УДК 534.6

Д.Д. Новак, А.В. Коржик

Национальный технический университет Украины «КПИ», Киев

ОСОБЕННОСТИ ПОСТАНОВКИ СКВОЗНОЙ ЗАДАЧИ ИЗЛУЧЕНИЯ ЗВУКА В УСЛОВИЯХ МЕЛКОГО МОРЯ

Предложено использование базовых принципов задач сквозного типа при описании звукового поля в волноводе. В качестве оконечного устройства средства звукоподводной связи предлагается пьезокерамическая антенна цилиндрического или сферического типа. Для обеспечения возможности использования «сквозного подхода» и привлечения к решению краевых задач с граничными условиями смешанного типа - задачи Штурма-Луивилля показана последовательность выполнения преобразований уравнения Гельмгольца в среде линейных операторов при решении указанной краевой задачи, а также ортогональность используемых волновых функций. Результаты могут быть использованы в ситуации совместного использования декартовых и криволинейных координат.

Ключевые слова: *звукоподводная связь, мелкое море, акустический волновод, цилиндрическая оболочка.*

Введение

На сегодняшний день в волновой акустике свободной среды широкое развитие получили задачи сквозного типа из области стационарной гидроэлектроупругости. Такой “сквозной подход” предполагает совместное использование уравнений состояния для пьезокерамики, соотношений Коши для деформации и перемещений, упрощенных уравнений Максвелла и уравнений движения тонких оболочек [1]. Указанный подход представляется удачным при описании полей, формируемых электроакустическими (электроупругими) преобразователями канонических форм.

Таким образом, источник звука может быть представлен в виде пьезокерамической антенны цилиндрического или сферического типа, для которой ряд задач о приеме и излучении звука в свободном поле уже решены [2 – 5]. Также представляется целесообразным начать рассмотрение проблемы формирования поля в волноводном канале мелкого моря с возможности использования преобразователей цилиндрического типа. Определяющим здесь является использование свойств полноты и ортогональности функций, используемых при решении сквозной задачи применительно к особенностям волновода. Известно [6], что основополагающим при решении подобных краевых задач является метод Штурма-Луивилля.

Поэтому, целью предлагаемой работы является определение возможности решения сквозной задачи излучения звука в мелком море источником электроупругой природы путем оценки свойств полноты и ортогональности используемых функций.

Основные соотношения

Покажем, что собственные функции любой задачи Штурма-Луивилля являются ортонормированными функциями, т.е. удовлетворяют условию:

$$\int_0^h u_m(z)u_n(z)dz = \delta_{mn}; \quad m, n \in N. \tag{1}$$

Следует подчеркнуть, что в (1) m и n принимают значения $1, 2, 3, \ldots$ В выражении (1) δ_{mn} – символ Кронекера:

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1, m = n, \\ 0, m \neq n. \end{cases} \tag{2}$$

Докажем уравнение (1). Собственные функции $u_m(z), u_n(z)$ удовлетворяют уравнениям

$$Lu_n(z) = \lambda_n u_n, \quad Lu_m(z) = \lambda_m u_m, \tag{3}$$

где в общем случае оператор L определяется соотношением:

$$L = \Delta + k^2(z) = \frac{d^2}{dz^2} + k^2(z).$$

Умножим первое уравнение (3) на u_m, второе на u_n и затем вычтем из первого уравнения второе и получим выражение:

$$u_m Lu_n - u_n Lu_m = u_n u_m(\lambda_n - \lambda_m). \tag{4}$$

Рассмотрим левую часть выражения (4):

$$u_m Lu_n - u_n Lu_m = u_m\left[\frac{d^2}{dz^2} + k^2(z)\right]u_n - \\ -u_n\left[\frac{d^2}{dz^2} + k^2(z)\right]u_m = u_m\frac{d^2u_n}{dz^2} - u_n\frac{d^2u_m}{dz^2}. \tag{5}$$

Заметим, что

$$u_m\frac{d^2u_n}{dz^2} - u_n\frac{d^2u_m}{dz^2} = \frac{d}{dz}\left(u_m\frac{du_n}{dz}\right) - \\ -\frac{d}{dz}\left(u_n\frac{du_m}{dz}\right) = \frac{d}{dz}\left(u_m\frac{du_n}{dz} - u_n\frac{du_m}{dz}\right). \tag{6}$$

Подставляя (6) в (5), находим

$$u_m Lu_n - u_n Lu_m = \frac{d}{dz}\left(u_m\frac{du_n}{dz} - u_n\frac{du_m}{dz}\right). \tag{7}$$

Теперь из соотношений (7) и (4) следует, что

$$u_n u_m(\lambda_n - \lambda_m) = \frac{d}{dz}\left(u_m \frac{du_n}{dz} - u_n \frac{du_m}{dz}\right),$$

или, интегрируя обе стороны по z в пределах $0...h$:

$$(\lambda_т - \lambda_т)\int_0^h u_m(z)u_n(z)dz = u_m \frac{du_n}{dz} - u_n \frac{du_m}{dz}\Bigg|_0^h. \quad (8)$$

Определим правую часть (8) для различных однородных граничных условий.

Для акустически мягких границ волновода

$$u_m(0) = u_m(h) = 0, \quad u_n(0) = u_n(h) = 0$$

и правая часть (8) равна нулю.

Для акустически жестких границ волновода

$$u_m'(0) = u_m'(h) = 0, \quad u_n'(0) = u_n'(h) = 0,$$

правая часть (8) равна нулю, также как и при одной жесткой и одной мягкой границах. Можно показать, что правая часть (8) равна нулю и при смешанных однородных граничных условиях

$$\begin{aligned} &\alpha_0 u_n(0) + u_n'(0) = 0, \quad \alpha_0 u_m(0) + u_m'(0) = 0, \\ &\alpha_0 u_n(h) + u_n'(h) = 0, \quad \alpha_0 u_m(h) + u_m'(h) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Таким образом, при любых однородных граничных условиях первого, второго или третьего типов (задачи Дирихле, Неймана и смешанные задачи)

$$(\lambda_n - \lambda_m)\int_0^h u_n(z)u_m(z)dz = 0. \quad (10)$$

Если $n = m$, то $\lambda_n = \lambda_m$, и условие (10) выполняется; при этом

$$\int_0^h u_m^2(z)dz \neq 0.$$

Если $n \neq m$, то $\lambda_n \neq \lambda_m$, и из (10) следует

$$\int_0^h u_m(z)u_n(z)dz = 0, \quad n \neq m; n, m \in N,$$

т.е. собственные функции ортогональны на интервале $[0, h]$.

Выбирая постоянную, входящую в $u_m(z)$ так, чтобы

$$\int_0^h u_m^2(z)dz = 1,$$

получаем условие ортонормированности собственных функций (1), что и требовалось доказать.

Собственные функции $u_m(z)$ задачи Штурма-Луивилля должны образовывать не только ортонормированную систему функций, но и полную систему. Эти свойства сохраняются и при $k = k(z)$, т.е. для случая, когда свойства среды зависят от z, а также для комплексной функции $k(z)$, т.е. при наличии потерь в среде [6].

При рассмотрении плоскопараллельной задачи распространения гармонических колебаний в волноводе с одной жесткой $(z = 0)$ и одной мягкой $(z = h)$ границей, может быть использована как прямоугольная, так и цилиндрическая системы координат [7, 8]. При этом для прямоугольной системы координат в соответствии с [2], граничные условия могут быть представлены в виде:

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=0} = 0 \quad (11)$$

для жесткой границы и

$$\varphi|_{z=h} = 0 \quad (12)$$

для мягкой границы.

Как известно (например, [2]), в прямоугольной системе координат общее решение уравнения Гельмгольца, удовлетворяющее граничным условиям (11) и (12), может быть представлено в виде:

$$\begin{aligned} \Phi(x,z,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(x,z,t) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos\left(z\frac{\pi(1+2n)}{2h}\right) \cdot e^{j(\omega t - k_n x)}, \end{aligned} \quad (13)$$

где B_n – неизвестный коэффициент, определяемый источником, и т.н. [6] коэффициентом возбуждения. Волновые числа для $n-й$ нормальной волны согласно (13) равны

$$k_n = k\sqrt{1 - \left[\frac{\pi(1+2n)}{2hk}\right]^2} \quad (14)$$

или

$$k_n = k\sqrt{1 - \frac{\omega_{n\,кр}^2}{\omega^2}}, \quad (14`)$$

где

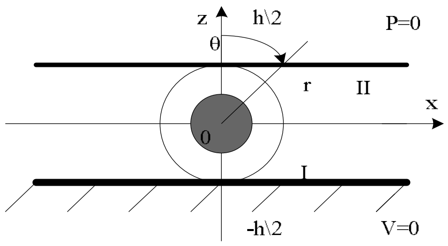
$$\omega_{n\,кр} = \frac{1+2n}{2}\frac{\pi c}{h}, \; n = 0,1,.. \quad (15)$$

является критической для данного волновода частотой.

Учитывая то, что источник выбран как цилиндр, предлагается распространить условие ортогональности на систему цилиндрических функций. Предлагается заменить результаты решения задачи Штурма-Луивилля для конкретизации ситуации возбуждения среды цилиндрическими или сферическими волновыми источниками. Заметим, что традиционно коэффициенты возбуждения определялись для источников с распределением колебательной скорости $v(z)$ в виде $v(z) = \cos(z)$, $v(z) = Const$, $v(z) = \sin(z)$, $v(z) = \delta(z)$, поэтому, для примера, остановимся на цилиндрических волновых функциях.

Пусть некоторая цилиндрическая функция $Z_n(z)$ с аргументом $z = kr$ – есть решение уравнения

$$r^2 \frac{d^2}{dr^2} Z_n(kr) + r\frac{d}{dr} Z_n(kr) + (k^2 r^2 - n^2) Z_n(kr) = 0. \quad (16)$$



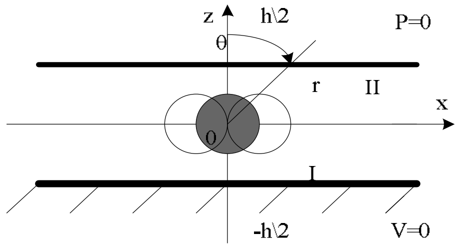


Рис. 1. Пример распределения колебательной скорости $v(z)$ в виде $v(z) = \text{const}$ и $v(z) = \sin(z)$

Перепишем это уравнение в самосопряженном виде для $k = k_1$ и $k = k_2$:

$$\frac{d}{dr}\left[r\frac{d}{dr}Z_n(k_1 r)\right] + \left(k_1^2 r^2 - \frac{n^2}{r}\right)Z_n(k_1 r) = 0,$$

$$\frac{d}{dr}\left[r\frac{d}{dr}Z_n(k_2 r)\right] + \left(k_2^2 r^2 - \frac{n^2}{r}\right)Z_n(k_2 r) = 0.$$

Умножив полученные уравнения, первое на $Z_n(k_2 r)$, второе на $Z_n(k_2 r)$ и, определяя их разность, полученное уравнение можно привести к виду

$$\left(k_2^2 - k_1^2\right) r Z_n(k_1 r) Z_n(k_2 r) = \frac{d}{dr}\cdot$$
$$\cdot\left\{r\left[Z_n(k_2 r)\frac{d}{dr}Z_n(k_1 r) - Z_n(k_1 r)\frac{d}{dr}Z_n(k_2 r)\right]\right\}$$

и выполнить интегрирование по r в интервале $(0,l)$. В результате приходим к интегральному соотношению

$$\left(k_2^2 - k_1^2\right)\int_0^l r Z_n(k_1 r) Z_n(k_2 r) =$$
$$= l\left[k_1 Z_n(k_2 r) Z_n(k_1 r) - k_2 Z_n(k_1 r) Z_n(k_2 r)\right].$$

Т.к. функции Бесселя первого рода имеют бесконечное число вещественных корней в интервале $x > 0$, предположим, что $Z_n(k_1 r) = 0$ и $Z_n(k_2 r) = 0$. Тогда правая часть уравнения обращается в нуль. Если при этом $k_1^2 \neq k_2^2$, что для некратных корней означает $i \neq j$, получаем интегральное соотношение

$$\int_0^l r dr Z_n\left(\frac{\mu_i^{(n)}}{l}\right) Z_n\left(\frac{\mu_j^{(n)}}{l}\right) = 0, \qquad (17)$$

которое означает, что функции Бесселя одного и того же индекса ортогональны на интервале $(0,l)$ [9].

Приведенные соотношения могут быть также записаны в виде:

$$\int_0^l J_m(kr) J_n(kr) dr = \delta_{mn},$$

$$\int_0^l N_m(kr) N_n(kr) dr = \delta_{mn},$$

$$\int_0^l H_m^{(1)}(kr) H_n^{(1)}(kr) dr = \delta_{mn},$$

$$\int_0^l H_m^{(2)}(kr) H_n^{(2)}(kr) dr = \delta_{mn},$$

где $J_n(kr)$ – функция Бесселя, $N_m(kr)$ – функция Неймана, $H_m^{(1)}(kr), H_n^{(2)}(kr)$ – функция Ханкеля первого и второго рода соответственно.

Естественно было бы предположить, что излученная волна в зоне Френеля источника является криволинейной по фронту. Далее, вследствие увеличения радиуса криволинейный фронт трансформируется в плоский. Таким образом, при описании поля волновода возникает необходимость описать изменение формы волнового фронта от цилиндрической (сферической – если источник сферический) – к плоской. Для этого следует учесть разбиение рабочего пространства на ближнюю и дальнюю зоны:

$$\begin{aligned} &1)\ \frac{h}{2} > r_д = \frac{2d_{сф}^2}{\lambda}; \\ &2)\ \frac{h}{2} < r_д = \frac{2d_{сф}^2}{\lambda}. \end{aligned} \qquad (18)$$

В каждой зоне (18) давление p_i и колебательная скорость v должны удовлетворять уравнению Гельмгольца:

$$\begin{aligned} &\Delta\Phi_{(x,z)}^{II} + k_n^2 \Phi_{(x,z)}^{II} = 0; \\ &\Delta\Phi_{(r,\vartheta)}^{I} + k_n^2 \Phi_{(r,\vartheta)}^{I} = 0, \end{aligned} \qquad (19)$$

где k_n – волновое число для ограниченного пространства.

Также следует учитывать то, что модовый состав поля в волноводе обусловлен не только совокупностью собственных форм колебаний преобразователя-излучателя, но также и модовым составом поля отраженных волн (рис. 2):

$$p_\Sigma^И = (p^{0I} + p_S^I) + (p^0 + p_S^{II}).$$

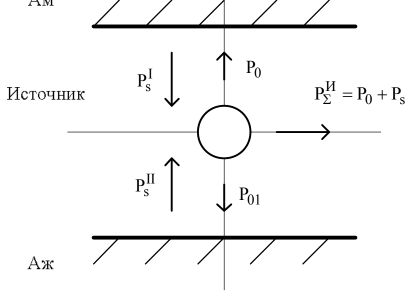


Рис. 2. Формирование поля вблизи источника

Полезными представляются также ситуации смещения источника – либо к поверхности моря, либо ко дну (рис. 3).

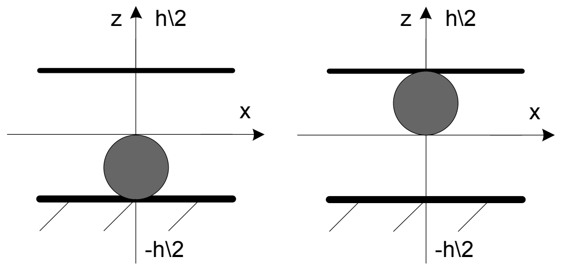


Рис. 3. Пример расположения источника звука в волноводе

Выводы

В результате, приведенные соотношения показывают возможность применения идеологии "сквозных задач" к вопросам формирования многомодовой колебательной системой акустического поля в мелком море, которое представлено волноводом с комбинированными границами. При этом:

– показана возможность использования «сквозного подхода» для решения задачи формирования поля в ближнем поле волноводного канала мелкого моря;

– приведен порядок решения задачи Штурма-Луивилля при решении задач сквозного типа для мелкого моря в части перехода от определения коэффициентов возбуждения к реальным распределениям давлений и колебательных скоростей для каждой из формируемых источником модовых составляющих;

– оговорен возможный выбор преобразующих устройств с определенными геометрическими и физическими свойствами.

Список литературы

1. Гринченко В.Т. Электроупругость / В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, Н.А. Шульга. – К. : Наук. думка, 1989. – 280 с. : ил. - ISBN 5-12-000378-8.

2. Гринченко В.Т. Основи акустики / В.Т. Грінченко, І.В. Вовк, В.Т. Маципура; НАН України. – К. : Наук. думка, 2007. – 639 с.

3. Коржик О.В. Метод «сквозной» задачи и его приложение к определению напряжения на выходе антенной решетки при наклонном падении плоской звуковой волны / О.В. Коржик, О.Г. Лейко // Судостроит. промышленность. Акустика. – 1991. – №9. – С. 17-24.

4. Петрищев О.Н. Возбуждение системой объемных и поверхностных нагрузок продольных (осесимметричных) волн в изотропных цилиндрах / О.Н. Петрищев // Вестник Киевского политехн. ин-та. Электроакустика и звукотехника. – 1985. – Вып. 9. – С. 15-19.

5. Савин В.Г. Уравнения колебаний пьезокерамических сферических и цилиндрических оболочек / В.Г. Савин, И.О. Моргун // Інф.сист., мех. та кер. – 2010. – №5. – С. 85-97.

6. Карновский М.И. Модельное представление шумового поля в клине / М.И. Карновский //Акустический журнал. – 1978. – Т.VI, №24. – С. 867-872.

7. Гутин Л.Я. Избранные труды / Л.Я. Гутин. – Л.: Судостроение, 1977. – 597 с.

8. Сташкевич А.П. Акустика моря / А.П. Сташкевич. – Л.: Судостроение. 1966. – 353 с.

9. Смирнов В.И. Курс высшей математики [т.3, ч. 2]; 9-е изд. / В.И. Смирнов. – М.: Наука, 1974. – 672 с.

10. Гидроакустические преобразователи и антенны: [Учеб. для судостроит. техникумов] / Г.М. Свердлин, 1999, 2-е изд., перераб. и доп. – Л.: Судостроение, 1999.

11. Katsnelson B.G. Shallow water acoustics / B.G. Katsnelson, V.G. Petnikov // Springer/Praxis, Chichester, UK. – 2002. – 267 p.

12. Temporal sound field fluctuations in the presence of internal solitary waves in shallow water / B.G. Katsnelson, V. Grigorev, M. Badiey, J.F. Lynch // J. Acoust. Soc. Am. – 2009. – V. 126, №.1. – EL41-EL47.

13. Passive Time Reversal Acoustic Communications Through Shallow-Water Internal Waves / A. Song, M. Badiey, A. Newhall, J. Lynch, H. DeFerrari, B. Katsnelson // IEEE Journal of Ocean Eng. – 2010. – V. 35, №4. – P. 756-765.

Поступила в редколлегию 15.07.2013

Рецензент: д-р техн. наук, проф. А.Г. Лейко, Государственное предприятие "Киевский научно-исследовательский институт гидроприборов", Киев.

ОСОБЛИВОСТІ ПОСТАНОВКИ НАСКРІЗНОЇ ЗАДАЧІ ВИПРОМІНЕННЯ ЗВУКУ В УМОВАХ МІЛКОГО МОРЯ

Д.Д. Новак, О.В. Коржик

Запропоноване використання базових принципів задач наскрізного типу при описі звукового поля в хвилеводі. В якості кінцевого пристрою засобів звукопідводного зв`язку пропонується п`єзокерамічна антена циліндричного або сферичного типу. Для забезпечення можливості використання «наскрізного підходу» та залучення до розв`язання краєвих задач з граничними умовами змішаного типу – задачі Штурма-Луївіля, показана послідовність виконання перетворень рівняння в середовищі лінійних операторів при розв`язанні зазначеної краєвої задачі, а також ортогональність хвилевих функцій, що використовується. Результати можуть бути використані в ситуації спільного використання декартових та криволінійних координат.

Ключові слова: *звукопідводний зв`язок, мілке море, акустичних хвилевід, циліндрична оболонка.*

THROUGH PROBLEM OF SOUND RADIATION IN A SHALLOW SEA FEATURES

D.D. Novak, O.V. Korzhyk

Use of the through problem principles of the description field type acoustic wave in an acoustic waveguide was suggested. As a terminal device for underwater sound communication system is proposed a piezoceramic antenna of cylindrical or spherical type. To allow the use of "through problem" approach to the problems of this type, the study was conducted concerning the feasibility of using conventional approaches to solution of such eigenvalue problems with combined boundary conditions on the example of the Sturm-Liouville problem. The orthogonality of cylindrical functions has been proven and therefore the possibility of using " through problem" approach to solve the problems of sound field formation in shallow water wave channel.

Keywords: *underwater sound communication, shallow sea, acoustic waveguide, cylindrical shell.*