УДК 681.324 : 621.325

В.Е. Кузьменко, М.О. Можаєв

Національний технічний університет «ХПІ», Харків

ОЦІНКА ПАРАМЕТРІВ НЕГАУСОВИХ СТОХАСТИЧНИХ ПРОЦЕСІВ

Розглянуті результати аналізу негаусових стохастичних процесів. Вивчена проблема застосовності методу максимальної правдоподібності для випадкових процесів. Запропонований метод оцінки числових характеристик випадкової величини.

Ключові слова: *стохастичні процеси, максимальна правдоподібність, негаусовий розподіл, математичне сподівання, дисперсія.*

Вступ

Постановка задачі та аналіз літератури. Статистичний аналіз стохастичних процесів займає суттєве місце в теоретичних дослідженнях явищ, що мають різну фізичну природу (радіолокація, розсіяння радіохвиль на неоднорідностях, флуктуації параметрів сигналу, дослідження телекомунікаційного трафіка тощо).

Вирішенню завдання статистичного аналізу присвячена значна кількість робіт [1 – 5]. У них розглядаються алгоритми статистичного аналізу випадкових величин і пропонуються оптимальні алгоритми ухвалення рішень при заданих критеріях якості.

Одним з найбільш поширених у теперішній час критеріїв є критерій максимальної правдоподібності, згідно з яким при спостереженні вибірки приймається та з гіпотез, якій відповідає більше значення функції правдоподібності вибірки. Алгоритм, який ґрунтується на цьому критерії, одержав назву алгоритму максимальної правдоподібності, і у ряді випадків (наприклад, для гаусового розподілу стохастичної величини) достатньо повно збігається з оптимальним алгоритмом. Але останнім часом значний практичний інтерес здобули процеси, які не можна описувати як нормальні випадкові процеси, і для таких процесів, які підлягають негаусовим розподілам (наприклад, гіперболічний, ступеневий, Вейбулла та ін.) [6 – 8], застосовність алгоритму максимальної правдоподібності викликає сумніви. От чому аналіз негаусових розподілів випадкових величин і аналіз поведінки оцінки параметрів такого розподілу є **актуальним науковим завданням**.

Метою даної статті є аналіз застосовності методу максимальної правдоподібності та розробка методів оцінювання невідомих параметрів.

Результати теоретичних досліджень

Розглянемо ряд прикладів, до яких метод максимальної правдоподібності не придатний, і слід проводити оцінки невідомих параметрів іншими методами.

Уявимо, що проводиться прийом або подовжньої, або поперечної складової вектора поляризації електромагнітного поля $\vec{E}$. Припустимо, що можливо зміряти тільки подовжню компоненту даного вектора (рис. 1) E_t, яка може набувати значень від $E = \left|\vec{E}\right|$ до 0.

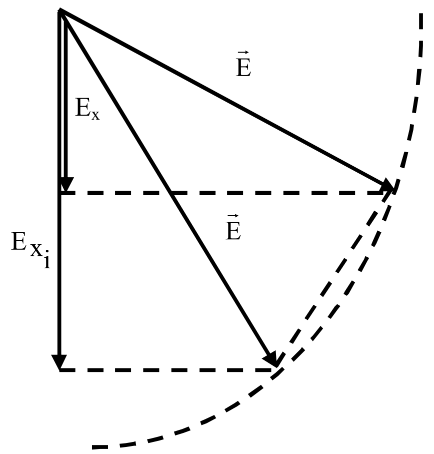

Рис. 1. Розклад вектора поляризації на подовжню компоненту електромагнітного поля

Як легко бачити з простих геометричних міркувань, щільність імовірності того, що в довільний момент часу значення подовжньої компоненти E_t дорівнює E_x, має вигляд:

$$p(E;E_x) = \begin{cases} \dfrac{1}{E} & \text{при} \quad 0 \le E_x \le E; \\ 0 & \text{при} \quad E_x > E. \end{cases} \qquad (1)$$

Припустимо, що ми вимірювали подовжню компоненту вектора електромагнітного поля N разів, тобто одержали такий набір вимірювань:

$$\widetilde{E}_x = E_{x_1}, E_{x_2}, \ldots, E_{x_N}.$$

Імовірність одержати набір $\widetilde{E}_x$ дорівнює:

$$p\left(E,\tilde{E}_x\right)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{E}\right)^N & \text{при } 0\le\tilde{E}_x\le E;\\ 0 & \text{при } \tilde{E}_x>E.\end{cases} \qquad (2)$$

Застосуємо для оцінки (2) принцип максимальної правдоподібності:

$$p\left(E';\tilde{E}_x\right)=\max \text{при} \quad E'=\overline{E}. \qquad (3)$$

Із співвідношення (3) випливає умова:

$$\overline{E}=E_{x_{\max}},$$

де $E_{x_{\max}}$ – найбільша з компонент величини $\tilde{E}_x$.

Насправді, із спаданням E' ймовірність $p\left(E';\tilde{E}_x\right)$ зростає доти, поки E' не стане меншим за яке-небудь зміряне значення E_{x_i}.

Очевидно, що оцінка (3) дає прийнятне значення $\overline{E}$, але в той же час цей результат є випадковим, оскільки даний розподіл істотно відрізняється від гаусового, і тому умову максимальної правдоподібності не можна строго обґрунтувати, як це зроблено в [1].

Крім того, значення величини E більше значення $E_{x_{\max}}$ через те, що ймовірність появи серед усіх можливих значень компонент вектора $E_{x_{\max}}$ компоненти, яка в точності дорівнює E, нульова.

Для отримання більш обґрунтованої оцінки величини E розглянемо ймовірність того, що всі N значень величини E_x лежать у заданому інтервалі

$$0\le E_{x_i}\le E_x<E \quad \text{при} \quad i=1,2,\ldots,N. \qquad (4)$$

Імовірність виконання нерівності (4) має вигляд:

$$p_N\left(E;E_x\right)=\left(\frac{E_x}{E}\right)^N.$$

Введемо дві величини $E_{x_1}(\varepsilon)$ і $E_{x_2}(\varepsilon)$ такі, що імовірність виконання кожної з умов

$$E_{x_{\max}}<E_{x_2}(\varepsilon)$$

та

$$E_{x_{\max}}>E_{x_1}(\varepsilon)$$

дорівнює $1-\varepsilon$.

Тоді маємо:

$$\left(\frac{E_{x_1}(\varepsilon)}{E}\right)^N=\varepsilon$$

та

$$\left(\frac{E_{x_2}(\varepsilon)}{E}\right)^N=1-\varepsilon,$$

звідки з урахуванням того, що $-\ln\varepsilon<<N$, можна одержати такі співвідношення:

$$E_{x_1}=E\varepsilon^{1/N}\sim E\left(1+\frac{\ln\varepsilon}{N}\right);$$

$$E_{x_2}=E(1-\varepsilon)^{1/N}\sim E\left(1-\frac{\varepsilon}{N}\right).$$

Тому можна стверджувати, що з великою імовірністю виконується нерівність:

$$E_{x_{\max}}(1-\varepsilon)^{-1/N}<E<E_{x_{\max}}\varepsilon^{-1/N},$$

якщо припустити, що

$$-\frac{\ln\varepsilon}{N}<<1.$$

Також можна скласти і таке співвідношення:

$$E_{x_{\max}}\left(1+\frac{\varepsilon}{N}\right)<E<E_{x_{\max}}\left(1-\frac{\ln\varepsilon}{N}\right). \qquad (5)$$

Одержана оцінка (5) при достатньо великих N виявляється дуже точною. Особливо цікаво те, що інтервал (5) спадає пропорційно, а не як $1/\sqrt{N}$, що характерне для розподілу Пуассона.

Знайдемо ще одну оцінку, використовуючи середнє значення $\overline{E}_x$ результатів вимірювань. Якщо визначити середнє значення як:

$$\overline{E}_x=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}E_{x_i}$$

і враховуючи незалежність всіх значень E_{x_i}, можна набути значення математичного сподівання і дисперсії величини $\overline{E}_x$:

$$M\left[\overline{E}_x\right]=\frac{1}{2}E,$$

$$D\left[\left(\overline{E}_x\right)\right]=\frac{E^2}{12N}.$$

Розподіл величини $\overline{E}_x$ (при не дуже малих N) схожий на гаусовий розподіл, і тому можна припустити:

$$\left|\overline{E}_x-\frac{E}{2}\right|<\frac{\alpha E}{\sqrt{12N}},$$

$$\text{їðè} \ \alpha=3 \quad \text{àáî} \ \alpha=4,$$

і тоді, цілком імовірно, можна одержати такі оцінки для величини E:

$$\frac{2\overline{E}_x}{1+\dfrac{\alpha}{\sqrt{3N}}}<E<\frac{2\overline{E}_x}{1-\dfrac{\alpha}{\sqrt{3N}}}. \qquad (6)$$

Межі помилки визначення модуля напруженості електричного поля, одержані в результаті оцінки N вимірювань його подовжньої складової, представлені на рис. 2, як функції від кількості вимірювань при фіксованому значенні $\varepsilon=3\cdot10^{-3}$.

Внутрішні криві графіка одержані на підставі співвідношення (5), а зовнішні –співвідношення (6). Відмітимо, що оцінка (5), що дає інтервал значень, який змінюється обернено пропорційно до кількості вимірювань N, не враховує помилку вимірювання величини E.

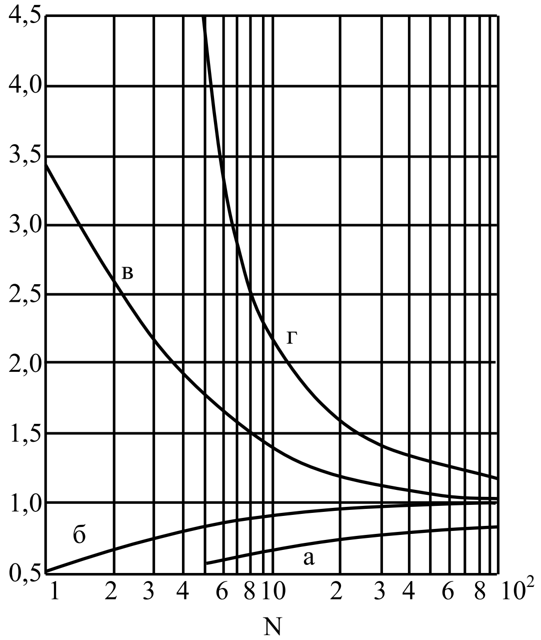

Рис. 2. Межі помилки визначення модуля напруженості електричного поля:
а, г – межі помилки при N~3·10 – $3·10^2$
б, в – межі помилки при N> $3·10^3$

Урахування такої помилки призводить до того, що для великих значень N інтервал значень визначається в основному стандартною помилкою вимірювання величини E і змінюється обернено пропорційно до квадратного кореня з кількості вимірювань.

Висновки

У результаті проведених досліджень установлено. що:

– для випадкової величини, функція розподілу яка описується показовою функцією, метод максимальної правдоподібності не може бути застосовний;

– запропонований спосіб визначення невідомих параметрів розподілу дозволив провести оцінки математичного сподівання та дисперсії стохастичної величини;

– у результаті аналізу наведеного розподілу встановлено, помилка вимірювання невідомої величини змінюється обернено пропорційно до квадратного кореня з кількості вимірювань, а не обернено пропорційно до кількості вимірювань, що характерне для нормального розподілу.

Список літератури

1. *Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Кн. 1. – М.:Сов. радио, 1974. – 552 с.*

2. *Директор С., Рорер Р. Введение в теорию систем. – М.: Мир, 1974. – 644 с.*

3. *Можаев А.А. Вопросы оптимальности временных шкал, использующихся для аппроксимации максимума очереди / А.А. Можаев, Г.А. Кучук, А.А. Коваленко // Системи обробки інформації Збірник наукових праць. – Харків: ХУ ПС. – 2009. – Вип.2(76). – С. 89 -92.*

4. *Пространственно-временная обработка сигналов малой длительности в акустооптических анализаторах спектра / А.И. Стрелков, В.И. Барсов, А.А. Можаев, А.П. Лытюга, В.В. Коротков // Модулювання та інформаційні технології. – К.: НАНУ, ІПМЕ, 2003. – Вип. 22. – С. 184-195.*

5. *Можаев А.А. Оценка достоверности определения параметров телекоммуникационнного трафика // Системи обробки інформації. – Х.: ХУ ПС. – 2006. – Вип. 9(58). – С. 59-61.*

6. *Можаев А.А.. Оценка параметров нелинейной динамической модели гетерогенной сети. /А.А. Можаев, С.М.Порошин, В.Е. Кузьменко, М.А.Можаев // Системи обробки інформації Збірник наукових праць.-Харків: ХУ ПС.-2011р.-Вип.5(95).- С.209 -21*

7. *Можаев А.А.. Исследования поведения фазовой траектории телекоммуникационного трафика гетерогенной сети передачи данных / А.А. Можаев, С.М. Порошин, В.Е. Кузьменко, М.А. Можаев, // Системи управління, навігації та зв'язку, Збірник наукових праць Київ 2011, випуск 2(18) С. 255-259.*

8. *Можаєв О.О Передача інформації у гетерогенних комп'ютерних мережах : монографія / О.О. Можаєв. – Харків : НТУ «ХПІ», 2012. – 220 с.*

Надійшла до редколегії 18.07.2013

Рецензент: д-р техн. наук, проф. О.О. Сєрков, Національний технічний університет «ХПІ», Харків.

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ НЕГАУССОВЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

В.Е. Кузьменко, М.А. Можаев

Рассмотрены результаты анализа негауссовых стохастических процессов. Изучена проблема применимости метода максимального правдоподобия для случайных процессов. Предложенный метод оценки числовых характеристик случайной величины.

***Ключевые слова**: стохастические процессы, максимальное правдоподобие, негауссовых распределение, математическое ожидание, дисперсия.*

ESTIMATE THE PARAMETERS OF NON-GAUSSIAN STOCHASTIC PROCESSES

V.E. Kuzmenko, M.A. Mozaev

The results of the analysis of non-Gaussian stochastic processes. Studied the problem of applied-ness of the method of maximum likelihood for random processes. The proposed method for estimating numerical characteristics of random variable.

***Keywords**: stochastic processes, maximum likelihood, non-Gaussian distribution, expectation, variance.*