

УДК 621.38

С.В. Хуторненко¹, В.М. Савченко²

¹Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків

²Українська інженерно-педагогічна академія, Харків

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ КОЛИВАНЬ КВАРЦОВОГО П'ЄЗОЕЛЕМЕНТА З МІЖЕЛЕКТРОДНИМ ЗАЗОРОМ І ОДНОБІЧНИМ МАСОНАВАНТАЖЕННЯМ

Отримано математичну модель товщино-зсувних коливань кварцових п'єзоелементів з однобічним масонавантаженням, що враховує наявність зазору між одним з електродів і поверхнею кристалічного елемента. На основі рішення диференціальних рівнянь коливань п'єзоелемента в частинних похідних уздовж товщини пластини отримані рішення для хвильового числа у виді трансцендентного рівняння і його рішення. Отримано наближені вираження для провідності, частоти і форми коливань кварцового п'єзоелемента.

п'єзоелемент, масонавантаження, товщинно-зсувні коливання

Вступ

Постановка проблеми. П'єзоелементи (ПЕ) широко застосовують для стабілізації коливань телекомунікаційних, навігаційних пристроїв та систем, а також в якості чутливого елемента прецизійних датчиків тиску. Подальше вдосконалення їх потребує врахування більш „тонких” ефектів роботи таких пристроїв. При побудові вимірювальних комплексів широке застосування знаходять п'єзорезонансні датчики з перемінним зазором між одним з електродом і кристалічним елементом (КЕ), у яких одна поверхня КЕ вільна, а на другий знаходиться електрод, що створює масонавантаження. У таких п'єзоелементах (ПЕ) виникають додаткові ефекти, обумовлені наявністю нерівномірного по поверхнях КЕ масонавантаження і міжелектродного зазору, що істотно впливають на частоту і форму коливань ПЕ, що в існуючих математичних моделях або не враховуються, або враховуються частково, що обмежує точність математичного моделювання.

Аналіз публікацій. Основні методи одержання математичних моделей коливань ПЕ були розроблені R. D. Mindlin [1] і H. F. Tiersten [2] і в даний час найбільше поширення мають два основних аналітичних підходи до моделювання коливань ПЕ.

1. Точне тривимірне рішення рівнянь коливань з наступним зменшенням розмірності координат частинних похідних по просторовому напрямку до однієї, що еквівалентно нескінченній пластині КЕ. Перевагою моделі є можливість аналітичного частотного рішення для ряду окремих випадків, на основі якого можна просто визначити коефіцієнти впливу на ПЕ технологічних і зовнішніх факторів;

2. Заміна тривимірного точного рішення моделлю двовимірних стоячих хвиль. При цьому рішення істотно ускладнюється і справедливо лише в обмеженій області, але з'являється можливість урахування зміни властивостей резонатора в площині

КЕ. Модифікацією другого підходу є зниження розмірності моделі [3] і повернення до випадку нескінченної пластини ПЕ.

У [3 – 4] на основі моделі двовимірних стоячих хвиль отримані рівняння для аналізу впливу різних механічних впливів на зсувні по товщині (TS), вигину (F) і зсувні по грані (FS) коливання ПЕ АТ – зрізу кварцу з двома ідентичними електродами.

У [5] на основі тривимірної моделі запропонована модель коливань нескінченного ПЕ (враховуються коливання тільки в напрямку товщини КЕ), що враховує одночасний вплив як масонавантаження (у тому числі великого, $R > 0,1$), так і міжелектродного зазору.

У [6] проведений аналіз впливу масонавантаження (електродів) на частоту коливань високочастотного п'єзоелемента. Отримано одномірну математичну модель товщинно – зсувних коливань кварцового високочастотного п'єзоелемента, а також коригувальні коефіцієнти для двовимірних моделей.

Авторами в [7] запропонована одномірна модель коливань ПЕ з несиметричним масонавантаженням для приватного випадку $R_1 = 0, R_2 \neq 0$ і методом чисельного математичного моделювання проведений аналіз впливу несиметричного масонавантаження на частоту і форму коливання ПЕ з міжелектродним зазором. Показано якісну зміну форми механічних коливань.

Аналіз режимів роботи ПЕ з міжелектродним зазором і існуючими математичними моделями проведений авторами показує, що недоліком відомих моделей є відсутність урахування одночасного впливу несиметричного (або однобічного) масонавантаження і величини зазору між електродом і КЕ, що у випадку високочастотних ПЕ приводить до значних погрешностей [6, 7]. Для підвищення точності моделювання необхідно вводити в розгляд комплексний вплив додаткових конструктивно-техноло-

гічних факторів, таких як несиметричне масонавантаження і міжелектродний зазор.

Метою статті є розробка уточненої математичної моделі коливань кварцового ПЕ для випадку однобічного масонавантаження ($R_1 = 0, R_2 \neq 0$), з урахуванням величини міжелектродного зазору.

Математична модель коливань

Розглянемо випадок “великого” зазору між одним з електродів і поверхнею кристалічного елемента. Такий режим роботи є основним для датчиків на основі ПЕ з міжелектродним зазором (рис. 1).

З урахуванням [2, 6, 7] розроблено математичну модель ПЕ з міжелектродним зазором і однобічним масонавантаженням.

Колівання ПЕ в загальному випадку описується системою рівнянь [2]:

$$\begin{cases} c_{ijkl}u_{k,ij} + e_{kij}\varphi_{,ki} = \rho \cdot \ddot{u}_j \\ e_{kij}u_{i,ik} - \varepsilon_{ij}\varphi_{,ij} = 0 \end{cases}, \quad (1)$$

де c_{ijkl} – компоненти тензора твердості, e_{kij} – п'єзоелектричні коефіцієнти; ε_{ij} – діелектричні коефіцієнти; $u_{k,ij}$ – механічний зсув; $\varphi_{,ki}$ – електричний потенціал; ρ – щільність матеріалу КЕ, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \ddot{u}$ і

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_i \partial x_j} = u_{k,ij}.$$

У (1) використовується підсумовування компонентів тензорів за правилом Ейнштейна.

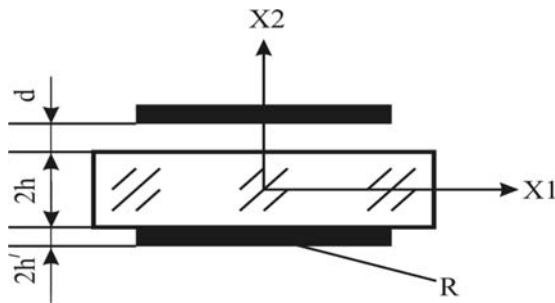


Рис. 1. ПЕ з зазором між КЕ й електродом

Нехай механічний зсув u і електричний потенціал φ змінюються

$$\begin{aligned} u_1(x_2, t) &= u_1(x_2) \cos \omega t, \\ \varphi(x_2, t) &= \varphi(x_2) \cos \omega t. \end{aligned} \quad (2)$$

де x_2 – напрямок розповсюдження товщинно – зсувних хвиль.

Тоді (1) перетвориться до виду:

$$\begin{cases} c_{66}u_{1,22} + e_{26}\varphi_{,22} = \rho \cdot \ddot{u}_1; \\ e_{26}u_{1,22} - \varepsilon_{22}\varphi_{,22} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Тут і далі будемо застосовувати скорочені позначення для тензорних величин.

Виразимо з другого рівняння (2) електричний потенціал

$$\varphi = \iint_{x_2} \frac{e_{26}}{\varepsilon_{22}} u_{1,22} = \frac{e_{26}}{\varepsilon_{22}} u_1 + L_1 x_2 + L_2,$$

де L_1, L_2 – постійні інтегрування.

проінтегруємо його двічі по x_2 і підставимо в перше рівняння системи (3)

$$\begin{cases} \bar{c}_{66}u_{1,22} + \rho\omega^2 u_1 = 0, \\ \varphi = \frac{e_{26}}{\varepsilon_{22}} u_1 + L_1 x_2 + L_2 \end{cases}, \quad (4)$$

де $\bar{c}_{66} = c_{66} + \frac{e_{26}^2}{\varepsilon_{22}}$ – модифікований коефіцієнт жорсткості;

Рішення будемо шукати у вигляді

$$u_1 = A \sin \eta x_2 + B \cos \eta x_2. \quad (5)$$

Підставимо (5) у перше рівняння із системи (4), тоді власна частота коливань ПЕ

$$\omega^2 = \eta^2 \frac{\bar{c}_{66}}{\rho}. \quad (6)$$

З урахуванням зазору d_1 граничні умови:

$$\begin{aligned} T_{21} = c_{66}u_{1,2} + e_{26}\varphi_{,2} &= 0; \\ D_2 = e_{26}u_{1,2} + \varepsilon_{22}\varphi_{,2} &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

де D_2 – електричний зсув; T_{21} – компонент тензора механічних напруг.

Замінивши в (7) незалежну перемінну φ зсувом D_2 , після підстановки масонавантаження R і з урахуванням (5) механічні граничні умови будуть:

$$T_{21} = \bar{c}_{66}\eta(A \cos \eta x_2 - B \sin \eta x_2) - \frac{e_{26}}{\varepsilon_{22}} D_2 = 0, \quad \text{при } x_2 = +h, \quad (8, a)$$

$$\begin{aligned} T_{21} = c_{66}(\eta A \cos \eta x_2 - \eta B \sin \eta x_2) - \frac{e_{26}}{\varepsilon_{22}} D_2 = \\ = -R\eta^2 \bar{c}_{66}(A \sin \eta x_2 - B \cos \eta x_2), \quad \text{при } x_2 = -h, \end{aligned} \quad (8, б)$$

Перейдемо до механічних граничних умов (8). Після очевидних перетворень маємо систему:

$$\begin{cases} \eta A \bar{c}_{66} \cos \eta h - \eta B \bar{c}_{66} \sin \eta h = \frac{e_{26}}{\varepsilon_{22}} D_2, \\ A \bar{c}_{66} (\eta \cos \eta h - R\eta^2 h \sin \eta h) + \\ \bar{c}_{66} (\eta \sin \eta h + R\eta^2 h \cos \eta h) = \frac{e_{26}}{\varepsilon_{22}} D_2, \end{cases} \quad (9)$$

з якої визначимо коефіцієнти A і B :

$$A = \frac{e_{26} D_2}{\varepsilon_{22} \bar{c}_{66} \eta} \frac{2 \sin \eta h + \eta R h \cos \eta h}{\sin 2\eta h + R \eta h \cos 2\eta h}, \quad (10)$$

$$B = \frac{\epsilon_{26} D_2}{\epsilon_{22} \bar{c}_{66} \eta} \frac{R h \sin \eta h}{\sin 2\eta h + R \eta h \cos 2\eta h}, \quad (11)$$

Введемо в розгляд електричні граничні умови, з огляду на те, що електричний зсув $D_2 = \epsilon_0 E_0$:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 - E_0 d, \quad \text{при } x_2 = +h, \\ \varphi &= -\varphi_0, \quad \text{при } x_2 = -h, \end{aligned} \quad (12)$$

де ϵ_0 – абсолютна діелектрична проникність зазору; E_0 – напруженість електричного поля в зазорі;

Різниця потенціалів між електродами

$$U = E_0 d + \int_{-h}^{+h} E_2 dx_2 \quad (13)$$

і з урахуванням (12) рівняння (13) перетвориться до вигляду

$$\begin{aligned} U &= \frac{D_2}{\epsilon_0} d + \int_{-h}^{+h} [-\varphi_{,2}] dx_2 = \\ &= \frac{D_2}{\epsilon_0} d - \int_{-h}^{+h} \left[\frac{\epsilon_{26}}{\epsilon_{22}} u_{1,2} - \frac{D_2}{\epsilon_{22}} \right] dx_2. \end{aligned} \quad (14)$$

Після підстановки (5):

$$U = \frac{D_2}{\epsilon_{22}} h \left[d_0 - 2 \frac{A}{D_2 h} \epsilon_{26} \sin \eta h \right], \quad (15)$$

де $d_0 = 1 + \frac{\epsilon_{22} d}{2 \epsilon_0 h}$ – коефіцієнт зміни зазору; A – визначається з (10).

З (15) маємо вираз для повної провідності ПЕ

$$\begin{aligned} Y &= \frac{j \omega D_2 S_{el}}{U} = \frac{j \omega \epsilon_{22} S_{el}}{2h} \times \\ &\times \frac{1}{d_0 - \frac{k_{26}^2}{\eta h} \frac{(2 \sin \eta h + \eta R h \cos \eta h) \sin \eta h}{\eta h R \cos 2\eta h + \sin 2\eta h}}. \end{aligned} \quad (16)$$

Послідовний резонанс настає при $Y \rightarrow \infty$, таким чином, з (16) отримаємо трансцендентне рівняння для хвильового числа η

$$\eta h = \bar{k}_{26}^2 \frac{2 \sin^2 \eta h + 0,5 R \eta h \sin 2\eta h}{\sin 2\eta h + R \eta h \cos 2\eta h}, \quad (17)$$

де $\bar{k}_{26}^2 = \frac{k_{26}^2}{d_0}$ – модифікований коефіцієнт електро-механічного зв'язку.

Отримані вирази (17), (16), (5), (11), (15) складають математичну модель коливань ПЕ з міжелектродним зазором і однобічним масонавантаженням.

Рішення трансцендентного рівняння (17) отримуємо за методикою [7]. Після перетворень маємо вираз для хвильового числа (18), з якого – вираз для резонансної частоти TS-коливань ПЕ шляхом підстановки (6) у (18)

$$\eta h = \frac{n\pi}{2} \left[\frac{1 - \frac{R}{R(2 - \bar{k}_{26}^2) + 2}}{8\bar{k}_{26}^2} - \frac{1}{n^2 \pi^2 (R(2 - \bar{k}_{26}^2) + 2)} \right], \quad (18)$$

$$f_s = f_p \left[\frac{1 - \frac{R}{R(2 - \bar{k}_{26}^2) + 2}}{8\bar{k}_{26}^2} - \frac{1}{n^2 \pi^2 (R(2 - \bar{k}_{26}^2) + 2)} \right], \quad (19)$$

де $f_p = \frac{n\pi}{2(2h)} \sqrt{\frac{\bar{c}_{66}}{\rho}}$ – основна гармоніка товщинно-зсувних коливань

Висновки

У роботі запропоновано одномірну модель коливань ПЕ, у якій на відміну від відомих моделей враховується одночасний вплив однобічного масонавантаження і міжелектродного зазору на параметри коливань ПЕ.

Перспективами подальшого дослідження є уточнення параметрів еквівалентної електричної схеми ПЕ і розширення отриманої моделі на випадок двовимірних коливань.

Список літератури

1. R.D. Mindlin *Thickness-shear and flexural vibrations of crystal plates // J. Appl. Phys.*, 22(316). — 1951.
2. H.F. Tiersten *Linear piezoelectric plate vibrations*, New York: Plenum Press, 1969.
3. P.C. Y. Lee *Mechanical effects of electrodes on the vibrations of quartz crystal plates // IEEE Trans. UFFC*, vol.5(49), 2002. — P. 612-625.
4. P.C. Y. Lee *Effects of a liquid layer on thickness-shear vibrations of rectangular AT-cut quartz plates // IEEE Trans. UFFC*, vol.5(49), 2002. — P. 604-611.
5. Хуторненко С. В. Толщинно -сдвиговые колебания пьезорезонансных элементов датчиков технологических параметров // *Технология приборостроения*. — 1996. — № 1. — С. 24-27.
6. Wang J., Shen L. — *J. Exact thickness-shear resonance frequency of electroded piezoelectric crystal plates // J. Zhejiang Univ. SCI.*, 2005, 6A(9). — P. 980-985.
7. Хуторненко С. В., Савченко В. Н. Модель колебаний пьезоэлемента с односторонней массонагрузкой // *Радиоелектронні і комп'ютерні системи*. — 2005. — № 4 (12). — С. 112-115.

Надійшла до редколегії 11.04.2007

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.Д. Сахацький, Українська інженерно-педагогічна академія, Харків.