УДК 519.7

В.А. Лещинский

Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков

О ЛОГИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ НАЧАЛЬНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ

Формально описаны некоторые исходные понятия логики, которыми пользуется математик в своей работе. С этой целью на языке алгебры подстановочных операций дана аксиоматическая характеристика понятий принадлежности элемента множеству, операций объединения, пересечения и дополнения множеств, включения и равенства множеств, связи отображений с отношениями и разбиений с эквивалентностями.

Ключевые слова: *теория интеллекта, алгебра конечных предикатов и предикатных операций, понятие.*

Введение

Формальное описание логических понятий будем вести на языке алгебры подстановочных операций [1]. Этот язык достаточно развит для того, чтобы на нем можно было беспрепятственно и в полном объеме описать простейшие логические понятия. Дальнейшее развитие идентификации логических понятий видится нам как аксиоматическое описание понятий самой алгебры предикатных операций. Так как инструмент, необходимый для формального описания логических понятий, по-видимому, всегда оказывается богаче предмета описания, то следует ожидать, что язык описания будет постоянно требовать своего усиления по мере усложнения описываемых логических понятий. При таком усилении сами собой появятся новые логические объекты для идентификации.

Идентификация логических понятий представляет собой уникальную научную область. В отличие от других разделов науки, она опирается, в конечном итоге, только на результаты собственных разработок. Углубление знаний о логических средствах, достигаемое посредством идентификации логических понятий, увеличивает надежность этих средств. Вместе с тем, усложнение объектов описания требует развития логических средств. Новые логические средства всегда вводятся только в тех случаях, когда без них не удается обойтись. В результате, в силу необходимости, появляются новые, еще более сложные, объекты для идентификации. Интересно узнать, исчерпывается ли на этом пути предмет исследования, или же теория логических понятий всегда уходит за горизонт, и поэтому ее никогда не удастся завершить.

Результаты исследований

1. Принадлежность элемента множеству

Отношение $x \in y$ принадлежности элемента $x \in A$ множеству $y \in B$ формально представляем предикатом $P(x, y)$ на $A \times B$, соответствующим этому отношению:

$$P(x, y)=1 \Leftrightarrow x \in y.$$

Объект y является множеством только в интерпретации. Теперь же это – только просто элемент множества B, совершенно не имеющий какой-либо своей структуры [2].

Избавляться от структуры объектов, подвергаемых идентификации, – это общий прием при идентификации объектов.

Структура объекта – это как раз то, что мы хотим описать при идентификации. Если мы не освободим объект от структуры, то не сможем его описать. От объекта должно остаться только его имя. Любая структура характеризуется связью частей объекта. P – это самый обычный предикат. Нам вовсе не обязательно знать, что в интерпретации он превращается в принадлежность.

Ниже приводится аксиоматическое определение элемента принадлежности множеству Оно состоит всего из одного условия, называемого аксиомой выделения:

$$\forall M \subseteq A \, \exists \, !y \in B \, \forall x \in A(P(x, y) \sim M(x)). \quad (1)$$

Условие (1) связывает три предиката: A, B и P. Множества A и B – это параметры уравнения (1). Как выяснится в дальнейшем (это надо будет доказать), требование единственности значения y в условии (1) излишне, оно выводится чисто логически, но мы его оставляем в аксиоме для удобства рассуждений. Аналогично мы поступили и при формулировке аксиомы единицы в аксиоматике натурального ряда.

Смысл аксиомы выделения состоит в следующем. Для каждого подмножества M множества A найдется в точности одно имя $y \in B$, такое что $M(x)=P(x, y)$.

Таким образом, предикат P(x, y) присваивает каждому подмножеству M множества A одно имя из числа элементов множества B. Разным множествам предикат P присваивает разные имена.

Теорема (о связи множеств и их имен). Пусть A – какое-нибудь множество, 2^A – система всех подмножеств M множества A, B – система имен всех подмножеств множества A. Множества $M \subseteq 2^A$ связаны с их именами $y \in B$ биекцией $\varphi: 2^A \to B$, $\varphi(M)=y$. Эта связь выражается предикатом принадлежности P(x, y) элемента $x \in A$ множеству $M \subseteq 2^A$ с именем $y \in C$, который задается условием (1). $y \in B$ – имена этих множеств, присваиваемые предикатом принадлежности P. Тогда отображение $\varphi(M)=y$ биективно.

Согласно этой теореме, отношение принадлежности P каждому множеству ставит в соответствие в точности одно имя. В этом и только этом заключается роль отношения принадлежности: давать каждому множеству свое имя. Условие (1) можно рассматривать как абстрактное (аксиоматическое, формальное) определение понятия принадлежности элемента множеству, отношения принадлежности $x \in y$ на $A \times B$. Аксиома выделения определяет не один, а много предикатов принадлежности. Каждому такому предикату соответствует своя биекция φ. Предикат принадлежности связан с соответствующим ему отношением принадлежности равносильностью: $P(x, y)=1 \Leftrightarrow x \in y$ $x \in A$ и $y \in B$. Принадлежность связывает элемент не с множеством, а с именем множества. Множества – это семантическая категория, множествам нет места в синтаксисе алгебры предикатов. Множества находятся за пределами формализма. Только решение логических уравнений дает множества. В логическом языке множеств нет, имеются в наличии только их имена.

Теорема (об общем виде предиката принадлежности). При любых $x \in A$ и $y \in B$ предикат принадлежности P выражается в виде:

$$P(x, y)= \exists M \subseteq A(M(x)\ y^{\varphi(M)}), \qquad (2)$$

где $\varphi: 2^A \to B$ – произвольно выбираемая биекция.

Запишем, для примера, формулой какой-нибудь предикат принадлежности. Пусть A={a, в}, B={a, b, c, d}, $2^A=\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ Задаемся биекцией φ: $2^A \leftrightarrow B$: $\varnothing \leftrightarrow a$; $\{a\} \leftrightarrow b$; $\{b\} \leftrightarrow c$, $\{c\} \leftrightarrow d$. По формуле (2) находим:

$$P(x, y)=0y^a \vee x^a\ y^b \vee x^b\ y^c \vee (x^a \vee x^b)y^d.$$

Имеет место обычная связь предметных переменных. Нет никаких иерархий. В этом примере имеются совпадающие имена у некоторых элементов и множеств, Хотя так не принято делать в математике, однако логически это вполне допустимо.

Рассмотрим пример записи конкретной принадлежности по формуле (2) в случае, когда имена множеств не совпадают с именами элементов. Берем A={a, b, c}, C={0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}. Ставим во взаимно однозначное соответствие всем подмножествам множества A имена из множества C: $\varnothing \leftrightarrow 0$; $\{a\} \leftrightarrow 1$; $\{b\} \leftrightarrow 2$; $\{c\} \leftrightarrow 3$; $\{a, b\} \leftrightarrow 4$; $\{a, c\} \leftrightarrow 5$; $\{b, c\} \leftrightarrow 6$; $\{a, b, c\} \leftrightarrow 7$. Формула для принадлежности элемента y множеству A будет иметь вид:

$$P(y, z)=y^a z^1 \vee y^b z^2 \vee y^c z^3 \vee (y^a \vee y^b)z^4 \vee$$
$$(y^a \vee y^c)z^5 \vee (y^b \vee y^c)z^6) \vee (y^a \vee y^b \vee y^c)z^7.$$

Теорема (о мощности всех подмножеств множества). Для любого предиката принадлежности P на A×B

$$|B|=2^{|A|}.$$

Символом $|A|$ обозначена мощность множества A. Если в множестве A имеется к элементов, то в множестве B их будет 2^k. Таким образом, принадлежность можно определить не на любом декартовом произведении множеств B.

Теорема (об изоморфности предикатов принадлежности). Пусть P на A×B и P' на A'×B' предикаты принадлежности и $|A|=|A'|$. Тогда найдутся биекции $\varphi: A \to A'$ и $\psi: B \to B'$, такие что для всех $\forall x \in A$ и $\forall y \in B$

$$P(x, y)=P'(\varphi(x), \psi(y)).$$

Теорема означает, что при фиксированной мощности множества A все принадлежности на A×B при любых A и B будут в абстрактном смысле одинаковы, а множества A, A' и B, B' переходят друг в друга переименованием своих элементов. После такого переименования предикаты P и P' становятся одинаковыми.

Из этой теоремы непосредственно вытекает

Следствие. Любые два предиката принадлежности P на A×B и P' на A'×B' связаны зависимостью

$$P(x, y)=P(x, \psi(y)),$$

где $\psi: B \to B'$ – биекция.

То есть для каждого множества A существует, по существу, (то есть в абстрактном смысле) единственная принадлежность на A×B при любом B. Таким образом множество B выбирается, по существу, единственным образом по множеству A (с точностью до обозначений).

Теорема (об условии сильной изоморфности предикатов принадлежности). Для того чтобы любые предикаты принадлежности P на $A \times B$ и P' на $A' \times B'$ были сильно изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы $A \cap B=\varnothing$ и $A' \cap B'=\varnothing$.

Обычно множества и их элементы не отождествляются друг с другом, но такое отождествление логически возможно. Это было продемонстрировано на приведенном выше примере. Но можно потребовать, чтобы два мира – мир элементов и мир множеств не пересекались, тогда вступает в силу эта теорема. На практике математики часто так и делают. Важно заметить, что в частных случаях предикаты P и P' могут оказаться сильно изоморфными даже в том случае, если условие непересекаемости множеств не соблюдается (привести пример).

Сильная изоморфность предикатов P и P' означает, что существует биекция $\varphi: A \cup B \to A' \cup B'$, такая что для любых $x \in A$ и $y \in B$

$$P(x, y)=P'(\varphi(x), \varphi(y)).$$

Запишем для примера два сильно изоморфных друг другу предиката принадлежности. Чтобы в любом случае получилось, надо выбрать множества так, чтобы $A \cap B=\varnothing$ и $A' \cap B'=\varnothing$. В некоторых случаях предикаты P P' могутоказаться сильно изоморфными даже в том случае, если условие непересекаемости множеств не соблюдается (дать пример).

Теорема о равенстве элементов. Предикат $D_A(x_1, x_2)$ на $A \times A$, определяемый условием

$$\forall x_1, x_2 \in A(D_A(x_1,x_2)\sim$$
$$\sim \forall y \in B(P(x_1, y)\sim P(x_2, y))), \quad (3)$$

является предикатом равенства на A при любом выборе множеств A и B, связанных условием $|B|=2^{|A|}$, и произвольном выборе предиката принадлежности P.

Иными словами, общее решение логического уравнения (1) имеет вид:

$$D_A(x_1,x_2)=\exists a \in A(x_1^a x_2^a).$$

Как видим, решение не зависит от выбора предиката P и множества B. Условие (3) принимаем в качестве абстрактного определения понятия равенства элементов.

Теорема о равенстве множеств. Предикат $D_B(x_1, x_2)$ на $B \times B$, определяемый условием

$$\forall y_1, y_2 \in B(D_B(y_1, y_2)\sim$$
$$\forall x \in B(P(x, y_1)\sim P(x, y_2))), \quad (4)$$

является предикатом равенства на B при любом выборе множеств A и B, связанных условием $|B|=2^{|A|}$, и произвольном выборе предиката принадлежности P.

Иными словами, общее решение логического уравнения (3) имеет вид:

$$D_B(y_1, y_2)=\exists a \in B(y_1^a y_2^a).$$

Это равенство выражает совпадение лишь каких-то элементов, а не множеств, в отличие от определения (4), которое, действительно, определяет равенство множеств.

Как видим, решение не зависит от выбора предиката P и множества A. Условие (4) принимаем в качестве абстрактного определения понятия равенства множеств. Таким образом, мы формально абстрактно описали понятие равенства множеств, являющихся подмножествами произвольно взятого множества A. Это так называемый закон экстенсиональности, который обычно используется как определение равенства множеств. В содержательной трактовке он гласит: множества M_1 и M_2 совпадают в том и только том случае, если совпадают все их элементы.

2. Введение булевых операций

Вводим предикат $R(y_1, y_2, y_3)$ на B^3, называемый предикатом объединения, который содержательно понимаем как операцию объединения множеств:

$$R(y_1, y_2, y_3)=1 \Leftrightarrow y_1 \cup y_2=y_3.$$

Абстрактно определяем операцию объединения множеств условием:

$$\forall y_1, y_2, y_3 \in B(R(y_1, y_2, y_3)\sim$$
$$\sim \forall x \in A(P(x, y_1) \vee P(x, y_2)\sim P(x, y_3)). \quad (5)$$

Предикат P – это какая-нибудь принадлежность на $A \times B$, где A – некоторое множество, выбираемое произвольно.

Запишем в виде примера формулу предиката объединения с помощью абстрактного определения понятия объединения множеств.

Вводим предикат $S(y_1, y_2, y_3)$ на B^3, называемый предикатом пересечения, который содержательно понимаем как операцию пересечения множеств:

$$R(y_1, y_2, y_3)=1 \Leftrightarrow y_1 \cap y_2=y_3.$$

Абстрактно определяем операцию пересечения множеств условием:

$$\forall y_1, y_2, y_3 \in B(S(y_1, y_2, y_3)\sim$$
$$\sim \forall x \in A(P(x, y_1) \wedge P(x, y_2)\sim P(x, y_3)). \quad (6)$$

Запишем в виде примера формулу предиката пересечения с помощью абстрактного определения понятия пересечения множеств.

Вводим предикат $T(y_1, y_2)$ на B^2, называемый предикатом дополнения, который содержательно понимаем как операцию дополнения множеств:

$$R(y_1, y_2, y_3)=1 \Leftrightarrow \overline{y_1}=y_2.$$

Абстрактно определяем операцию дополнения множеств условием:

$$\forall y_1, y_2 \in B(T(y_1, y_2)\sim$$
$$\sim \forall x \in A(\overline{P(x, y_1)}\sim P(x, y_2)). \quad (7)$$

Теорема (о единственности предикатов объединения, пересечения и дополнения). Предикаты объединения, пересечения и дополнения множеств, определяемые условиями (3) – (4), не зависят от выбора множества A и принадлежности P, участвующих в их определении.

Теорема (о функциональности предикатов объединения, пересечения и дополнения множеств). Для любых y_1, y_2 существует единственный $y_3 \in B$, такой что $R(y_1, y_2, y_3)=1$. Для любых y_1, y_2 существует единственный $y_3 \in B$, такой что $S(y_1, y_2, y_3)=1$. Для любого y_1 существует единственный $y_2 \in B$, такой что $T(y_1, y_2)=1$.

Эта теорема доказывает, что объединение, пересечение и дополнение множеств – это операции, а не произвольные отображения.

Теорема (о свойствах операций объединения, пересечения и дополнения множеств). Операции $y_1 \cup y_2=y_3$, $y_1 \cap y_2=y_3$ и $\overline{y_1}=y_2$ подчиняются всем основным законам булевой алгебры.

Оказывается, что основные законы булевой алгебры однозначно (в абстрактном смысле) определяют операции объединения, пересечения и дополнения. В роли аксиом не обязательно брать все основные законы булевой алгебры. Достаточно взять следующие семь законов: идемпотентности, коммутативности, ассоциативности, дистрибутивности, свертывания и де Моргана – в дизъюнктивном варианте и закон двойного отрицания. Булевой алгеброй называется любое множество B, вместе с заданными на нем операциями объединения, пересечения и дополнения, которые удовлетворяют перечисленным выше аксиомам.

Теорема (об изоморфности булевых алгебр). Любые булевы алгебры **B** и **B'** на B и B' изоморфны в том и только том случае, если мощности множеств B и B' совпадают. Для любой булевой алгебры на B найдется такое множество A и показатель k (конечный или бесконечный), что

$$|B|=|A^k|.$$

Последняя теорема свидетельствует о том, что множество B, на котором заданы булевы операции, не может быть выбрано произвольно.

Выводы

Актуальность идентификации логических понятий на ее начальном этапе основывается на практической важности математической работы, для которой некоторые из логических понятий являются необходимым средством.

На последующих этапах актуальность разработок будет постоянно поддерживаться необходимостью более глубокого обоснования результатов идентификации. Уровень надежности последних будет становиться все более высоким по мере развития теории логических понятий, однако он никогда не сможет достичь абсолютной достоверности. Можно ли на этом пути, дойти до любого конкретного логического понятия, или же некоторые из них окажутся недоступными и поэтому ни на каком этапе не смогут быть идентифицированы? Ответа на этот важный вопрос мы пока не знаем.

Список литературы

1. Баталин А.В. О системном анализе информационных процессов / А.В. Баталин, А.Д. Тевяшев, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко // Радиоэлектроника и информатика, 1998. – Вып. 3. – С. 23-31.

2. Бурбаки Н. Теория множеств / Н. Бурбаки. – М.: Мир, 1965. – 449 с.

Поступила в редколлегию 18.06.2013

Рецензент: д-р техн. наук, проф. С.Ю. Шабанов-Кушнаренко, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

ПРО ЛОГІЧНУ ІДЕНТИФІКАЦІЮ ПОЧАТКОВИХ МАТЕМАТИЧНИХ ПОНЯТЬ

В.А. Лещінський

Виконано формальний опис логічних понять на мові алгебри підстановчих операцій. Знання про логічні засоби, яке досягається за допомогою ідентифікації логічних понять, збільшує надійність цих засобів. Актуальність ідентифікації логічних понять визначається практичною важливістю формальних моделей цих понять для теорії інтелекту.

***Ключові слова:** теорія інтелекту, алгебра скінченних предикатів і предикатних операцій.*

ABOUT THE ALGEBRA-LOGIC CONCEPTS DESCRIPTION TASK

V.A. Leschynskiy

The formal specification of logical concepts on substitutional operations algebra language is executed. Knowledge about logical facilities, that is arrived at by means of logical concepts identification, increases reliability of these facilities. Actuality of logical concepts identification is determined by practical importance of formal models of these concepts for the theory of intellect.

***Keywords:** theory of intelligence, algebras of finite predicates and predicate operations.*