УДК 621.391

А.С. Волков

Украинская государственная академия железнодорожного транспорта, Харьков

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СВЕРТОЧНЫХ КОДОВ В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ

Предложен метод построения алгебраических сверточных кодов в частотной области, основанный на применении преобразования Фурье в конечных полях. Показано, что разработанный метод позволяет строить алгебраическим способом сверточные коды с заданными параметрами и произвольной длиной кодового ограничения.

Ключевые слова: *сверточные коды, алгебраические сверточные коды, преобразование Фурье, помехоустойчивое кодирование.*

Введение

Постановка проблемы в общем виде и анализ литературы. В настоящее время в телекоммуникационных системах и сетях широко применяются помехоустойчивые сверточные коды [1 – 3, 6]. Необходимость применения сверточных кодов вызвана высокими требованиями к достоверности предаваемой информации по реальным каналам связи, в которых наблюдаются стирания, случайные и пакетированные ошибки [2 – 4, 6].

Известно, что сверточные коды с большой длиной кодового ограничения обладают большей корректирующей способностью [1, 4, 10]. При этом переборные способы построения сверточных кодов с большой длинной кодового ограничения ($v > 10$) обладают высокой сложностью [4, 7].

Введение алгебраических методов построения сверточных кодов (алгебраические сверточные коды) позволяет алгебраическим способом задавать сверточные коды с заранее заданными параметрами и произвольными длинами кодового ограничения [4, 5, 11]. Данные методы основаны на ограничении информационных слов блоковых кодов (например, БЧХ или Рида-Соломона) на произвольное подполе с последующим обобщением кодовых слов на непрерывный случай [4, 5]. Но вычисление кодовых слов полубесконечной длины алгебраических сверточных слов над полями с высокой степенью расширения имеет высокую вычислительную сложность (операции сложения и умножения) [7, 8].

Таким образом, актуальной научной задачей является поиск новых алгебраических методов построения сверточных кодов с высокой корректирующей способностью и низкой сложностью процедур кодирования и декодирования, для повышения достоверности передаваемых дискретных сообщений.

Цель статьи – разработка метода построения алгебраических сверточных кодов в частотной области с применением преобразования Фурье для повышения достоверности передаваемых дискретных сообщений.

Основной материал

Метод построения алгебраических сверточных кодов в частотной области основан на формировании кодовых слов недвоичных циклических блоковых кодов в частотной области, ограниченных на произвольное подполе, с последующим применением преобразования Фурье в конечных полях и обобщением процедуры кодирования на непрерывный случай.

Разработку метода построения в частотной области начнем с рассмотрения алгебраического сверточного (n, k) – кода.

Предположим, задан нерекурсивный сверточный (n, k) – код над $GF(q^m)$ в несистематическом виде. Пусть (n, k) – код имеет следующие параметры: $k = \log_m /M/$, $n = m$ и скорость кодирования $R = k/m$ [4, 5].

В то же время, зафиксируем недвоичный циклический блоковый (N, K, D) – код Рида-Соломона над $GF(q^m)$ в несистематическом виде [9 – 11]. Параметры данного алгебраического блокового (N, K, D) – кода следующие: длина блока кодового слова $N = q^m - 1$, K – длина информационного слова, D – минимальное кодовое расстояние недвоичного циклического блокового (N, K, D) – кода Рида-Соломона [9 – 11]. Представим информационную последовательность алгебраического сверточного (n, k) – кода в виде вектора:

$$f = (f_0, f_1, f_2, \ldots), \quad (1)$$

бесконечной длины, причем каждая компонента вектора $f_i \in M$, $/M/ \geq /GF(q)/$, $M \in GF(q^m)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$.

Разобьем вектор информационной последовательности f на секции следующим образом:

$$f = (f_0, f_1, f_2, ..., f_{K-1}) \cup (f_K, f_{K+1}, f_{K+2}, ... f_{2K-1}) \cup .... \quad (2)$$

Перепишем вектор информационной последовательности f в виде многочлена f(x) бесконечной длины, представленного последовательностью секций многочленов $f_L(x)$, с учетом оператора задержки $x^{L\cdot K}$ [4, 5]:

$$f(x)=\sum_{L=0}^{\infty} f_L(x)\cdot x^{L\cdot K}\,. \qquad (3)$$

Из выражения (3) очевидно, что секций многочленов $f_L(x)$ не перекрываются.

Для формирования вектора в частотной области (частотного вектора) длины N необходимо на позициях младших компонент каждой секции добавить последовательность, состоящую из 2·t нулей, где t – число ошибок, исправляемых сверточным кодом. Остальные $N-2\cdot t$ координат компонент каждой секции необходимо заполнить символами информационной последовательности согласно подмножеству M. Тогда каждую секцию, младшие компоненты которой имеют 2·t последовательных нулей, запишем в виде вектора [10]:

$$f_L=(0,0,...,0,f_{2t},f_{2t+1},f_{2t+2},...,f_{N-1})\,. \qquad (4)$$

Введем следующие обозначения: F_L – одна секция вектора кодового слова в частотной области, F_j – компонента частотного вектора. Следовательно:

$$F_L=(0,0,...,0,F_{N-K},F_{N-K+1},\\ F_{N-K+2},...,F_{N-1}), \qquad (5)$$

где $2\cdot t_1 = N - K$.

Последовательность, состоящую из 2·t нулей в каждой секции, принято называть множеством проверочных частот [10]. Каждая компонента частотного вектора, которая не принадлежит множеству проверочных частот, удовлетворяет следующим условиям: $F_j \in M$, $/M/ \geq /GF(q)/$, $M \in GF(q^m)$ [4, 5].

Тогда многочлен $F_L(x)$ одной секции кодового слова внешней ступени в частотной области можно записать:

$$F_L(x)=F_{N-K}x^{N-K}+F_{N-K+1}x^{N-K+1}+\\ +...+F_{N-2}x^{N-2}+F_{N-1}x^{N-1}. \qquad (6)$$

Из выражений (5) и (6) видно, что одна секция кодового слова алгебраического сверточного (n, k) – кода в частотной области является кодовым словом недвоичного циклического блокового (N, K, D) – кода Рида-Соломона над $GF(q^m)$ в частотной области, ограниченного на подполе, которое определяется множеством M [5, 9]. Таким образом, на основании выражений (2) и (5) вектор кодового слова F бесконечной длины алгебраического сверточного (n, k) – кода в частотной области над $GF(q^m)$, формируется следующим образом:

$$F=(0,0,...,0,F_{N-K},F_{N-K+1},F_{N-K+2},...,\\ F_{N-2},F_{N-1})\cup(0,0,...,0,F_{2N-K},F_{2N-K+1},\\ F_{2N-K+2},...,F_{2N-2},F_{2N-1})\cup.... \qquad (7)$$

На основании выражения (7) перепишем вектор кодового слова F в виде многочлена F(x) бесконечной длины в частотной области над $GF(q^m)$ который представим последовательностью секций многочленов $F_L(x)$ вида (6) в частотной области, при этом учтем оператор задержки $x^{L\cdot K}$ согласно выражению (3):

$$F(x)=\sum_{L=0}^{\infty} F_L(x)\cdot x^{L\cdot K}\,. \qquad (8)$$

Выполним замену оператора задержки $x^{L\cdot K}$ на оператор задержки $x^{L\cdot N}$. Тогда выражение (8) перепишем следующим образом:

$$F(x)=\sum_{L=0}^{\infty} F_L(x)\cdot x^{L\cdot N}\,. \qquad (9)$$

Благодаря введенному оператору задержки $x^{L\cdot N}$, слагаемые (секции кодовых слов сверточного кода в частотной области) в выражении (9) не перекрываются. Далее, с целью нахождения секции кодового слова алгебраического сверточного (n, k) – кода c_L во временной области, необходимо выполнить обратное преобразование Фурье над $GF(q^m)$ каждой секции кодового слова в частотной области [7, 8, 9]. Рассмотрим эту процедуру подробнее.

Согласно определению кода Рида-Соломона $N = q^m - 1$ [9,11], следовательно, длина одной секции c_L тоже равна $N = q^m - 1$. Тогда возможно выполнить обратное преобразование Фурье над $GF(q^m)$, при этом γ будет примитивным элементом поля $GF(q^m)$ [1, 7, 8].

Обратное преобразование Фурье над $GF(q^m)$ одной секции кодового слова сверточного кода в частотной области имеет вид [7, 8]:

$$c_i=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\gamma^{-i\cdot j}\cdot F_j\,, \qquad (10)$$

где $c_i \in GF(q^m)$; i = 0, …, N – 1.

Таким образом, согласно выражению (10) вычисляются все компоненты c_i одной секции кодового слова алгебраического сверточного (n, k) – кода c_L во временной области:

$$c_L=(c_0,c_1,c_2,...,c_{N-1})\,. \qquad (11)$$

Тогда, многочлен одной секции кодового слова $c_L(x)$ сверточного (n, k) – кода имеет вид [4, 5]:

$$c_L(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+...+c_{N-1}x^{N-1}\,. \qquad (12)$$

Особенностью данного метода является то, что вычисленная секция кодового слова c_L имеет несистематический вид.

Обобщим работу кодера сверточного (n, k) – кода в частотной области на непрерывный случай, при этом учтем, что сверточные коды обладают памятью [10]. Тогда, согласно выражениям (3) и (12) кодовое слово алгебраического сверточного (n, k) – кода над $GF(q^m)$ бесконечной длины во временной области можно представить в виде многочлена c(x), который формируется последовательным наложением перекрывающихся секций $c_L(x)$ вида (12) в соответствии с оператором задержки $x^{L\cdot K}$:

$$c(x) = \sum_{L=0}^{\infty} c_L(x) \cdot x^{L \cdot K} . \quad (13)$$

Заменив оператор задержки $x^{L \cdot K}$ на оператор задержки $x^{L \cdot N}$, где $N = q^m - 1$, выражение (13) перепишем следующим образом:

$$c(x) = \sum_{L=0}^{\infty} c_L(x) \cdot x^{L \cdot N} . \quad (14)$$

Таким образом, на выходе кодера сверточного (n, k) – кода над $GF(q^m)$ формируется кодовое слово с бесконечной длины. Отметим, что сверточный (n, k) – код построен алгебраическим методом, на основе представления секций кодовых слов в частотной области, с последующим применением обратного преобразования Фурье и обобщением работы кодера недвоичного ограниченного на подполе циклического блокового (N, K, D) – кода Рида-Соломона над $GF(q^m)$ в несистематическом виде на непрерывный случай. Несмотря на то, что процедура построения кода рассматривается в частотной области, по каналу связи передается кодовое слово с бесконечной длины сформированное во временной области.

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. Пусть задан недвоичный циклический блоковый (N, K, D) – код Рида-Соломона над $GF(q^m)$ в частотной области, информационные символы которого удовлетворяют подмножеству M ($/M/ \geq /GF(q)/$, $M \in GF(q^m)$). Тогда на основе применения обратного преобразования Фурье с последующим обобщением кодового слова c(x) на случай бесконечной длины в соответствии с оператором задержки $x^{L \cdot K}$ (13) можно определить алгебраическим способом сверточный (n, k) – код в частотной области над $GF(q^m)$ в несистематическом виде с параметрами:

$$k = \log_m /M/, n = m, R = k / m. \quad (15)$$

Особенностью метода кодирования сверточных кодов в частотной области является отсутствие необходимости поиска или построения порождающих многочленов. В то же время, данный алгебраический метод кодирования допускает любые (произвольно большие) длины секций кодового слова сверточного кода.

Выводы

Разработан метод построения алгебраических сверточных (n, k) – кодов в частотной области отличающийся от известных формированием кодовых слов недвоичных циклических блоковых кодов в частотной области, ограниченных на произвольное подполе с последующим применением обратного преобразования Фурье и обобщением процедуры кодирования на непрерывный случай. Алгебраический метод построения сверточных (n, k) – кодов в частотной области не требует поиска порождающих многочленов, что упрощает его определение.

Список литературы

1. *Blahut R. Algebraic codes on lines, planes and curves / R. Blahut. – Cambridge: Cambrige university press, 2008. – 543 p.*
2. *Carrasco R.A. Non-binary error control coding for wireless communication and data storage / R.A. Carrasco, M. Johnston. – Chichester: John Wiley & Sons Ltd., 2008. – 303 p.*
3. *Blahut R. Transform techniques for error control codes / R. Blahut // IBM J. research and development. – 1979. – Vol. 23, №3. – P. 299-315.*
4. *Данько Н.И. Алгебраические сверточные коды: учеб. пособие / Н.И. Данько, С.П. Евсеев, А.А. Кузнецов, П.Ф. Поляков, С.И. Приходько. – Х.: УкрГАЖТ, 2007. – 238 с.*
5. *Приходько С.И. Метод построения алгебраических каскадных сверточных кодов / С.И. Приходько, А.С. Волков // Системи обробки інформації. – Х.: ХУПС, 2010. – Вип. 6(87). – С. 224-228.*
6. *Кларк Дж. мл. Кодирование с исправлением ошибок в системах цифровой связи: пер. с англ.; под ред. Б.С. Цыбакова / Дж. мл. Кларк, Дж. Кейн. – М.: Радио и связь, 1987. – 392 с.*
7. *Блейхут Р. Теория и практика кодов, контролирующих ошибки: пер. с англ. / Р. Блейхут. – М.: Мир, 1986. – 576 с.*
8. *Блейхут Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов: пер. с англ./ Р. Блейхут. – М.: Мир, 1989. – 448 с.*
9. *Муттер В.М. Основы помехоустойчивой телепередачи информации / В.М. Муттер. – Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. Отд-ние, 1990. – 288 с.*
10. *Морелос-Сарагоса Р. Искусство помехоустойчивого кодирования. Методы, алгоритмы, применение / Р. Морелос-Сарагоса; [пер. с англ. В.Б. Афанасьева]. – М.: Техносфера, 2005. – 320 с.*
11. *Берлекэмп Э. Алгебраическая теория кодирования / Э. Берлекэмп; [пер. с англ. И.И. Грушко]; под ред. С.Д. Бермана. – М.: Мир, 1971. – 477 с.*

Поступила в редколлегию 11.06.2013

Рецензент: д-р техн. наук, проф. С.И. Приходько, Украинская государственная академия железнодорожного транспорта, Харьков.

МЕТОД ПОБУДОВИ АЛГЕБРАЇЧНИХ ЗГОРТКОВИХ КОДІВ У ЧАСТОТНІЙ ОБЛАСТІ

О.С. Волков

Запропоновано метод побудови алгебраїчних згорткових кодів у частотній області заснований на застосуванні перетворенні Фур'є у кінцевих полях. Показано, що розроблений метод дозволяє будувати алгебраїчним способом згорткові коди із заданими параметрами та довільною довжиною кодового обмеження.

Ключові слова: *згорткові коди, алгебраїчні згорткові коди, перетворення Фур'є, завадостійке кодування.*

THE METHOD OF CONSTRUCTING ALGEBRAIC CONVOLUTIONAL CODES IN THE FREQUENCY DOMAIN

A.S. Volkov

A method of constructing algebraic convolutional codes in the frequency domain based on the application of the Fourier transform over finite fields. It is shown that the method allows us to construct an algebraic method of convolution codes with given parameters and arbitrary constraint length.

Keywords: *convolutional codes, algebraic convolutional codes, Fourier transform, error correcting coding.*