

УДК 534.3

Н.Ю. Филиппова

Национальный технический университет Украины «КПИ», Киев

ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПРИЕМЕ ЗВУКА ЭКРАНИРОВАННЫМ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ЭЛЕКТРОУПРУГИМ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕМ С РАЗРЕЗНЫМИ ЭЛЕКТРОДАМИ

В рамках электроупругой модели поставлена и аналитически решена задача о приеме звука цилиндрическим пьезокерамическим преобразователем с разрезными электродами, который размещен в замкнутом волновом слое. Решение задачи производится с помощью метода частичных областей, а также с использованием свойств полноты и ортогональности цилиндрических волновых функций при сопряжении полей на границах частичных областей. Определены коэффициенты разложения акустических, механических и электрических полей колебательной системы.

Ключевые слова: оболочка, пьезокерамический преобразователь, «сквозная» задача, метод частичных областей, волновой слой, разрезные электроды.

Введение

В настоящее время вопросы разработки и эксплуатации гидроакустических устройств вызывают значительный интерес. Актуальной представляется задача оценки основных акустических характеристик бортовых устройств в части уточнения и универсализации расчетных методик. В связи с этим, в гидроакустических устройствах практический интерес представляют вопросы использования кольцевых технологических слоев и связанная с этим ситуация изучения взаимодействия звука со слоем, который имеет определенные волновые свойства или даже со структурой из нескольких слоев.

Действительно, конструкция гидроакустического преобразователя наряду с активным элементом неизбежно предполагает наличие согласующих волновых слоев, которые решают множество задач не только технологического (скажем, таких как согласование, герметизация, увеличение динамической прочности), но еще и волнового характера (экранирование) – для обеспечения желаемой направленности преобразователя.

На сегодняшний день существует достаточно широкий перечень работ, использующих в постановочной части представление преобразователя в виде идеализированного тела цилиндрической формы или устройства с фиксированными физическими свойствами [1 – 3]. К тому же в ряде работ (например, [1, 3]) решение указанной задачи представлено с использованием элементов методологии расчета преобразователей как систем с сосредоточенными параметрами. Так, в рассмотренной в традиционном модельном представлении задаче дифракции плоской волны на замкнутом волновом слое получены количественные результаты, позволяющие установить основные особенности звукового поля вблизи слоя при различных

волновых сопротивлениях слоя и окружающей среды [1]. Однако, в ней неучтена взаимосвязь основных физических полей преобразователя.

Работы [4, 5] содержат постановку, решение, исследование акустических полей задачи о приеме звуковых волн электроупругим преобразователем, заключенного в замкнутый переходной слой. Эти работы рассматривают лишь случай полного электродирования поверхности преобразователя. Добавим также, что работы [6, 7], посвященные исследованию преобразователей с разрезными электродами, представлены лишь для пьезокерамических преобразователей без волнового слоя. В связи с этим, **целью работы** является постановка и аналитическое решение задачи о приеме звука цилиндрическим электроупругим преобразователем с разрезными электродами, который размещен в замкнутом волновом слое.

Постановка задачи

Предполагается, что в идеальной малосжимаемой жидкости размещена колебательная система (рис. 1), которая состоит из радиально поляризованного пьезокерамического цилиндрического преобразователя бесконечной длины и замкнутого волнового кольцевого слоя радиуса R_{1s} . Преобразователь представлен в виде круговой электроупругой оболочки радиуса R_{0s} (толщина стенки $h_{0s} = R_{1s} - R_{0s}$), которая выполнена из пьезоматериала со скоростью звука c_{ms} и плотностью ρ_{ms} . Будем рассматривать колебания оболочки в плоскости нормального сечения, т.е. полагаем, что перемещения в меридиональном направлении равны нулю. Внутри преобразователя – вакуум. На поверхность преобразователя нанесены электроды с углом раскрытия $2\gamma_{0s}$.

Предполагается, что материал слоя не сопротивляется сдвиговым деформациям, а его акустиче-

ские свойства характеризуются плотностью ρ_1 и скоростью звука c_1 .

В соответствии с основными положениями метода частичных областей [1], разобьем область существования поля на ряд областей I, II, III (рис. 1). Так, область I ($R_{0s} \leq r_s \leq R_{1s}$) $\varphi_s \in [0; 2\pi]$ соответствует замкнутому волновому слою, область II ($R_{1s} \leq r_s < \infty$) $\varphi_s \in [0; 2\pi]$ – рабочей среде, область III ($r_s \leq R_{0s} - h_{0s}$) $\varphi_s \in [0; 2\pi]$ – внутреннему объему цилиндра. Полагаем, что вследствие условия внутренней вакуумизации акустическое поле в области III отсутствует, т.е. $p_{III} = 0$.

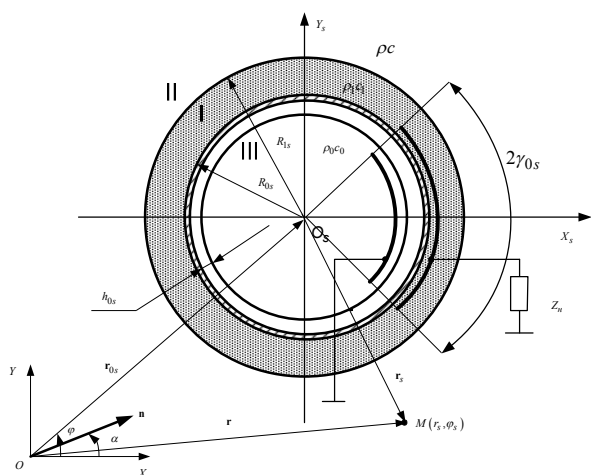


Рис. 1. Система координат

Координатные системы задачи включают в себя общую прямоугольную OXYZ и локальную систему координат $O_s X_s Y_s Z_s$, расположенные, так что оси $O_s X_s$ и $O_s Y_s$ лежат в плоскости нормального сечения преобразователя. Локальная $R_s \varphi_s Z_s$ круговая цилиндрическая система связана с прямоугольной системой известными соотношениями.

На заданную колебательную систему из бесконечности под углом α в направлении единичного вектора \mathbf{n} падает плоская звуковая волна единичной амплитуды, описываемая потенциалом $\Phi_{II}(r_s, \varphi_s)$. Падающая волна, достигнув внешней поверхности кольцевого слоя, вызывает появление в области II отраженной волны $\Phi_{II}(r_s, \varphi_s)$. При этом в кольцевом слое вследствие многократного переотражения волн от границ слоя возникает поле $\Phi_I(r_s, \varphi_s)$, которое определяется бесконечной суммой волн, распространяющихся навстречу друг другу.

Внешней нагрузкой колеблющейся системы является среда с плотностью ρ и скоростью звука c .

В рабочей среде распространяются акустические волны, описываемые уравнением Гельмгольца, записанным для волнового потенциала $\Phi_{II}(r_s, \varphi_s)$:

$$\Delta \Phi_{II}(r_s, \varphi_s) + k^2 \Phi_{II}(r_s, \varphi_s) = 0,$$

где $\Phi_{II}(r_s, \varphi_s)$ – волновой потенциал, k – волновое число, Δ – оператор Лапласа для цилиндрической системы координат:

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Полагаем, что в замкнутом кольцевом слое (область II) поле удовлетворяет уравнению Гельмгольца вида:

$$\Delta \Phi_I(r_s, \varphi_s) + k^2 \Phi_I(r_s, \varphi_s) = 0.$$

где $\Phi_I(r_s, \varphi_s)$ – волновой потенциал слоя.

В соответствии с заданным режимом работы (прием) колебательная система выступает в качестве генератора электрической энергии. Деформация пьезоэлемента происходит благодаря возникновению механических напряжений, которые образуются вследствие возбуждения оболочки внешним акустическим воздействием. Таким воздействием и будем считать плоскую акустическую волну единичной амплитуды $\Phi_{II}(r_s, \varphi_s)$, давление которой связано с волновым потенциалом известным соотношением:

$$p_0(r_s, \varphi_s) = -i\omega \frac{\partial \Phi_{II}(r_s, \varphi_s)}{\partial t}.$$

Разложение плоской звуковой волны $p_0(r_s, \varphi_s)$ по волновым цилиндрическим функциям может быть сведено к виду

$$p_0(\varphi_s, r_s) = e^{ik(nr_{0s})} e^{ik(nr)}, \quad (1)$$

где r – расстояние до точки наблюдения.

На внутреннюю и внешнюю поверхности преобразователя нанесена пара электродов, которые частично покрывают поверхность оболочки. Толщины электродов считаем малыми, не влияющими на электромеханические характеристики преобразователя и не требующими привлечения дополнительных характеристик по механическому и электрическому полям. Пара электродов преобразователя нагружены на электрическое (в общем случае комплексное) сопротивление. При этом неизвестными считаются разность потенциалов и токи в цепи нагрузки электрода. Отметим, что указанный ток отвечает направленному движению свободных зарядов в проводниках внешней цепи и, в основном, определяет полный ток в ней.

Как известно (например, [8]), ток смещения в диэлектрике пропорционален скорости изменения электрической индукции $\mathbf{D} (D_r, D_\varphi, D_z)$, где D_r , D_φ , D_z – радиальный, окружной и меридиональный компоненты электрической индукции. Он возникает при изменении напряженности электрического поля и характеризует смещение зарядов, которые связаны со структурой материала (в данном случае – пьезоматериала).

Электрическое напряжение, определяемое в результате решения «сквозной» задачи о приеме звука, представим, используя функцию включения, предложенную ранее в работе [6], в виде

$$U_H = U_H f_1(\varphi_s),$$

где $f_1(\varphi_s) = B \cdot \text{rect}(2\gamma_{0s}/\varphi_s)$ – кусочно-непрерывная функция, которая предполагает зависимость от φ_s и определяет положение электрода на поверхности преобразователя, а также величину его углового раскрытия m -го электрода.

Поле в рабочей среде (область II) определяется в виде суперпозиции поля падающей волны (1) и рассеянного поля $p_s(\varphi_s, r_s)$, которое представлено в виде:

$$p_s(\varphi_s, r_s) = -i\omega\rho \sum_n E_n H_n^{(1)}(kr_s) e^{in\varphi_s},$$

где $H_n^{(1)}(kr_s)$ – функция Ханкеля первого рода n -го порядка.

При условии совпадения центров общей и локальной системы координат O и O_s (т.е. $r_{0s} = 0$), плоская падающая волна $p_0(\varphi_s, r_s)$ в (1) имеет вид

$$p_0(\varphi_s, r_s) = \sum_n i^n I_n(kr_s) e^{in\varphi_s} e^{-in\alpha}, \quad (2)$$

где $I_n(kr_s)$ – функция Бесселя первого рода n -го порядка. Тогда результирующее поле в области II в локальных координатах запишем как

$$P_{II} = p_0(\varphi_s, r_s) + p_s(\varphi_s, r_s) = -i\omega\rho \times \left[\sum_n E_n H_n^{(1)}(kr_s) e^{in\varphi_s} + \sum_n i^n I_n(kr_s) e^{in\varphi_s} e^{-in\alpha} \right]. \quad (3)$$

В области I поле в виде бесконечного набора распространяющихся навстречу друг другу цилиндрических волн представляется акустическим воздействием вида:

$$p_I = -i\omega\rho_1 \left[\sum_n (A_n I_n(k_1 r_s) + B_n N_n(k_1 r_s)) e^{in\varphi_s} \right],$$

где $N_n(k_1 r_s)$ – функция Неймана первого рода; $k_1 = \omega/c_1$ – волновое число слоя.

Рассмотрим граничные условия задачи.

Акусто-механические граничные условия. Формулировка граничных условий по акустическому полю предполагает непрерывный контакт колебательной системы с акустической средой.

Считаем, что на внешней поверхности слоя $r_s = R_{1s}$, $\varphi_s \in [0; 2\pi]$, граничащей с рабочей средой, выполняются силовые и кинематические условия сопряжения областей, которые составляют систему функциональных уравнений:

$$\begin{cases} p_I = p_{II}; \\ v_{rI} = v_{rII}. \end{cases} \quad (4)$$

где v_{rII} – радиальная составляющая колебательной скорости частиц рабочей среды; v_{rI} – радиальная

составляющая колебательной скорости материальных частиц поверхности кольцевого слоя.

На границе контакта оболочки с кольцевым слоем выполняется условие равенства составляющих скорости перемещения по нормали частиц среды v_{rI} и скорости перемещения точек поверхности упругой оболочки. Это дает возможность записать следующее функциональное уравнение:

$$\frac{1}{i\rho_1 c_1} \frac{\partial p_I}{\partial(k_1 r_s)} = v_{rII}, \quad (5)$$

где $r_s = R_{0s}$, $\varphi_s \in [0; 2\pi]$ – поверхность оболочки (внутренняя поверхность слоя)

Считаем, что нормальные составляющие колебательной скорости перемещения точек поверхности оболочки и волнового слоя определяются выражениями:

$$\begin{aligned} v_{rI} &= \frac{\partial W_s}{\partial t} = \dot{W}_s \quad \text{при } r_s = R_{0s}; \\ v_{rII} &= \frac{\partial W_{sl}}{\partial t} = \dot{W}_{sl} \quad \text{при } r_s = R_{1s}. \end{aligned} \quad (6)$$

где W_{sl} – радиальная составляющая перемещений точек поверхности слоя, W_s – радиальная составляющая перемещений точек поверхности оболочки, которая может быть представлена разложением:

$$W_s = \sum_m W_m e^{im\varphi_s}, \quad m = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$$

V_s – тангенциальная составляющая перемещений точек поверхности оболочки:

$$V_s = \sum_m V_m e^{im\varphi_s}.$$

Отсутствие притока акустической энергии извне определяем условием излучения Зоммерфельда.

Граничные условия по электрическому полю. Для определения граничных условий задачи по электрическому полю при нагружении электрода на внешнее электрическое сопротивление Z_n , запишем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}) dS = -\frac{U_H(t)}{Z_n}$$

где $U_H(t)$ – разность потенциалов на нагрузке Z_n электрода.

Компоненты вектора электрической индукции \mathbf{D} определяются исходя из геометрии электрода. При этом на внутренней и внешней поверхности преобразователя для радиальной и угловой составляющих вектора электрической индукции \mathbf{D} должно выполняться условие $D_\varphi = D_z = 0$, т.е. вектор электрической индукции будет определяться лишь радиальной компонентой D_r .

Для режима холостого хода можно записать:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}) dS = 0.$$

Это условие определяет ситуацию, когда суммарный заряд на электродах не изменяется при деформировании цилиндрической оболочки.

При замыкании электродов выравнивание зарядов на них сопровождается мгновенным уменьшением разности потенциалов. Следовательно, напряженность электрического поля E_r будет уменьшаться мгновенно до значения $E_r = 0$.

Для неэлектродированной области поверхности преобразователя потребуем выполнения следующего граничного условия:

$$\Delta\Psi_s = 0, \mathbf{D} = 0,$$

где $\Delta\Psi_s$ – разность потенциалов на неэлектродированной поверхности площадью S .

Таким образом, электрическое состояние деформируемой пьезоэлектрической оболочки должно удовлетворять упрощенным уравнениям Максвелла.

Решение задачи

Решение задачи будем проводить с использованием [9, 10]:

– уравнений состояния для пьезокерамики, которые линейно связывают между собой компоненты механических напряжений, деформации, электрическую напряженность и индукцию;

– уравнений движения элемента механической колебательной системы преобразователя;

– соотношений Коши, связывающие компоненты тензора деформаций и вектора перемещения;

– уравнений вынужденной электростатики.

Совместное решение указанных уравнений позволяет определить характеристики преобразователя с учетом связанности трех основных полей – электрического, механического и акустического. Решение будет производиться с использованием метода Фурье и свойств полноты и ортогональности функций $e^{in\varphi}$. Таким образом, задача сводится к отысканию неизвестных коэффициентов разложений для акустических, механических и электрических полей предложенной колебательной системы "рабочая среда – волновой слой – преобразователь" как системы с распределенными параметрами. Уравнение состояния пьезоэлектрической керамики для трехмерной координатной системы записаны следующим образом [9]:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= c_{33}^E \varepsilon_{rr} + c_{13}^E (\varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{zz}) - e_{33} E_r; \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= c_{13}^E \varepsilon_{rr} + c_{11}^E \varepsilon_{\varphi\varphi} + c_{12}^E \varepsilon_{zz} - e_{31} E_r; \\ \sigma_{zz} &= c_{13}^E \varepsilon_{rr} + c_{11}^E \varepsilon_{\varphi\varphi} + c_{11}^E \varepsilon_{zz} - e_{31} E_r; \\ \sigma_{r\varphi} &= c_{44}^E \varepsilon_{r\varphi} - e_{15} E_{\varphi}; \\ \sigma_{rz} &= c_{44}^E \varepsilon_{rz} - e_{15} E_z; \\ \sigma_{\varphi z} &= (c_{11}^E - c_{12}^E) \varepsilon_{\varphi z} / 2; \\ D_r &= \varepsilon_{33}^S E_r + e_{31} (\varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{zz}) + e_{33} \varepsilon_{rr}; \\ D_{\varphi} &= \varepsilon_{11}^S E_{\varphi} + e_{15} \varepsilon_{r\varphi}; \\ D_z &= \varepsilon_{11}^S E_z + e_{15} \varepsilon_{rz}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\sigma_{rr}, \sigma_{rz}, \sigma_{r\varphi}, \dots, \sigma_{zz}$ – компоненты тензора механических напряжений; $E_{\varphi}, E_z, E_r, D_{\varphi}, D_z, D_r$ – составляющие вектора электрической напряженности \mathbf{E} и электрической индукции \mathbf{D} ; $\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{rz}, \varepsilon_{r\varphi}, \dots, \varepsilon_{zz}$ – компоненты тензора механических деформаций;

$c_{11}^E, c_{12}^E, \dots, c_{33}^E, e_{33}, \dots, e_{15}, \varepsilon_{11}^S, \varepsilon_{33}^S$ – постоянные материала: модули упругости при нулевой деформации, пьезомодули, диэлектрические проницаемости при нулевой деформации соответственно.

Характер колебаний элемента механической колебательной системы преобразователя в напряжениях удовлетворяет уравнению Ньютона:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} &= \rho_S \frac{\partial^2 U_r}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{z\varphi}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\varphi}}{r} &= \rho_S \frac{\partial^2 U_{\varphi}}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} &= \rho_S \frac{\partial^2 U_z}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (8)$$

а компоненты тензора деформации и вектора перемещений связываются соотношениями Коши:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial U_r}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial U_{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{U_r}{r}; \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial U_z}{\partial z}; \quad \varepsilon_{rz} = \frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial r}; \\ \varepsilon_{z\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial U_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial U_{\varphi}}{\partial z}; \\ \varepsilon_{r\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial U_{\varphi}}{\partial r} - \frac{U_{\varphi}}{r}. \end{aligned} \quad (9)$$

Поверхностная плотность электрического заряда определяется компонентом вектора электрической индукции, который ориентирован вдоль нормали к электродированным поверхностям пьезоэлектрической оболочки [10]:

$$Q = \int_S \mathbf{D} d\mathbf{S} \Rightarrow A \int_{-\gamma_{0s}}^{\gamma_{0s}} D_r d\varphi_s,$$

где $d\mathbf{S} = A d\varphi_s$.

Для оболочки с радиальной поляризацией в соответствии с [9] электрическая индукция D_r выражается через уравнения состояния следующим образом

$$D_r = \varepsilon_{33}^S E_r + e_{31} (\varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{zz}), \quad (10)$$

где меридианальный компонент тензора деформаций ε_z равен нулю (в силу бесконечности оболочки $\varepsilon_z = \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$), а окружной компонент тензора деформаций срединной поверхности ε_{φ} определится как

$$\varepsilon_{\varphi} = \frac{1}{R_{0s}} \left(\frac{\partial V_s}{\partial \varphi} + W_s \right). \quad (11)$$

Рассматривая плоскую задачу, считаем, что уравнения движения электроупругой оболочки с учетом (7) – (9) могут быть приведены к системе [9]:

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[1 + \frac{h_{0s}^2}{12R_{0s}^2} \left(1 + \frac{e_{31}^2}{c_{11}^E \epsilon_{33}^S} \right) \right] \frac{\partial^2 V_s}{\partial \varphi_s^2} + \frac{\partial W_s}{\partial \varphi_s} - \frac{h_{0s}^2}{12R_{0s}^2} \times \\ & \times \left(1 + \frac{e_{31}^2}{c_{11}^E \epsilon_{33}^S} \right) \frac{\partial^3 W_s}{\partial \varphi_s^3} - R_{0s} \frac{e_{31}}{c_{11}^E} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi_s} - \frac{R_{0s}^2 \rho_{ms}}{C_{11}^E} \frac{\partial^2 V_s}{\partial t^2} = 0; \\ & \frac{\partial V_s}{\partial \varphi_s} + \frac{h_{0s}^2}{12R_{0s}^2} \left(1 + \frac{e_{31}^2}{c_{11}^E \epsilon_{33}^S} \right) \frac{\partial^3 V_s}{\partial \varphi_s^3} - W_s - \\ & - \frac{h_{0s}^2}{12R_{0s}^2} \left(1 + \frac{e_{31}}{c_{11}^E \epsilon_{33}^S} \right) \frac{\partial^4 W_s}{\partial \varphi_s^4} + R_{0s} \frac{e_{31}}{c_{11}^E} E_r + \\ & + \frac{R_{0s}^2}{h_{0s} c_{11}^E} q_{rs} - \frac{R_{0s}^2 \rho_{ms}}{c_{11}^E} \frac{\partial^2 W_s}{\partial t^2} = 0, \end{aligned} \right. \quad (12)$$

где q_{rs} – внешняя акустическая нагрузка, представлена выражением (3); e_{31} – пьезокерамическая константа; ϵ_{33}^S – диэлектрическая проницаемость материала оболочки; E_r – радиальная составляющая вектора напряженности электрического поля.

Для системы (12) определим U_H исходя из [9]:

$$I_H = \frac{U_H}{Z_H} = - \int_S \frac{\partial D_r}{\partial t} dS = \int_{-\gamma_{0s}}^{+\gamma_{0s}} (i\omega) D_r d\varphi_s. \quad (13)$$

После введения замены переменной интегрирования $dS = A d\varphi_s$ (где $A = \text{const} \approx 1.8 \cdot 10^{-2} R_{0s}$) подставим компоненты тензора деформаций (11) в выражение для электрической индукции (10), а затем в соотношение (13). Для цепи электрода, раскрыв которого определяется углом $2\gamma_{0s}$ получим выражение для электрического напряжения на нагрузке Z_H :

$$\begin{aligned} \frac{U_H}{Z_H} &= (i\omega) A \epsilon_{33} \frac{U_H}{h_{0s}} \int_{-\gamma_{0s}}^{+\gamma_{0s}} d\varphi_s + \\ &+ (i\omega) A \frac{e_{31}}{R_{0s}} \left(\sum_m W_m + im V_m \right) \int_{-\gamma_{0s}}^{+\gamma_{0s}} e^{im\varphi_s} d\varphi_s. \end{aligned}$$

Таким образом, электрическое напряжение на нагрузке Z_H определится как

$$U_H = L \left(\sum_m W_m + im V_m \right) \cdot 2\gamma_{0s} \frac{\sin m\gamma_{0s}}{m\gamma_{0s}}$$

где
$$L = i\omega A \frac{e_{31}}{R_{0s}} \left/ \left(\frac{1}{Z_H} - \frac{i\omega A \epsilon_{33}}{h_{0s}} 2\gamma_{0s} \right) \right.$$

Вводя обозначения

$$\begin{aligned} a &= \frac{h_{0s}^2}{12R_{0s}^2}; \quad b = \left(1 + \frac{e_{31}^2}{c_{11}^E \epsilon_{33}^S} \right); \quad c = \frac{R_{0s} e_{31}}{c_{11}^E h_{0s}}, \\ d &= \frac{R_{0s}^2 \rho_{ms}}{c_{11}^E}; \quad j = \frac{R_{0s}^2}{c_{11}^E h_{0s}}; \quad F_m(\omega) = d\omega^2 - (1 + ab)m^2; \quad (14) \\ \bar{F}_m(\omega) &= d\omega^2 - (1 + abm^4); \quad M_m = im(1 + abm^2). \end{aligned}$$

и, используя функцию включения, система (12) примет вид:

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_m F_m(\omega) V_m e^{im\varphi_s} + \sum_m M_m W_m e^{im\varphi_s} - \\ & - cE_r \left[\sum_k 2\gamma_{01}(ik) \frac{\sin k\gamma_{01}}{k\gamma_{01}} e^{ik\varphi_s} \right] = 0; \\ & - \sum_m M_m V_m e^{im\varphi_s} + \sum_m \bar{F}_m(\omega) W_m e^{im\varphi_s} + \\ & + cE_r \left[\sum_k 2\gamma_{01} \frac{\sin k\gamma_{01}}{k\gamma_{01}} e^{ik\varphi_s} \right] = j\omega \rho_1 \times \\ & \times \left(\sum_n A_n I_n(k_1 R_{0s}) e^{in\varphi_s} + \sum_n B_n N_n(k_1 R_{0s}) e^{in\varphi_s} \right). \end{aligned} \right. \quad (15)$$

Используя свойство полноты и ортогональности функций $e^{im\varphi_s}$ и $e^{ik\varphi_s}$ на интервале $\varphi_s \in [-\pi; \pi]$ перейдем к системе линейных алгебраических уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} & F_m(\omega) V_m + M_m W_m - L_{mw} W_m \times \\ & \times \left[2\gamma_{01}(im) \cdot (\sin m\gamma_{01}/(m\gamma_{01})) \right] = 0; \\ & \bar{F}_m(\omega) W_m - M_m V_m + L_{mw} W_m \left[2\gamma_{01} \frac{\sin m\gamma_{01}}{m\gamma_{01}} \right] + \\ & + L_{mu} V_m \left[2\gamma_{01} (\sin m\gamma_{01}/(m\gamma_{01})) \right] = j\omega \rho_1 \times \\ & \times \left(\sum_m A_m I_m(k_1 R_{0s}) + \sum_m B_m N_m(k_1 R_{0s}) \right), \end{aligned} \right. \quad (16)$$

где
$$L_{mw} = \frac{c}{h_{0s}} Q \cdot 2\gamma_{01} \frac{\sin m\gamma_{01}}{m\gamma_{01}},$$

$$L_{mu} = \frac{c}{h_{0s}} Q \cdot 2\gamma_{01}(im) \frac{\sin m\gamma_{01}}{m\gamma_{01}}.$$

Для разложений полей (4) – (6) запишем:

$$\left\{ \begin{aligned} & W_m = -i \frac{k_1}{\omega} \left(A_m I'_m(k_1 R_{0s}) + B_m N'_m(k_1 R_{0s}) \right); \\ & k_1 \left[A_m I'_m(k_1 R_{1s}) + B_m N'_m(k_1 R_{1s}) \right] = \\ & = k \left[E_m H_m^{(1)}(kR_{1s}) + i^m I'_m(kR_{1s}) e^{-im\alpha} \right]; \\ & \rho_1 \left[A_m I_m(k_1 R_{1s}) + B_m N_m(k_1 R_{1s}) \right] = \\ & = \rho \left[E_m H_m^{(1)}(kR_{1s}) + i^m I_m(kR_{1s}) e^{-im\alpha} \right]; \\ & \bar{F}_m(\omega) W_m - M_m V_m + \left[2\gamma_{01} (\sin m\gamma_{01}/(m\gamma_{01})) \right] \times \\ & \times L_{mw} W_m + L_{mu} V_m \left[2\gamma_{01} (\sin m\gamma_{01}/(m\gamma_{01})) \right] = \\ & = j\omega \rho_1 \left(\sum_m A_m I_m(k_1 R_{0s}) + \sum_m B_m N_m(k_1 R_{0s}) \right); \\ & F_m(\omega) V_m + M_m W_m - L_{mw} W_m \times \\ & \times \left[2\gamma_{01}(im) (\sin m\gamma_{01}/(m\gamma_{01})) \right] - L_{mu} V_m \times \\ & \times \left[2\gamma_{01}(im) (\sin m\gamma_{01}/(m\gamma_{01})) \right] = 0; \\ & U_H = L \left(\sum_m W_m + im V_m \right) \cdot 2\gamma_{0s} (\sin m\gamma_{01}/(m\gamma_{01})). \end{aligned} \right. \quad (17)$$

В системе уравнений (17) штрих указывает на дифференцирование по аргументу. Таким образом, получено шесть неизвестных уравнений, записанных для шести неизвестных коэффициентов разло-

жений полей $A_m, B_m, E_m, W_m, V_m, A_m, U_m$.

Проведя совместное решение линейных уравнений алгебраической системы (17) отыщем указанные неизвестные коэффициенты:

$$\left\{ \begin{array}{l} B_m = \frac{i^m e^{-im\alpha} (I_m(kR_{1s})H'_m(kR_{1s}) - I'_m(kR_{1s})H_m(kR_{1s}))}{\frac{\rho_1}{\rho} [\Delta_B I_m(k_1 R_{1s}) + N_m(k_1 R_{1s})] H'_m(kR_{1s}) - \frac{k_1}{k} [\Delta_B I'_m(k_1 R_{1s}) + N'_m(k_1 R_{1s})] H_m(kR_{1s})}; \\ A_m = \Delta_B B_m; \\ E_m = \left((k_1/k) [A_m I'_m(k_1 R_{1s}) + B_m N'_m(k_1 R_{1s})] - i^m I'_m(kR_{1s}) e^{-im\alpha} \right) / H'_0(kR_{1s}); \\ W_m = \frac{j \left[i\omega\rho_1 \left(\sum_m A_m I_m(k_1 R_{0s}) + \sum_m B_m N_m(k_1 R_{0s}) \right) \right]}{\bar{F}_m(\omega) - M_m \Delta_u + Q_{mw} [2\gamma_{01} \cdot \sin m\gamma_{01} / m\gamma_{01}] + Q_{mu} \Delta_u [2\gamma_{01} \cdot \sin m\gamma_{01} / m\gamma_{01}]}; \\ V_m = \Delta_u W_m; \\ U_m = Q \left(\sum_m W_m + imV_m \right) \cdot 2\gamma_{0s} \cdot \sin m\gamma_{01} / m\gamma_{01}, \end{array} \right.$$

$$\text{где } \Delta_u = \frac{M_m - Q_{mw} \left[2\gamma_{01} (im) \frac{\sin m\gamma_{01}}{m\gamma_{01}} \right]}{F_m(\omega) - Q_{mu} \left[2\gamma_{01} (im) \frac{\sin m\gamma_{01}}{m\gamma_{01}} \right]}, \quad \xi_A = - \frac{j \left[\omega\rho_1 c_1 \left(\sum_m A_m I_m(k_1 R_{0s}) + \sum_m B_m N_m(k_1 R_{0s}) \right) \right]}{\bar{F}_m(\omega) - M_m \Delta_u + Q_{mw} \left[2\gamma_{01} \frac{\sin m\gamma_{01}}{m\gamma_{01}} \right] + Q_{mu} \Delta_u \left[2\gamma_{01} \frac{\sin m\gamma_{01}}{m\gamma_{01}} \right]}.$$

Таким образом, в результате решения электроупругой задачи о приеме звука цилиндрическим преобразователем с разрезными электродами, который размещен в замкнутом волновом слое, получено шесть выражений для определения шести неизвестных коэффициентов разложений, которые дают возможность отыскать указанные выше характеристики основных физических полей (акустического, механического и электрического)

Выводы

Таким образом, в работе выполнена постановка задачи о приеме звука цилиндрическим электроупругим преобразователем с разрезными электродами, который размещен в замкнутом волновом слое. При этом проведено аналитическое решение, для которого использовался «сквозной» метод и привлекалась линейная теория электроупругих оболочек.

В результате решения получены основные соотношения для неизвестных коэффициентов разложений полей позволяющих рассчитать давления в слое и среде, напряжение на нагрузке электрода, а также составляющие перемещений точек поверхности оболочек.

Список литературы

1. Гринченко В.Т. Волновые задачи рассеяния звука на упругих оболочках / В.Т. Гринченко, И.В. Вовк. – К.: Наук.думка, 1986. – 240 с.
2. Глазнов В.Е. Экранирование гидроакустических антенн / В.Е. Глазнов. – Л.: Судостроение, – 1986. – 148 с.

3. Плескач М.Г. Випромінення звуку циліндричним п'єзокерамічним перетворювачем, розміщеним в шарі звукопрозорого матеріалу / М.Г. Плескач, О.Г. Лейко // Електроніка і зв'язь. – 2010. – № 4. – С. 175 – 179.

4. Филиппова Н.Ю. Постановка и решение задачи о приеме звука цилиндрическим электроупругим преобразователем с полностью электродированной поверхностью, размещенным в замкнутом волновом слое / Н.Ю. Филиппова, А.В. Коржик // Електроніка і зв'язь. – 2012. – №1. – С. 18 – 24.

5. Филиппова Н.Ю. Закономерности формирования акустических полей приемного цилиндрического пьезокерамического преобразователя, расположенного в кольцевом слое / Н.Ю. Филиппова, Е.В. Попсуй, А.В. Коржик // Електроніка і зв'язь. – 2012. – № 6. – С. 42 – 48.

6. Коржик А.В. Об особенностях электромеханических преобразований в приемных пьезокерамических преобразователях с разрезными электродами / А.В. Коржик // Електроніка і зв'язь. – 2010. – №2. – С. 224 – 230.

7. Коржик О.В. Дослідження акустичних характеристик одиночного п'єзокерамічного циліндричного перетворювача при розв'язанні задачі прийому в наскрізній постановці / О.В. Коржик, О.Г. Лейко // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2002. – №5. – С. 105 – 113.

8. Анго Андре. Математика для электро и радиоинженеров / Анго Андре. – М.:, 1964. – 772 с.

9. Гринченко В.Т. Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т. / В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, Н.А. Шульга. Отв. ред. А.Н. Гузь АН УССР. – К.: Наукова думка, 1989. – Т. 5: Электроупругость. – 280 с.

10. Петрищев О.Н. Гармонические колебания пьезокерамических элементов. Ч. 1. Гармонические колебания пьезокерамических элементов в вакууме и метод резонанса – антирезонанса / О.Н. Петрищев. – К.: Аверс, 2012. – 299 с.

Поступила в редколлегию 28.06.2013

Рецензент: д-р техн. наук, проф. О.В. Коржик, Национальный технический университет Украины «КПИ», Киев.

ПОСТАНОВКА ТА ВИРІШЕННЯ ЗАДАЧІ ПРО ПРИЙОМ ЗВУКУ ЕКРАНОВАНИМ ЦИЛІНДРИЧНИМ ЕЛЕКТРОПРУЖНИМ ПЕРЕТВОРЮВАЧЕМ З РОЗРІЗНИМИ ЕЛЕКТРОДАМИ

Н.Ю. Філіпова

В рамках електропружної моделі поставлена та аналітично вирішена задача про прийом звуку циліндричним перетворювачем з розрізними електродами, який розміщений у замкнутому кільцевому хвильовому шарі. Рішення задачі проводиться за допомогою методу часткових областей, а також з використанням властивостей повноти та ортогональності циліндричних хвильових функцій. Визначено коефіцієнти розкладу акустичних, механічних та електричних полів коливальної системи при сполученні полів на границях часткових областей.

Ключові слова: оболонка, п'єзокерамічний перетворювач, «наскрізна» задача, метод часткових областей, хвильовий шар, розрізні електроди.

SETTING AND SOLUTION OF THE PROBLEM OF RECEIVING A CYLINDRICAL ELECTROELASTIC SCREENED AUDIO CONVERTER WITH DISCONNECT ELECTRODES

N.Yu. Filipova

The problem of receiving a cylindrical electroelastic audio converter with disconnect electrodes, placed in a closed-wave layer based system is solved. Solution of the problem is occur with the method of partial domains, using the properties of completeness and orthogonality of the cylindrical wave functions for the conjugation of the fields on the boundaries of partial areas. The expansion coefficients of sound fields of the wave envelope and the annular layer is found.

Keywords: cover, piezotransducer, "through" the problem, the method of partial regions, the wave layer, disconnect electrodes.