

---

УДК 621.317:004.42(043.2)

Ю.В. Куц, І.А. Купрійчук, А.А. Рижкова

Національний авіаційний університет, Київ

## ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ МОМЕНТІВ В АНАЛІЗІ ДАНИХ ФАЗОВИХ ВИМІРЮВАНЬ

*Досліджено застосування методу тригонометричних моментів у фазометрії. Розглянуто основні закони розподілу випадкових кутів. Розроблена методика використання тригонометричних моментів для визначення сигнал-завада, що ґрунтується на залежності модуля тригонометричних моментів від значення сигнал-завада.*

**Ключові слова:** *вибірка, випадковий кут, характеристична функція, тригонометричний момент, закон розподілу.*

### Вступ

Методи дослідження випадкових кутів застосовують в статистичному аналізі біологічних об'єктів, дослідженні циклічних процесів в економіці, метеорології, фізиці, геоінформатиці тощо [1]. Подібність характерних особливостей таких об'єктів вимірювань як випадковий кут (ВК) та випадковий фазовий зсув сигналів (ВФЗС) дозволила запропонувати ви-

користання розробленого в статистичній кутометрії математичного апарату в обробці сигналів у радіотехніці, енергетиці, зв'язку, прикладній метрології для розв'язання задач прецизійних фазових вимірювань за умови низьких відношень сигнал/шум [2].

Серед відомих характеристик ВК за своєю інформативністю та можливостями використання особливе місце посідає характеристична функція ВК на  $[0, 2\pi)$  [1], яка для цілих значень  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ,

визначається комплекснозначною послідовністю тригонометричних моментів

$$f_n = M \left\{ \exp(in\psi(\omega)) \right\} = \int_0^{2\pi} e^{inx} dG(x), \quad (1)$$

де  $\psi(\omega)$  – випадковий кут,  $\omega$  – елементарна подія з області подій  $\Omega$ ,  $G(x)$  – функція розподілу ВК на  $[0, 2\pi)$ ,  $M$  – оператор математичного сподівання.

Для абсолютно неперервних функцій  $G(x)$  на  $[0, 2\pi)$  існує щільність розподілу ймовірностей ВК  $p(x)$  на  $[0, 2\pi)$ :  $p(x) = \frac{dG(x)}{dx}$ .

Тригонометричний момент  $f_n$  порядку  $n$  можна подати в декартовій і полярній системах координат у вигляді

$$f_n = a_n + ib_n = \rho_n \exp(i\mu_n), \quad (2)$$

де послідовність дійсних чисел  $\{a_n, b_n\}$  обчислено відносно нульового початкового напрямку

$$a_n = M \left\{ \cos(n\psi(\omega)) \right\} = \int_0^{2\pi} \cos(nx) dG(x), \quad (3)$$

$$b_n = M \left\{ \sin(n\psi(\omega)) \right\} = \int_0^{2\pi} \sin(nx) dG(x), \quad (4)$$

$$\rho_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \mu_n = \text{Arg} f_n, \quad (5).$$

Характеристична функція ( $f_n, n=0, \pm 1, \dots$ ) повністю задає ВФЗС  $\psi(\omega)$  на  $[0, 2\pi)$ . Її використання в ряді випадків приводить до більш простих аналітичних і алгоритмічних розв'язків вимірювальних задач фазометрії.

**Аналіз публікацій.** Існує багато наукових праць, що описують та підтверджують ефективність застосування різних методів визначення відношення сигнал-завада. При вирішенні задач виділення сигналів на фоні завад та оцінки їх параметрів користуються декількома визначеннями понять «співвідношення сигнал-завада». Всі вони ґрунтуються на використанні різних характеристик сигналу (амплітуди, потужності, пікового значення та енергії) та завади (середнє квадратичне значення, енергія). В статті запропонований новий метод визначення відношення сигнал-завада за допомогою тригонометричних моментів, що до цього ніким не описувався.

**Метою роботи** є узагальнення та подальше дослідження властивостей характеристичної функції та аналіз можливостей її застосування для теорії і практики фазових вимірювань.

### Постановка задачі

За результатами спостережень і попередньої обробки даних фазових вимірювань отримана вибірка ФЗС ( $\phi_1, \dots, \phi_j, \dots, \phi_M$ ),  $\phi_j \in [0, 2\pi)$  обсягу  $M$ . Ця

вибірка розглядається як реалізація ВФЗС що має певну неперервну щільність розподілу ймовірностей  $p(x)$ . Необхідно визначити вибіркочну характеристичну функцію та дослідити можливості її використання у фазовимірювальному експерименті з ВФЗС.

### Розв'язок задачі

Вибірковий тригонометричний момент порядку  $n$  відносно заданого напрямку  $\alpha \in [0, 2\pi)$  визначається за формулою:

$$\hat{f}_n(\alpha) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M e^{in(\phi_j - \alpha)} = \hat{a}_n(\alpha) + i\hat{b}_n(\alpha) = \hat{r}_n(\alpha) e^{i\hat{\mu}_n(\alpha)}, \quad (6)$$

$$\hat{a}_n(\alpha) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \cos[n(\phi_j - \alpha)],$$

$$\hat{b}_n(\alpha) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \sin[n(\phi_j - \alpha)] -$$

відповідно косинус- та синус-моменти порядку  $n$ .

Під вибірковою характеристичною функцією ВФЗС будемо розуміти комплекснозначну послідовність ( $\hat{f}_n(0), n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), в якій вибіркочні тригонометричні моменти визначені відносно нульового напрямку  $\alpha = 0$ .

Для аналізу можливих застосувань характеристичної функції у фазометрії стисло розглянемо її особливості [2,3].

1. Модуль тригонометричного моменту характеристичної функції порядку  $n$   $|\hat{f}_n| \leq 1$ .

2. Для  $n = 0$  маємо  $f_0 = 1$ .

3. Тригонометричний момент порядку  $n$  дорівнює комплексноспряженому моменту характеристичної функції того ж порядку  $n$ :  $f_{-n} = f_n^*$ .

4. Тригонометричний момент  $n$ -го порядку суми незалежних ВФЗС  $\phi_1(\omega), \dots, \phi_j, \dots, \phi_m(\omega)$  дорівнює добутку тригонометричних моментів  $f_n^{(j)}$  того ж порядку всіх  $m$  ВФЗС:

$$f_n = \prod_{j=1}^m f_n^{(j)}, \quad (7)$$

5. Характеристична функція кута  $[\psi(\omega) + v] \bmod 2\pi$ , з довільним дійсним  $v = \text{const}$ , дорівнює

$$f_n(v) = M e^{in(\psi+v)} = e^{inv} f_n(0), \quad (8)$$

тобто зміна початку відліку не приводить до зміни модуля тригонометричного моменту.

Використовуючи властивість (8) характеристичної функції випадкових кутів можна довести наступні співвідношення:

$$\rho_n(v) = \rho_n, \mu_n(n) \equiv (\mu_n - nv) \pmod{2\pi}. \quad (9)$$

6. Щільність розподілу ймовірності ВФЗС однозначно визначається її характеристичною функцією

$$p(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(0) e^{-inx}, x \in [0, 2\pi) \quad (10)$$

Формула (10) являє собою розклад  $p(x)$  в ряд Фур'є. Її використання дозволяє спростити вирази для щільності розподілу ймовірності ВФЗС.

У статистичній фазометрії ця формула може бути запропонована для визначення емпіричних розподілів, якщо в ній  $f_n(0)$  замінити на  $\hat{f}_n(0)$  тобто на відповідний вибірковий тригонометричний момент.

Найбільш характерні для кутових і фазових вимірювань закони розподілів ймовірності ВК на колі – рівномірний, намотані Гаусса та Коші, Мізеса, кардіоїдний і трикутний, а також складові тригонометричних моментів  $a_n, b_n$  наведено в табл. 1.

Таблиця 1

Розподіли ймовірності випадкових кутів та їх характеристичні функції

Назва	Щільність розподілу ймовірності $p(\theta)$	Тригонометричний момент
Мізеса	$\frac{1}{2\pi I_0(k)} \exp\{k \cos(x - \mu)\},  \mu  < \infty, k > 0,$ $\mu$ – круговий середній напрям ВК; $k$ – параметр концентрації ВК в околі $\mu, I_0(k)$ – модифікована функція Бесселя першого роду нульового порядку	$a_n = \frac{I_n(k)}{I_0(k)}$ $b_n = 0$
Намотаний Гаусса.	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \times \sum_{j=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{[(x - \mu) + 2\pi j]^2}{2\sigma^2}\right)$ $\mu$ – математичне сподівання; $\sigma$ – середньоквадратичне відхилення	$a_n = e^{-\frac{n^2\sigma^2}{2}}$ $b_n = 0.$
Рівномірний	$\frac{1}{2\pi}$	$\frac{e^{2\pi ni} - 1}{2\pi ni} = \begin{cases} 1, n = 0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases}$
Кардіоїдний	$(2\pi)^{-1} [1 + 2\rho \cos(x - \mu)],  \mu  < \infty,  \rho  < 0,5.$	-
Трикутний	$\frac{1}{8\pi} [4 - \pi^2 \rho + 2\pi \rho  \pi - x ],$ $\rho \leq \frac{4}{\pi^2}$	$a_{2n-1} = \frac{\rho}{(2n-1)^2}$ $a_{2n} = 0 \quad b_n = 0$
Намотаний Коші	$\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1 - \rho^2}{1 - \cos 2(x - \mu) + \rho^2}, \rho = e^{-a} \in [0, 1].$	$a_n = \rho^{ n } \quad b_n = 0,$ $n \geq 1$

Тригонометричні моменти можуть бути використані для співставного аналізу розподілів. Наприклад, відомо [1], що щільність ймовірності намотаного гауссівського розподілу задовільно апроксимується щільністю ймовірності розподілу Мізеса.

Апроксимація одного розподілу іншим передбачає також збіжність їх характеристичних функцій.

Прирівнявши їх тригонометричні моменти для  $n = 1$  маємо

$$\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\right) = \frac{I_1(k)}{I_0(k)}, \quad (11)$$

звідки визначаємо

$$\sigma = \sqrt{-2 \ln\left(\frac{I_1(k)}{I_0(k)}\right)}. \quad (12)$$

Графік функції  $\sigma(k)$  згідно формули (12) наведено на рис. 1.

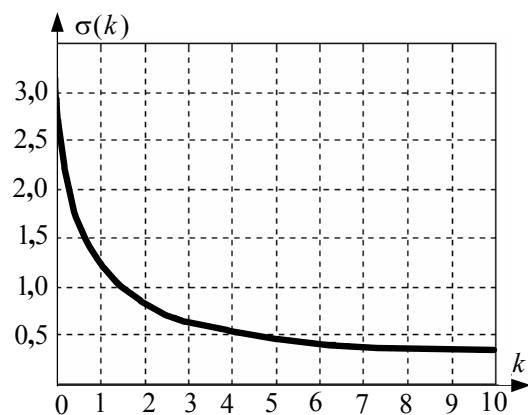


Рис. 1. Графік функції  $\sigma(k)$

Отже щільність розподілу ймовірності намотаного гауссівського розподілу з параметрами  $(\mu, \sigma)$  може бути задовільно апроксимована щільністю розподілу Мізеса з параметрами  $(\mu, k)$  за умови виконання рівності (12).

Подальше дослідження тригонометричних моментів як складових характеристичної функції пов'язано з перевіркою гіпотези про можливість її застосування для визначення відношення сигнал/шум (с/ш) в адитивній суміші гармонічного сигналу і гауссівського шуму.

Дослідження цього питання проведемо методом комп'ютерного вимірювального експерименту в середовищі Matlab [4].

### Методика експерименту та моделювання

Нехай досліджуваний сигнал  $u(t)$  являє собою адитивну суміш інформаційного гармонічного сигналу та гауссівського шуму з такими параметрами: частота сигналу  $f_c = 100$  Гц, амплітуда  $U_m = 5$  В, період дискретизації  $T_{\Delta} = 10^{-4}$  с, об'єм вибірки  $N = 5 \cdot 10^3$ , дисперсія шуму  $\sigma^2 = 5$  В<sup>2</sup>.

Необхідно дослідити сигнал і довести можливість застосування тригонометричних моментів випадкової фази сигналів для визначення відношення с/ш в адитивній суміші гармонічного сигналу і шуму.

Методикою моделювання передбачалось виконання наступних етапів:

1) генерування вибірки досліджуваного сигналу;

2) визначення гільберт-образу вибірки досліджуваного сигналу;

3) отримання масиву значень фаз сигналу  $\varphi[j]$ ,  $j = \overline{1, N}$ ;

4) формування масиву значень фазових зсувів сигналу як різниці між значеннями  $\varphi[j]$ ,  $j = \overline{1, N}$  та значеннями лінійної моделі фази гармонічного сигналу  $\varphi_0[j] = 2\pi f_j T_{\Delta}$ ,  $j = \overline{1, N}$ ;

5) визначення складових вибірових тригонометричних моментів  $a_n$  та  $b_n$  (відповідно косинус- та синус-моментів);

6) визначення  $\left| \hat{f}_n \right| = \sqrt{a_n^2(\alpha) + b_n^2(\alpha)}$  – модуля

вибірових тригонометричних моментів;

7) повторне виконання п.1-6 і отримання функції  $\left| \hat{f}_n(n) \right|$  для різних значень с/ш;

8) побудова градувальної характеристики  $\frac{U_m}{\sigma} = f(\Delta n)$  як залежності відношення с/ш від діапазону  $\Delta n$  зміни порядку тригонометричних моментів, що охоплює лінійні ділянки  $\left| \hat{f}_n(n) \right|$  функції  $\frac{U_m}{\sigma} = f(\Delta n)$ .

Розглянемо детальніше останні пункти методики експерименту. Графіки функцій  $\left| \hat{f}_n(n) \right|$  наведені на рис. 2.

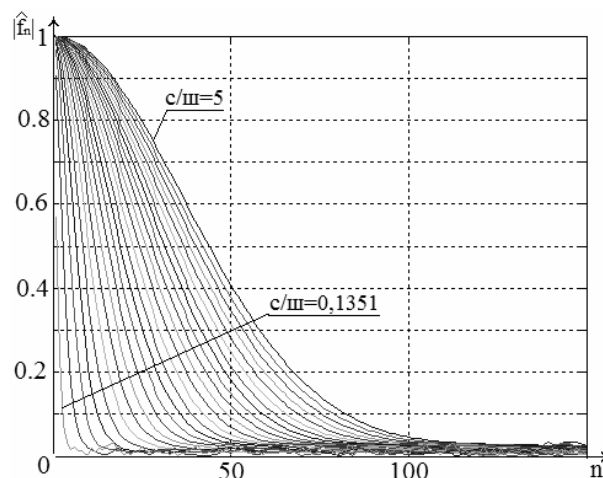


Рис. 2. Графік модулів тригонометричних моментів для різних відношень с/ш

Для визначення відношення сигнал-шум та побудови градувальної характеристики запропоновано виділити лінійну ділянку функції  $\left| \hat{f}_n(n) \right|$  для різних відношень с/ш. З рис. 2 видно, що криві на графіку найбільш близькі до лінійних функцій у межах  $\left| \hat{f}_n \right| \in (0,2; 0,8)$ .

Зміні функцій  $\left| \hat{f}_n(n) \right|$  в цих межах відповідає певний діапазон значень їх порядків  $\Delta n$ . Незавжди помітити, що  $\Delta n$  на ділянці  $0,2 < \left| \hat{f}_n(n) \right| < 0,8$  прямо пропорційно залежить від відношення с/ш: чим більше значення с/ш, тим більше значення  $\Delta n$ . Слід зауважити, що процес визначення  $\Delta n$  за графіком на рис. 2 може супроводжуватись похибкою, яка за характером подібна до похибки квантування. Ця похибка обумовлена тим, що оцінене значення  $n$  може виявитись не цілим числом, хоча за визначенням тригонометричного моменту (1) воно має бути цілим числом.

Для кожної лінійної ділянки кривих на рис. 2 визначимо відповідні значення  $\Delta n$ .

За отриманими даними побудуємо нову залежність  $\frac{U_m}{\sigma} = f(\Delta n)$  графік якої наведено на рис. 3 (крива 1). Як видно з графіка ця функція має лінійний характер і може бути апроксимована рівнянням виду

$$y = ax + b,$$

де  $a$  і  $b$  - коефіцієнти лінійної моделі.

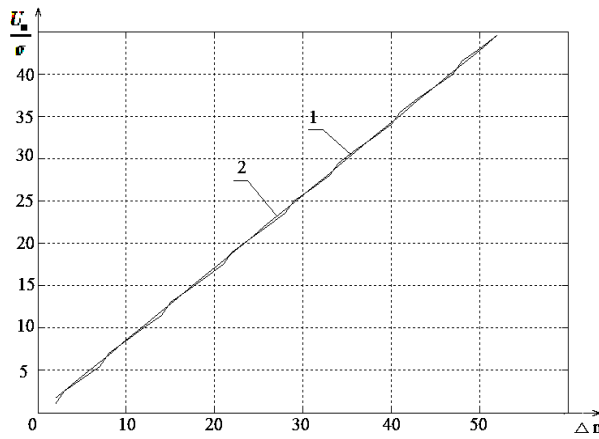


Рис. 3. Експериментальна (1) та апроксимована (2)

$$\text{залежність } \frac{U_m}{\sigma} = f(\Delta n).$$

Коефіцієнти  $a$  і  $b$  визначались за методом найменших квадратів, що дозволило отримати такі значення:  $a = 1,1278$  і  $b = 1,500$ . Отже для визначених границь  $R_1 = 0,2$  та  $R_2 = 0,8$ , що обмежують лінійні ділянки функцій  $|\hat{f}_n(n)|$ , рівняння за яким можна визначити відношення с/ш становить

$$\frac{U_m}{\sigma} = 1,1278\Delta n + 1,5.$$

Ця залежність наведена на рис.3, крива 2. Перевірка коректності отриманих результатів здійснювалась в модельному експерименті для відомих заданих значень амплітуди гармонічного сигналу  $U_m$  і дисперсії шуму  $\sigma^2$ . Наприклад, для амплітуди  $U_m = 5$  В та дисперсії шуму  $\sigma^2 = 0,8$  В<sup>2</sup> маємо  $\frac{c}{\sigma} = \frac{5}{\sqrt{0,8}} = 5,5902$ . Експериментально отримане значення  $\Delta n = 4$  дає наступний результат:  $\frac{c}{\sigma} = 6,0112$ . Абсолютна похибка визначення с/ш становила  $\Delta = 0,421$ , а відносна –  $\gamma \approx 7,5\%$

Таким чином відношення с/ш для адитивної суміші гармонічного сигналу і гауссівського шуму може бути визначене через вибіркові тригонометричні моменти фазових зсувів сигналу з високою точністю. Похибка визначення відношення с/ш залежить від співвідношення частоти сигналу та частоти дискретизації і може бути зменшена за рахунок їх коректного вибору.

## Висновки

Встановлено, що модуль тригонометричних моментів випадкової фази сигналів в адитивній суміші гармонічного сигналу і гауссівського шуму функціонально залежить від відношення с/ш.

Розроблено і реалізовано в середовищі Matlab методику комп'ютерного вимірювального експерименту для дослідження вибірових тригонометричних моментів фазових зсувів сигналів.

Отримано лінійну апроксимацію залежності

$$\frac{U_m}{\sigma} = f(\Delta n),$$

яка може бути використана для оцінки відношення сигнал/шум.

## Список літератури

1. Мардіа К. Статистический анализ угловых наблюдений: Пер. с англ. / К. Мардіа – М.: Главная ред. физ.-мат. лит. изд-ва "Наука", 1978. – 240 с.
2. Куц Ю. В. Статистична фазометрія / Ю.В. Куц, Л.М. Щербак. – Тернопіль: В-во Терноп. технологіч. ун-ту, 2009. – 383 с.
3. Статистичні характеристики випадкових величин і випадкових кутів / В.С. Єременко, Ю.В. Куц, О.В. Монченко, Л.М. Щербак // Матеріали VII Міжнародної НТК „Авіа-2007”. – Т.1 „Інформаційно-діагностичні системи”.-К.: НАУ, 2007. – С. 11.28-11.31.
4. Суранов А.Я. LabVIEW: справочник по функциям / А.Я. Суранов. – М.: ДМК Пресс, 2005. – 512 с.

Надійшла до редколегії 27.06.2013

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.Д. Карлов, Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків.

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ МОМЕНТОВ В АНАЛИЗЕ ДАННЫХ ФАЗОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Ю.В. Куц, И.А. Куприйчук, А.А. Рыжкова

Исследовано применение метода тригонометрических моментов в фазометрии. Рассмотрены основные законы распределения случайных углов. Разработанная методика использования тригонометрических моментов для определения сигнал-помеха, основанная на зависимости модуля тригонометрических моментов от значения сигнал-помеха.

**Ключевые слова:** выборка, случайный угол, характеристическая функция, тригонометрический момент, закон распределения.

## APPLICATION OF TRIGONOMETRIC POINTS IN THE DATA ANALYSIS PHASE MEASUREMENTS

Y.V. Kutz, I.A. Kupriyuchuk, A.A. Ryzhkova

Investigated the application of the method of trigonometric points in phase meter. The basic laws of distribution of random angles. The method using trigonometric moments to determine the signal-to-noise ratio, based on the dependence of the modulus of trigonometric points on signal-to-noise ratio.

**Keywords:** sampling, random angle characteristic function, trigonometric moment distribution law.