

УДК 621.396.96 : 621.391.26

И.Г. Кириллов¹, М.Н. Руденко¹, Г.В. Чаплий¹, Н.Д. Бережная², Л.А. Егорова²¹ Харьковский университет Воздушных Сил имени Ивана Кожедуба, Харьков² Институт радиофизики и электроники НАН Украины, Харьков

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МАКСИМАЛЬНО ПРАВДОПОДОБНЫХ ОЦЕНОК ЧАСТНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ КОРРЕЛЯЦИИ АДАПТИВНЫХ РЕШЕТЧАТЫХ ФИЛЬТРОВ

Обоснована целесообразность использования модели стационарных авторегрессионных процессов для расчета «точных» значений параметров адаптивных решетчатых фильтров (АРФ). Получены аппроксимации плотностей распределения частных коэффициентов корреляции АРФ. Найдены зависимости от объема обучающей выборки среднеквадратического отклонения оценок таких параметров и смещения их математического ожидания. Статистически обоснована необходимость прекращения адаптации (оценки параметров) в «старших» ступенях АРФ.

Ключевые слова: статистический анализ, адаптивные решетчатые фильтры, частный коэффициент корреляции, процесс авторегрессии, корреляционная последовательность.

Введение

Обработка сигналов на фоне помех различной природы строится на основе учета их различий, в том числе и корреляционных. Корреляционные свойства помех в большинстве встречающихся на практике случаев априори неизвестны.

Практически единственным источником информации о статистических свойствах помехи являются дискретные отсчеты $y_m^{(i)}$ ($m \in 1, M$) случайного процесса на выходах M временных (или пространственных) каналов приема системы обработки в i -й ($i \in 1, K$) момент времени, где K – число отсчетов в пределах интервала стационарности. В радиотехнических системах частота дискретизации такого процесса определяется, как правило, в соответствии с теоремой Котельникова полосой пропускания Δf приемника, обычно согласованной с шириной спектра полезного сигнала.

Оценка корреляционных (спектральных) свойств помехи по имеющемуся ансамблю реализаций с целью ее подавления является актуальной и достаточно сложной задачей. Ее актуальность обусловлена прямой зависимостью эффективности систем обработки сигналов от качества полученных оценок. Сложность такой задачи состоит в необходимости получения достаточно хорошо обусловленной положительно определенной оценки корреляционной матрицы (КМ) анализируемого случайного процесса или параметров, однозначно ее задающих, для дальнейшего использования в целом ряде практических приложений, в частности, в системах адаптивной обработки гауссовых сигналов на фоне гауссовых помех, анализаторах спектра и т.д. [1, 2].

При отыскании различных функционалов от таких параметров широкое применение в качестве

структурно-алгоритмической основы нашли адаптивные решетчатые фильтры (АРФ), которым посвящена обширная литература (см., в частности, [2 – 4] и тематический выпуск журнала «Прикладная радиоэлектроника», Том.10, №4, 2011).

В известной литературе при обосновании использования ленточно-диагональной регуляризации максимально правдоподобных оценок КМ (параметров, их задающих) в задачах адаптивной обработки сигналов на фоне помех недостаточно внимания уделено вопросам качества оценивания параметров АРФ, «отражающих» существующие корреляционные связи.

Целью данной статьи является отыскание законов распределения частных корреляций АРФ при их максимально правдоподобном оценивании статистическими методами.

Основная часть

Основной характеристикой стационарного случайного процесса наряду с законом распределения является спектральная плотность мощности (СПМ) $S(f)$ или связанная с СПМ преобразованием Фурье (соотношениями Винера – Хинчина) корреляционная функция $\rho(\tau)$:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\tau) \cdot \exp(-j \cdot 2\pi \cdot f \cdot \tau) d\tau,$$

$$\rho(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) \cdot \exp(j \cdot 2\pi \cdot f \cdot \tau) df. \quad (1)$$

Последняя определяет элементы

$$\varphi_{pq} = y_p^{(i)} \cdot y_q^{(i)*} = \rho(\Delta_{pq}) = \rho^*(-\Delta_{pq}) = \varphi_{qp}^*,$$

$$\Delta_{pq} = t_p - t_q, \quad p, q \in 1, M \quad (2)$$

в общем случае эрмитовой корреляционной матри-

цы (KM) $\Phi = \Phi_1 = \{ \varphi_{pq} \}_{p,q=1}^M$ вектора-столбца

$y_i = \{ y_m^{(i)} \}_{m=1}^M$, составленного из отсчетов $y_m^{(i)}$

($m \in 1, M$) анализируемого процесса в M , например, временных канала приема (смежных периодах обзора) импульсной РЛС, зависящие от временного интервала Δ_{pq} между p -м и q -м отсчетами в t_p -й и t_q -й моменты времени. Здесь черта сверху и (*) – символы статистического усреднения и эрмитового сопряжения (транспонирования и комплексного сопряжения) соответственно.

В соответствии с центральной предельной теоремой теории вероятностей (теорема А.М. Ляпунова) M - мерные векторы помехи в большинстве случаев могут считаться взаимно независимыми комплексными гауссовыми (нормальными) случайными векторами с нулевыми средними значениями ($\overline{y_i} = 0$), в связи с чем их статистические свойства полностью определяются $M \times M$ KM вида

$$\Phi = \Phi_1 = \overline{y_i \cdot y_i^*}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (3)$$

В большинстве случаев в качестве оценок $\hat{\Phi}$ таких KM используют их максимально правдоподобные (МП) оценки вида [5]:

$$\hat{\Phi} = K^{-1} A, \quad A = Y \cdot Y^* = \sum_{i=1}^K y_i \cdot y_i^*, \quad Y = \{ y_i \}_{i=1}^K \quad (4)$$

Анализ задач, решаемых при пространственно-временной обработке сигналов, показал, что KM Φ (3) зачастую обладает дополнительной спецификой. Так, при пространственной обработке сигналов для широкого класса фазированных антенных решеток (ФАР) характерна центральная симметрия пространственного расположения попарно идентичных элементов (модулей). В таких ФАР KM Φ собственных шумов и внешних излучений на выходах M каналов приема может быть не только эрмитовой, но и персимметричной (симметричной относительно побочной диагонали). Аналогичной структурой могут обладать и KM между периодических флуктуаций пассивных помех на выходах временных каналов приема систем между периодической обработки (МПО) импульсных РЛС [4, 6].

Максимально правдоподобной оценкой $\hat{\Phi}_\Pi$ персимметричной KM является матрица [7]:

$$\hat{\Phi}_\Pi = K^{-1} A_\Pi, \quad A_\Pi = 1/2 \cdot (A + \Pi A \tilde{\Pi}), \quad (5)$$

где Π – $M \times M$ ортогональная матрица перестановок с единицами на побочной диагонали, ($\tilde{\cdot}$) – символ комплексного сопряжения.

Часто встречающееся на практике равенство $\Delta_{pq} = \Delta$, характерное для случаев линейной эквидистантной антенной решетки и постоянного периода зондирующих импульсов при пространственной и временной обработке сигналов соответственно, при-

водит к появлению дополнительной специфики KM – теплицевости. Для таких KM, которые однозначно задаются первым ее столбцом

$$\Phi_1 = \{ \varphi_{p1} \}_{i=1}^M = \{ \rho_i \}_{i=0}^{M-1} = \rho \quad (6)$$

(строкой Φ_1^*), представляющим собой корреляционную последовательность ρ (дискретный аналог корреляционной функции $\rho(\tau)$), справедливы соотношения

$$\varphi_{pq} = \varphi_{p+1, q+1} = \varphi_{p-q+1, 1} = \rho_{p-q} = \varphi_{qp}^* \quad (7)$$

$(p \in 1, M; q \in 1, p)$

Отмеченная выше специфика KM наиболее просто учитывается при организации обработки на основе адаптивных решетчатых фильтров, первые варианты которых были предложены Дж.П. Бергом еще в 1968 г. [3] для спектрального анализа стационарных временных рядов методом максимальной энтропии (МЭ) [8]. Кроме того, целесообразность использования АРФ в типичных для практики условиях параметрической априорной неопределенности при решении задач адаптивной пространственно-временной обработки сигналов обусловлена необходимостью формирования по обучающей выборке оценочной матрицы $\hat{\Psi}$, используемой взамен априори неизвестной истинной $M \times M$ матрицы $\Psi = \{ \omega_{pq} \}_{p,q=1}^M = \Phi^{-1}$, обратной KM Φ (3) случайного M -мерного вектора отсчетов комплексных амплитуд анализируемого процесса.

В силу важных практических достоинств АРФ в последнее время в литературе было уделено большое внимание развитию их теории, расширению функциональных возможностей и областей применения (см., например, [1, 9, 10] и др.). Тем не менее, обсуждение ряда вопросов обоснования некоторых аппроксимаций их параметров в реальных условиях обучающих выборок конечного объема осталось в стороне.

Базовая структура «универсального решетчатого фильтра (РФ)» [11, 9] с M входами и $2M$ выходами представлена на рис. 1. РФ рис. 1 в этом случае представляет собой объединение двух «обесвешивающих» фильтров случайных векторов x_i , поскольку преобразуют их в векторы $p_i = H \cdot x_i$ и $q_i = N^* \cdot x_i$ с KM

$$\overline{p_i \cdot p_i^*} = H \cdot \Phi \cdot H^* = \overline{q_i \cdot q_i^*} = N^* \cdot \Phi \cdot N = I_M, \quad (8)$$

т.е. в векторы со взаимно некоррелированными равномошными компонентами, причем существуют «верхне-нижние» и «нижне-верхние» треугольные разложения матриц

$$H^* \cdot H = \Psi = N \cdot N^*, \quad (N^{-1})^* \cdot N^{-1} = \Phi = H^{-1} \cdot (H^{-1})^* \quad (9)$$

для любых «строго несингулярных (с. н.)» матриц Φ , то есть матриц с ненулевыми главными минорами всех порядков [12].

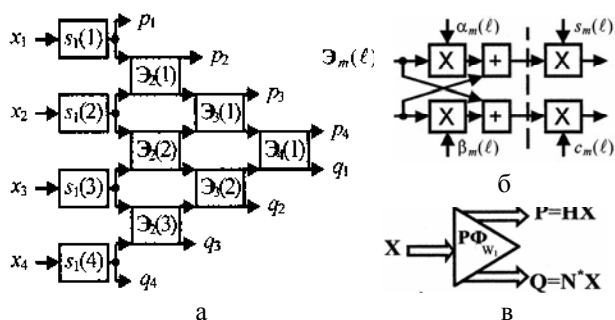


Рис. 1. Базовая структура универсального решетчатого фильтра (РФ)

Здесь параметры РФ $s_m(\ell)$ и $c_m(\ell)$ ($m \in 1, M$ и $\ell \in 1, M+1-m$) имеют смысл коэффициентов усиления, нормирующих к единице мощность выходных сигналов элементарных РФ (ЭРФ) $\mathcal{E}_m(\ell)$, а $\alpha_m(\ell) = \beta_m^*(\ell)$ ($m \in 2, M$ и $\ell \in 1, M+1-m$) представляют собой частные коэффициенты корреляции.

Важное достоинство РФ заключается в «наследовании» ее сомножителями (степенями РФ) специфики исходной КМ, связанной с симметрией ее элементов относительно побочной диагонали. Так, для персимметричных КМ (5) справедливы равенства

$$s_1(\ell) = s_1(M+1-\ell), \ell \in 1, M;$$

$$\alpha_m(\ell) = \alpha_m(G+1-\ell), m \in 2, M; \ell \in 1, G; \quad (10)$$

$$G = M+1-m,$$

т.е. число независимых параметров, задающих КМ, уменьшается практически вдвое, а для теплицевых КМ [3, 8] равенство всех элементов каждой диагонали матрицы Φ приводит к равенству параметров всех ЭРФ каждой степени РФ (рис. 1):

$$s_1(\ell) = s_1(1) = s_1, \quad \alpha_m(\ell) = \alpha_m(1) = \alpha_m, \quad (11)$$

$$s_m(\ell) = c_m(\ell) = s_m(1) = s_m, \quad m \in 2, M,$$

и, следовательно, для однозначного задания КМ необходимы всего M параметров – один действительный и $(M-1)$ комплексных.

Обратим внимание еще на одно практически полезное свойство РФ. Если, кроме того, теплицева матрица Φ (3) является КМ дискретного процесса авторегрессии (АР – процесса) [13, 14, 9] порядка $p < M$, то РФ «укорачивается» –

$$\alpha_m = 0, \quad s_m = c_m = 1 \quad \text{для всех } m > p+1. \quad (12)$$

Треугольные сомножители \mathbf{H} и \mathbf{N} (9) матрицы Ψ в этом случае являются ленточными [14] с шириной ленты $(p+1)$, а матрица Ψ – ленточной с шириной ленты $(2p+1)$.

Это свойство обычно используется для минимизации ошибок вычислений путем «останова счета», например, в $m = r_y + 1$ -й степени РФ (в реальных условиях наличия шумов каналов приема КМ Φ , как правило, невырождена, и речь идет об ее «эффективном» ранге r_y , при этом

$\alpha_{r_y+1}(\ell) \cdot \beta_{r_y+1}(\ell) \approx 1$) или в других случаях, о которых речь пойдет ниже. Ленточная аппроксимация матрицы Ψ обеспечивает не только положительную определенность как матрицы Ψ_{r_y} и соответствующей ей $\hat{\mathbf{O}}_{r_y} = \Psi_{r_y}^{-1}$, но и наиболее случайное доопределение КМ, которое является наилучшим в случае отсутствия априорной информации для аппроксимации.

Отмеченное «наследование» (разновидности которого далеко не исчерпываются приведенными примерами) особенно важно для построения адаптивных РФ. Оно упрощает формирование оценок параметров («настройку») АРФ, учитывающих априорную информацию о специфике структуры (неизвестной) КМ, создавая за счет этого предпосылки для повышения эффективности адаптивной обработки в соответствующих условиях. Достижимый при этом выигрыш зависит от используемых критериев эффективности, размерности вектора определяющих параметров АРФ, алгоритмов их оценивания и вида формируемых случайных функций (статистик) [4, 10, 15].*)

Таким образом, из соотношений (8), (9) видно, что параметры РФ однозначно описывают корреляционные свойства произвольного дискретного случайного процесса, заданного его КМ Φ вида (3). В условиях известных КМ особый теоретический интерес представляет отыскание аналитических зависимостей частных коэффициентов корреляции РФ от элементов исходной матрицы. Такие зависимости удалось получить только для теплицевых КМ, заданных экспоненциальной и гауссовой нормированными корреляционными последовательностями (НКП) ρ (6) [11]:

$$\rho_i = \rho_1^i, \quad i \in 0, M-1 \Rightarrow \alpha_2 = -\rho_1, \alpha_i = 0, \quad i \in 3, M$$

– экспоненциальная НКП, (13)

$$\rho_i = \rho_1^{i^2}, \quad i \in 0, M-1 \Rightarrow \alpha_i = (-1)^{i-1} \cdot \rho_1^{i-1}, \quad i \in 2, M$$

– гауссова НКП. (14)

Из (13), (14) видно, что частные коэффициенты корреляции α_2 степени $m = 2$ РФ равны (с точностью до знака) порождающему КП коэффициенту корреляции ρ_1 .

Заметим, что НКП (13), (14) относятся к «типичным», широкий перечень которых приведен, например, в [16], и являются граничными частными случаями корреляционных последовательностей, задающих КМ дискретного процесса авторегрессии (АР-процесса) p -го порядка, а именно – порядка

*) Этим АРФ выгодно отличаются от других «универсальных» методов факторизации (Гаусса, Краута, Гивенса и др. [12]) и синтезированных на их основе многоступенчатых фильтров, в которых подобный учет специфики исходной матрицы Φ существенно более сложен.

$p=1$ и $p \rightarrow \infty$ соответственно. Особенности формирования «положительных» НКП таких процессов и базовые соотношения приведены, например, в [13]:

$$\rho_m = \sum_{i=1}^p \mu_i \cdot \rho_{m-i} + C \cdot \delta(m), \quad \rho_0 = 1,$$

$$C = 1 - \sum_{i=1}^p \mu_i \cdot \rho_i^*, \quad m \in 0, M-1, \quad (15)$$

где $\delta(m)$ – символ Кронекера ($\delta(m)=1$ при $m=0$, $\delta(m)=0$ при $m \neq 0$);

μ_i – весовой коэффициент (в общем случае комплексный), для случая «кратных» корней x_0 характеристического полинома

$$x^p - \sum_{i=1}^p \mu_i \cdot x^{p-i} = (x - x_0)^p = 0, \quad (16)$$

равный
$$\mu_i = (-1)^{i+1} \cdot \frac{p!}{i!(p-i)!} \cdot x_0^i. \quad (17)$$

В [13] установлены взаимосвязи между x_0 и коэффициентом корреляции ρ_1 , «порождающим» НКП, не только для приведенного случая, но и для «некратных» корней x_i . Заметим, что модуль $|x_0|$ комплексного корня x_0 однозначно определяет модуль $|\rho_1|$, а фаза – расположение моды спектра на частотной оси (отличные друг от друга фазы некратных корней x_i задают моды «полимодального» спектра).

Примеры таких НКП (15) для случая действительных кратных корней иллюстрируются на рис. 2, 3. На рис. 2 приведено семейство кривых НКП АР-процесса с параметром $p=1$ (экспоненциальная НКП – верхняя кривая), 2...5, 7, 10, 100, $p \rightarrow \infty$ (гауссова НКП – штриховая кривая) для коэффициента корреляции $\rho_1 = 0.96$. На рис. 3 иллюстрируется характер изменения значений НКП в зависимости от $\rho_1 = 0.9, 0.96, 0.99$ (сплошные и штрихпунктирные кривые соответствуют АР-процессу порядка $p=5$ и $p=10$).

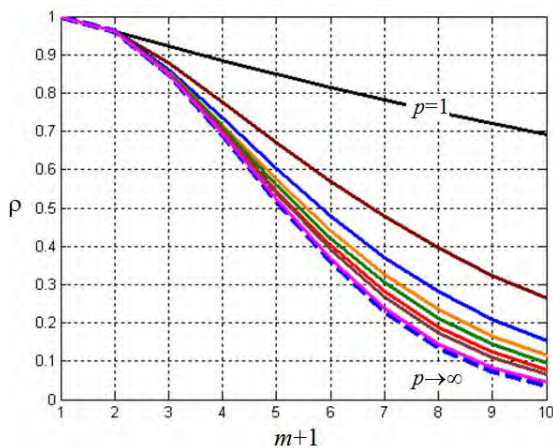


Рис. 2. Нормированные корреляционные последовательности процесса авторегрессии ($\rho_1=0.96$)

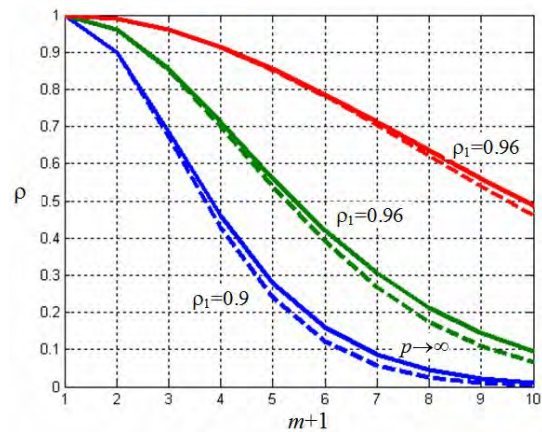


Рис. 3. Нормированные корреляционные последовательности процесса авторегрессии

Семейство «порождаемых» такими НКП (рис. 2) периодических (повторяющихся на интервале $-1/2 \leq f \leq 1/2$ относительной (безразмерной) доплеровской частоты $f = f_D \cdot T$, где T – в частности, период повторения зондирующих импульсов) нормированных спектров (1) приведено на рис. 4 ($\rho_1 = 0.9$), параметр семейства – порядок АР-процесса $p=1$ (экспоненциальная НКП), 3, 5, 10, 20, 50, 100, $p \rightarrow \infty$ (гауссова НКП).

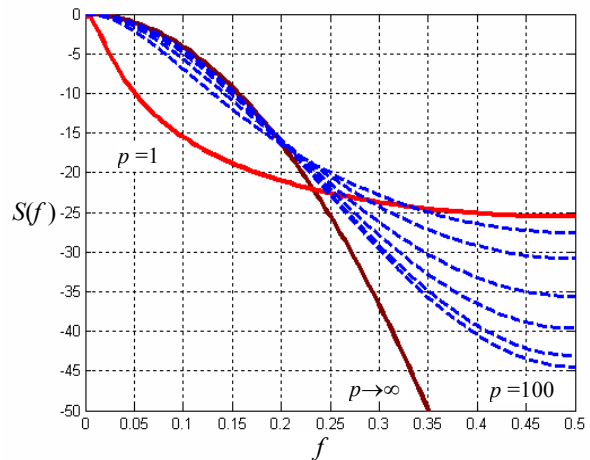


Рис. 4. Нормированные спектры (спектральная функция МЭ Берга [8]) процесса авторегрессии ($\rho_1=0.9$)

Как видно из графиков, спектры АР-процессов порядка $p \geq 2$ на высоком уровне близки к «гауссовскому» ($p \rightarrow \infty$), а на низком – заполняют широкую промежуточную область между ним и процессом с экспоненциальной НКП ($p=1$). По данным многочисленных экспериментальных исследований [17, 1] именно такого рода закономерности характерны, например, для реальных пассивных помех РЛС сантиметрового и дециметрового диапазонов (АОРЛ-85, «Утес-Т», 36Д6).

Существенное разнообразие таких НКП (рис. 2, 3) и соответствующих им спектров (рис. 4) делает це-

лесообразным их использование в качестве тестовых для определения «точных» значений параметров РФ при реализации методов «настройки» по заданной КМ (или КП), разновидности которых приведены в [10]. Рис. 5 иллюстрирует «точные» значения модулей частных коэффициентов корреляции α_m для АР-процессов порядка $p = 1 \dots 5, 7, 10, 100, \infty$, соответствующие НКП (15) рис. 3 ($\rho_1 = 0.96$).

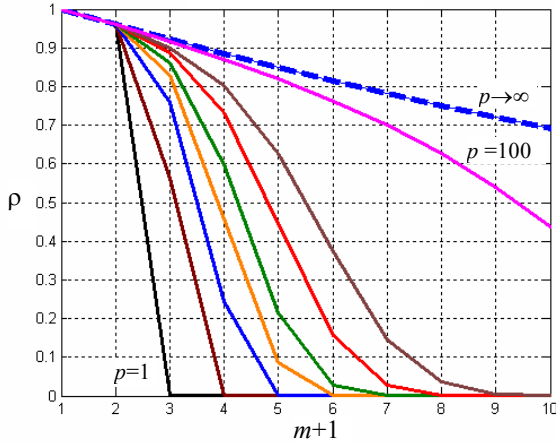


Рис.5. Модуль частных коэффициентов корреляции $\alpha(m)$ в m -й степени АРФ (параметр семейства – порядок ($p=1 \dots 5, 7, 10, 100, \infty$) АР – процесса)

Учет имеющихся в реальных условиях шумов каналов приема производится модификацией только элемента ρ_0 НКП (15), а именно

$$\rho_0^{(M)} = \rho_0 + \sigma_{ш}^2 / \sigma_{п}^2 = 1 + \sigma_{ш}^2 / \sigma_{п}^2 = 1 + 1/b, \quad (18)$$

где $\sigma_{п}^2$ и $\sigma_{ш}^2$ – мощности дискретного стационарного процесса (помехи) и шума соответственно; b – энергетическое отношение «помеха / шум».

На рис. 6 и 7 приведены семейства $(M-1)$ -мерных векторов \mathbf{a} :

$$\mathbf{a} = \{ |\alpha_m| \}_{m=2}^M \quad (19)$$

($M = 10$) частных коэффициентов корреляции, полученных при «настройке» РФ по гауссовой НКП (14) ($p \rightarrow \infty$), «порождаемой» $\rho_1 = 0.96$ и $\rho_1 = 0.9$ соответственно, с параметром $b = 20, 30, 40, 50, 60$ дБ и при отсутствии (неучете) шумов каналов приема.

Из рисунков видно, что «учет» шума приводит к существенному «искажению» частных коэффициентов корреляции РФ и тем более сильному, чем больше $|\rho_1|$ и чем меньше относительная интенсивность b случайного процесса. Это объясняется тем, что аддитивное добавление к отсчетам случайного процесса в общем случае независимых «шумов», обладающих в подавляющем большинстве представляющих практический интерес ситуаций свойством $\overline{\xi_p \cdot \xi_q^*} = \sigma_{ш}^2 \cdot \delta(p-q)$, приводит к частичной декорреляции наиболее отстоящих друг от друга

(см., например, рис. 6 при $m > 4 \dots 6$) несмежных отсчетов «суммарного» процесса, к чему оказываются «чувствительны» параметры α_m РФ.

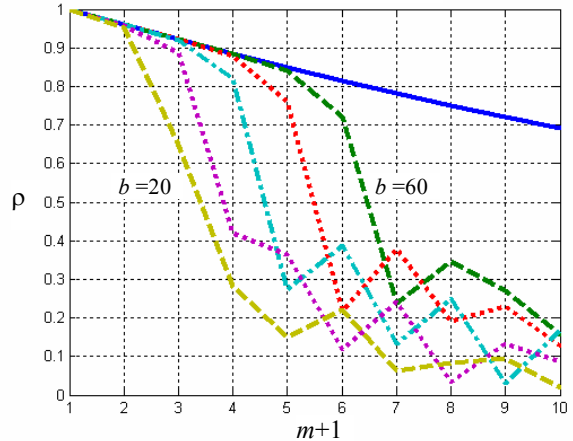


Рис. 6. Модуль частных коэффициентов корреляции $\alpha(m)$ в m -й степени АРФ ($\rho_1=0.96, p \rightarrow \infty$, параметр семейства – отношение ($b=20:10:60$ дБ) «помеха / шум»)

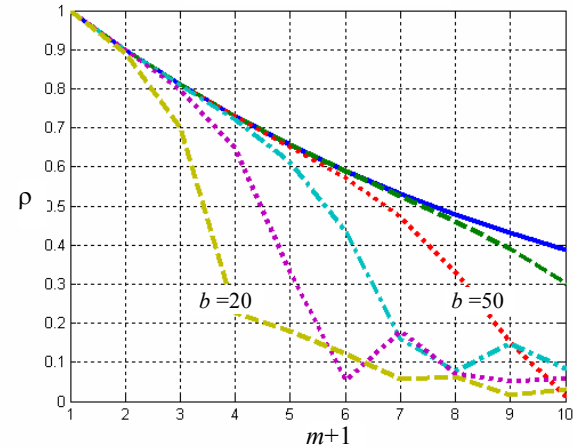


Рис. 7. Модуль частных коэффициентов корреляции $\alpha(m)$ в m -й степени АРФ ($\rho_1=0.9, p \rightarrow \infty$, параметр семейства – отношение ($b=20:10:60$ дБ) «помеха / шум»)

Рис. 8 иллюстрирует изменения нормированной спектральной функции МЭ Берга в условиях рис. 2 ($\rho_1 = 0.9, b = 10, 20, 30, 40, 50$ дБ; сплошная кривая – без учета шума), обусловленные влиянием «шума».

Для оценки точности воспроизведения «истинных» частных коэффициентов корреляции α_m в качестве стационарного случайного процесса используем модель, представляющую собой аддитивную смесь дискретного процесса авторегрессии (15) произвольного порядка и шума

$$\rho' = \{ \rho'_m \}_{m=0}^{M-1} = \rho + \mathbf{I}_M / b. \quad (20)$$

Получение M -мерных векторов y_i (3) отсчетов такого процесса возможно на основе подхода [18], связанного с нахождением треугольного разложения, например, (9), «истинной» (тестовой) КМ Φ , которая в случае (20) является теплицевой.

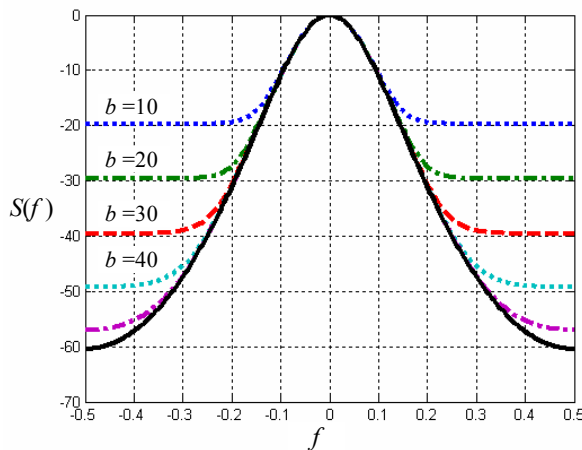


Рис. 8. Нормированный спектр МЭ Берга процесса авторегрессии порядка $p=10$ (параметр семейства – отношение $(b=10:10:50$ дБ) «помеха / шум», при отсутствии шума)

Удобство использования теплицевой КМ для моделирования дискретных случайных процессов связано с обеспечением принципиальной возможности учета априорной информации о специфике КМ. В соответствии с [18] модельный вектор коррелированных отсчетов анализируемого процесса имеет вид

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{H}^{-1} \cdot \xi_i, \quad (21)$$

где ξ_i – M -мерный гауссовский случайный вектор «возбуждения» с нулевым средним и КМ \mathbf{I}_M ($\xi_i \sim \text{CN}(0, \mathbf{I}_M)$), что обеспечивает с учетом (9) выполнение равенств

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{y}_i \cdot \mathbf{y}_i^*} &= \overline{\mathbf{H}^{-1} \cdot \xi_i \cdot \xi_i^* \cdot (\mathbf{H}^{-1})^*} = \mathbf{H}^{-1} \cdot \overline{\xi_i \cdot \xi_i^*} \cdot (\mathbf{H}^{-1})^* = \\ &= \mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{I}_M \cdot (\mathbf{H}^{-1})^* = \mathbf{H}^{-1} \cdot (\mathbf{H}^{-1})^* = \mathbf{\Phi}'. \end{aligned} \quad (22)$$

Получим оценки плотностей распределения $g(\alpha)$ элементов α_m вектора \mathbf{a} (19) частных коэффициентов корреляции АРФ. В качестве «обучающей» выборки для «настройки» фильтра использовались пакеты из K M -мерных векторов \mathbf{y}_i (21), представляющих собой дискретные «сечения» ансамбля реализаций модельного стационарного случайного процесса авторегрессии с КМ $\mathbf{\Phi}$, порождаемой корреляционной последовательностью \mathbf{r}' (20), для различных значений ρ (из диапазона 1...5, 7, 10, 100, ∞), ρ_1 (из диапазона 0.9...0.99) и b (из диапазона 10...50 дБ). В качестве характерного примера на рис. 9, а, б, в приведены семейства гистограмм (сплошные кривые) модулей $|\hat{\alpha}_m|$ ($m \in 2, 4$) частных коэффициентов корреляции с параметром семейства K (размер «обучающей» выборки), полученные с использованием МП оценок $\hat{\mathbf{\Phi}}$ КМ (4) АР-процесса $p = 5$ -го порядка относительной мощности $b = 40$ дБ с «порождающим» коэффициентом корреляции $\rho_1 = 0.96$ («точные» значения $|\alpha_m|$

в этих условиях равны соответственно $|\alpha_2| = 0.96$ (рис. 9, а), $|\alpha_3| = 0.858$ (рис. 9, б), $|\alpha_4| = 0.568$ (рис. 9, в)). Такие гистограммы хорошо аппроксимируются бета-распределением [19] с плотностями (штриховые кривые) вида

$$p_\xi(x) = p(x, K) = \frac{(v+w-1)!}{(v-1)!(w-1)!} x^{v-1} (1-x)^{w-1} \quad (23)$$

с параметрами v и w , равными, например, для $|\alpha_2| = 0.96$ и $K = 20, 40, 100, 200$ соответственно $v = 2425, 1168, 481, 242$ и $w = 102, 49, 20, 10$.

Априорное знание специфики «точных» КМ $\mathbf{\Phi}$ сгенерированных векторов \mathbf{y}_i (3) модельного случайного процесса, а именно их персимметрии, позволяет использовать МП оценки $\hat{\mathbf{\Phi}}_n$ (5). Гистограммы параметров $|\hat{\alpha}_m|$, полученных при использовании основанных на (5) методов «настройки» АРФ [10], для условий рис. 9, а приведены на рис. 9, г. Сравнение кривых 1, 3 рис. 9, а и 2, 4 рис. 9, г, которые практически «повторяют» друг друга (1 – 2, 3 – 4 соответственно), статистически подтверждает вывод об «удвоении» быстродействия адаптивной обработки при учете такой специфики КМ, сделанный в [6]. Это проявляется в «приобретении» статистических свойств параметров $|\hat{\alpha}_m|$, аналогичных случаю КМ общего вида, уже по выборке «половинного» объема ($K/2$).

Из графиков рис. 9 видно, что с увеличением K ($K \geq 100$) гистограммы $g(\alpha)$ модулей $|\hat{\alpha}_m|$ частных коэффициентов корреляции «нормализуются», т.е. могут быть аппроксимированы нормальным законом распределения. Однако конечность интервалов стационарности реальных случайных процессов и сложность получения $K \geq 100$ независимых в пределах таких интервалов M -мерных отсчетов делает такие аппроксимации практически непригодными.

Проведенный в условиях большого разнообразия модельных стационарных случайных АР-процессов (20), (21), (22) (диапазоны изменения параметров ρ , ρ_1 , b приведены выше) анализ показал, что эмпирические плотности распределения модулей $|\hat{\alpha}_m|$ частных коэффициентов корреляции зависят от их абсолютных значений и не зависят от номера m ступени АРФ. «Точность» оценивания параметров $|\alpha_m|$ для $\rho_1 = 0.96$ иллюстрируется на рис. 10 и рис. 11, где соответственно приведены зависимости среднеквадратического отклонения (СКО) σ_α и смещения $\Delta M_\alpha = ||\alpha_m| - M_\alpha|$ математического ожидания M_α относительно «точного» значения $|\alpha_m|$.

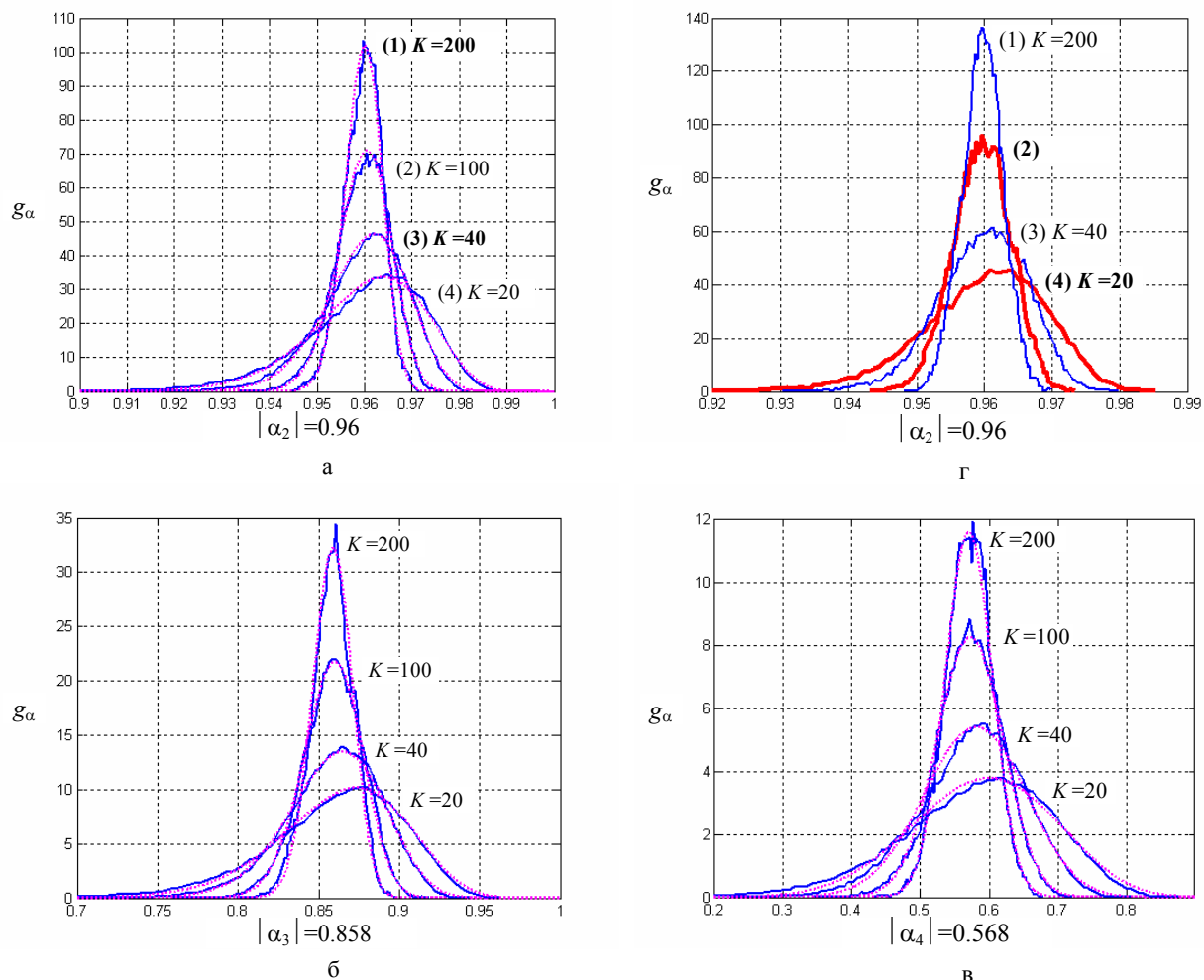


Рис. 9. Гистограммы модулей частных коэффициентов корреляции $|\alpha_m|$ ($m=2, 3, 4$) и аппроксимирующие их плотности бета-распределения, параметр семейства – объем обучающей выборки $K=20, 40, 100, 200$ (оценки по выборкам АР-процесса порядка $p=5, \rho=0.96$)

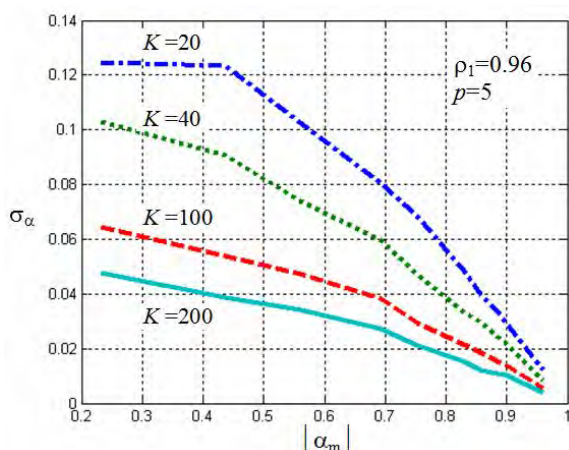


Рис. 10. СКО модулей частных коэффициентов корреляции $|\alpha_m|$ АРФ, параметр семейства – объем обучающей выборки $K=20, 40, 100, 200$

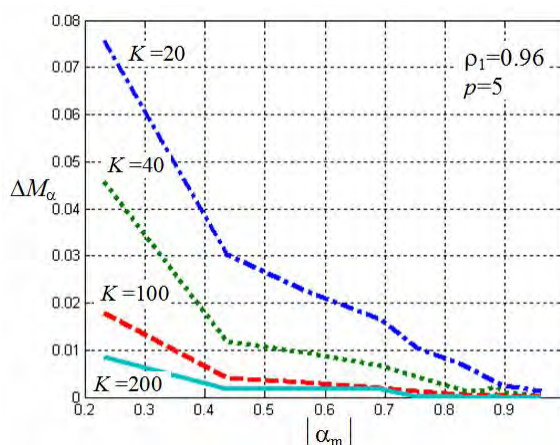


Рис. 11. Оценки смещения математического ожидания модулей частных коэффициентов корреляции $|\alpha_m|$ АРФ, параметр семейства – объем обучающей выборки $K=20, 40, 100, 200$

Из графиков рис. 10, 11 видно, что при близких к единице значениях модулей частных коэффициентов корреляции АРФ приемлемые точности их оценивания достигаются даже при относительно не-

больших размерах «обучающей» выборки. Так для $|\alpha_m| \geq 0.85$ СКО $\sigma_\alpha < 5\%$ и $\Delta M_\alpha \leq 0.5\%$ даже при $K \geq 20$. Для меньших значений $|\alpha_m|$ достижение такой точности их оценивания возможно лишь за

счет увеличения K . Однако уже для $|\alpha_m| = 0,5$ обеспечить аналогичные приведенным выше точности оценивания не удастся даже при $K = 200$. Заметим, что простое увеличение объема K «обучающей» выборки для повышения точности оценивания параметров АРФ на практике необосновано ввиду нарушения стационарности процесса в ее пределах.

На рис. 12 приведены кривые, описывающие «поведение» оценок $|\hat{\alpha}_m|$ параметров α_m ($m \in 2, 4$), полученных по дальностным отсчетам с двух (а) и (б) произвольных азимутальных направлений реального случайного процесса на выходе приемника РЛС 36Д6 сантиметрового диапазона (средняя мощность процесса в диапазоне отсчетов 65...115 равна ≈ 25 дБ). Близкий характер «поведения» этих кривых (в указанном диапазоне отсчетов) и тестовых кривых рис.6 ($\rho_1 = 0.96$) свидетельствует о гауссовости анализируемого процесса.

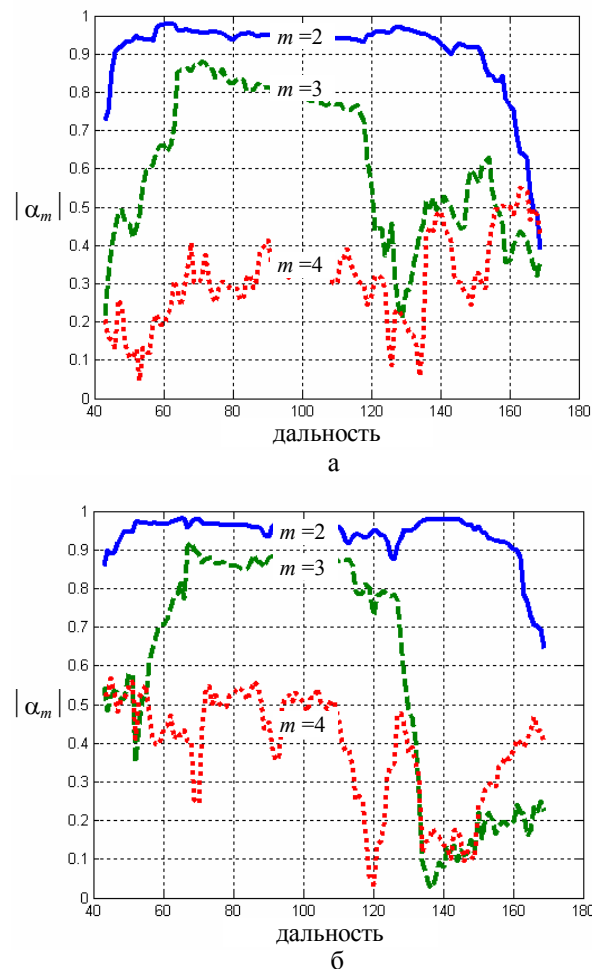


Рис. 12. Оценки модулей частных коэффициентов корреляции $|\alpha_m|$ ($m=2, 3, 4$), полученные при «настройке» АРФ по $K=40$ - мерной обучающей выборке сигналов на выходе цифрового приемника РЛС 36Д6

Из рис. 12 видно, что уже в 4-й ступени АРФ превалируют оценки $|\hat{\alpha}_m| < 0.5$ и, следовательно, имеют место достаточно существенные ошибки (СКО

$\sigma_\alpha \approx 8...10\%$ и $\Delta M_\alpha \approx 1...5\%$ при $K \leq 40$) такого оценивания (см. рис. 10, 11). Это свидетельствует о целесообразности прекращения адаптации, т.е. «настройки» АРФ, в ступенях больших $m = 4$ в условиях унимодальных гауссовых процессов с корреляцией $\rho_1 = 0.96$. При $m < M$ такой подход, как было отмечено выше, в соответствии с (12) приводит к необходимости использования ленточной аппроксимации матрицы Ψ (9) с шириной ленты $(2m-1)$ [14, 15, 1], что позволяет минимизировать ошибки вычислений за счет отказа от обработки в ступенях $m > 4$.

Более детальный анализ показал, что для значений коэффициента ρ_1 меньших 0.96 адаптацию иногда целесообразно прекращать в ступенях $m > 3$ АРФ, а больших 0.96 – в ступенях $m > 5$.

Таким образом, статистически обоснована необходимость прекращения обработки (адаптации) в ступенях $m \geq 5$ АРФ, предсказанная еще в [20] и выявленная эмпирически при обработке значительных объемов «реальных записей» импульсных РЛС (сантиметрового и дециметрового диапазонов).

Заключение

Рассмотрены некоторые особенности адаптивных решетчатых фильтров как структурно-алгоритмической основы для отыскания оценок различных функционалов от корреляционной матрицы анализируемого случайного процесса, в частности КМ между-периодных флуктуаций помех импульсным обзорным РЛС. Обоснована целесообразность использования модели стационарных авторегрессионных процессов для расчета «точных» значений параметров АРФ, «отражающих» существующие корреляционные связи.

Получены аппроксимации плотностей распределения частных коэффициентов корреляции АРФ, которые могут быть использованы для определения ошибок оценивания этих коэффициентов. Найдены зависимости среднеквадратического отклонения оценок таких параметров и смещения их математического ожидания от объема обучающей выборки.

Анализ таких зависимостей свидетельствует о статистически обоснованной необходимости учета существенных ошибок оценивания частных корреляций, которые могут привести (и приводят) к снижению эффективности обработки полезных сигналов на фоне помех, вплоть до отказа от адаптации в старших ($m \geq 5$) ступенях АРФ. Полученные результаты могут быть использованы, например, для обоснования выбора квазиоптимальных систем между-периодной обработки полезных сигналов целей, а также числа параметров для классификации метеоявлений на основе адаптивных решетчатых фильтров.

Авторы искренне признательны главному научному сотруднику НДЛ НИЦ Харьковского национального университета радиозлектроники доктору технических наук профессору Леховицкому Давиду Исааковичу за идею написания данной статьи.

Список літератури

1. Леховицкий Д.И. СДЦ в импульсных РЛС: 5. Адаптивные системы междупериодной обработки гауссовых сигналов на фоне гауссовых пассивных помех / Д.И. Леховицкий, В.П. Рябуха, Г.А. Жуга, Д.С. Рачков, А.В. Семеняка // Прикладная радиоэлектроника. – Х.: ХНУРЭ, 2011. – Том 10, №4. – С. 508-525.
2. Леховицкий Д.И. Извлечение метеоинформации на основе спектрального корреляционного анализа отражений в импульсных доплеровских метеорологических РЛС / Д.И. Леховицкий, Г.А. Жуга, Б.М. Вошин, В.В. Лаврукевич // Прикладная радиоэлектроника. – Х.: ХНУРЭ, 2007. – Том 6, №4. – С. 491-510.
3. Burg I.P. A new analysis technique for time series data / I.P. Burg // NATO Advanced study institute on signal processing with emphasis on underwater acoustics. – August, 1968.
4. Леховицкий Д.И. Сравнение эффективности адаптивной обработки в произвольных и центрально-симметричных ФАР / Д.И. Леховицкий, Д.В. Атаманский, И.Г. Кириллов, В.И. Зарицкий // Антенны. – М., 2000. – Вып.1 (44). – С. 99-103.
5. Reed I.S. Rapid convergence rate in adaptive arrays / I.S. Reed, J.D. Mallet, L.E. Brennan // IEEE Transactions on aerospace electronic system. – 1974. – Vol.AES-10. – P.853-863.
6. Леховицкий Д.И. К теории адаптивной обработки сигналов в системах с центральной симметрией каналов приема / Д.И. Леховицкий // Радиотехника. – Х. – 1996. – №100.
7. Nitzberg R. Application of maximum likelihood estimation of persymmetric covariance matrices to adaptive processing / R. Nitzberg // IEEE Trans. Aerosp. And Electr. Syst. – 1980. – V.16, № 1. – P. 124-127.
8. Burg I.P. Maximum entropy spectral analysis / I.P. Burg // Proc. 37th Meeting of the Society of Exploration Geophysicists. – Oklahoma City, Okla. – October 1967.
9. Леховицкий Д.И. Адаптивные решетчатые фильтры. Часть 1. Теория решетчатых структур / Д.И. Леховицкий, Д.С. Рачков, А.В. Семеняка, В.П. Рябуха, Д.В. Атаманский // Прикладная радиоэлектроника. – Х.: ХНУРЭ, 2011. – Том 10, №4. – С. 380-404.
10. Леховицкий Д.И. Адаптивные решетчатые фильтры. Часть 2. Алгоритмы настройки АРФ / Д.И. Леховицкий, Д.С. Рачков, А.В. Семеняка, В.П. Рябуха, Д.В. Атаманский // Прикладная радиоэлектроника. – Х.: ХНУРЭ, 2011. – Том 10, №4. – С. 405-418.
11. Леховицкий Д.И. Обобщенный алгоритм Левинсона и универсальные решетчатые фильтры / Д.И. Леховицкий // Изв. Вузов. Радиофизика. – М., 1992. – Т.35, №9-10. – С. 790-808.
12. Воеводин В.В. Матрицы и вычисления / В.В. Воеводин, Ю.А. Кузнецов. – М: Наука, 1984. – 320 с.
13. Леховицкий Д.И. Моделирование пассивных помех импульсным РЛС на основе процессов авторегрессии произвольного порядка / Д.И. Леховицкий, И.Г. Кириллов // Системи обробки інформації: Збірник наукових праць. – Х.: ХУПС, 2008. – Вып. 3 (70). – С. 90-101.
14. Ленточно-диагональная регуляризация МП оценок корреляционных матриц в задачах адаптивной обработки сигналов на фоне гауссовых помех / Д.И. Леховицкий, Ю.И. Абрамович, В.П. Рябуха, Г.А. Жуга, Д.С. Рачков // Прикладная радиоэлектроника. – Х.: ХНУРЭ, 2011. – Том 10, №4. – С. 419-422.
15. Кириллов И.Г. Минимизация вычислений при решении систем с оценочными корреляционными матрицами неполного эффективного ранга / И.Г. Кириллов, С.И. Бурковский // Системи обробки інформації: Збірник наукових праць. – Х.: ХУПС, 2010. – Вып. 2 (83). – С. 92-100.
16. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника / В.И. Тихонов. – М.: Радио и связь, 1982. – 624 с.
17. Леховицкий Д.И. СДЦ в импульсных РЛС: 1. Физический смысл и экстремальные свойства операций оптимальной междупериодной обработки гауссовых сигналов на фоне гауссовых пассивных помех / Д.И. Леховицкий, В.П. Рябуха, Г.А. Жуга // Прикладная радиоэлектроника. – Х.: ХНУРЭ, 2011. – Том 10, №4. – С. 463-478.
18. Быков В.В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике / В.В. Быков. – М.: Сов. радио, 1971. – 328 с.
19. Хастингс Н. Справочник по статистическим распределениям / Н. Хастингс, Дж. Пиккок; [пер. с англ. А.К. Звонкина]. – М.: Статистика, 1980. – 95 с.
20. Леховицкий Д.И. Выбор порядка линейного фильтра предсказания для стационарных случайных процессов с гауссовой корреляционной функцией / Д.И. Леховицкий, М.И. Табачников, С.И. Шипицын // Радиотехника. – М., 1990. – №4. – С.44-48.

Поступила в редколлегию 24.06.2013

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, с.н.с. В.К. Иванов, Институт радиофизики и электроники НАН Украины, Харьков.

СТАТИСТИЧНИЙ АНАЛІЗ МАКСИМАЛЬНО ПРАВДОПОДІБНИХ ОЦІНОК ЧАСТКОВИХ КОЕФІЦІЄНТІВ КОРЕЛЯЦІЇ АДАПТИВНИХ ГРАТЧАСТИХ ФІЛЬТРІВ

І.Г. Кіриллов, М.М. Руденко, Г.В. Чаплій, Н.Д. Бережна, Л.А. Єгорова

Обґрунтована доцільність використання моделі стаціонарних авторегресійних процесів для розрахунку «точних» значень параметрів адаптивних ґратчастих фільтрів (АГФ). Отримані апроксимації щільності розподілу приватних коефіцієнтів кореляції АГФ. Знайдені залежності від об'єму повчальної вибірки середньоквадратичного відхилення оцінок таких параметрів і зсуву їх математичного сподівання. Статистично обґрунтована необхідність припинення адаптації (оцінки параметрів) в «старіих» ступенях АГФ.

Ключові слова: статистичний аналіз, адаптивні ґратчасті фільтри, частковий коефіцієнт кореляції, процес авторегресії, кореляційна послідовність.

STATISTIC ANALYSIS OF MAXIMUM LIKELIHOODE ESTIMATES OF THE PARTIAL CORRELATION COEFFICIENT OF ADAPTIVE LATTICE FILTERS

I.G. Kirillov, M.N. Rudenko, G.V. Chapliy, N.D. Berezhnaya, L.A. Yegorova

The appropriateness of stationary autoregressive processes model for the calculation of "exact" values of the adaptive lattice filter (ALF) parameters using is justified. The approximations of correlation ALF partial coefficients distributions are obtained. The dependences of these parameters on the volume of training sample standard deviation estimates and the displacement of their expectation are found. The necessity of termination adaptation (parameter estimation) in the "senior" levels of ALF is statistically justified.

Keywords: statistical analysis, adaptive lattice filters, partial correlation coefficient, the process of autoregression, correlation sequence.