent radiation. The possibility of restoring the image of a rough surface in the Fraunhofer zone on its speckle image. We consider the field produced by a single element of the surface and the reflected field at the surface under study. The possibility of restoring the complex scattering coefficient of a rough surface, and the maximum resolution of the image reconstruction surface.

**Keywords:** laser light, speckle pattern, rough surface, restoration of images in the Fraunhofer zone.