

УДК 621.3.019.3

Д.И. Могилевич

Военный институт телекоммуникаций и информатизации НТУ Украины "КПИ", Киев

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МНОГОФАЗОВОЙ ОДНОКАНАЛЬНОЙ СЕТИ СВЯЗИ С РЕАЛЬНОЙ НАДЕЖНОСТЬЮ ОБОРУДОВАНИЯ

Предложена аналитическая модель на основе которой получены расчетные соотношения для количественной оценки показателей качества функционирования сети связи с учетом характеристик надежности оборудования.

Ключевые слова: надежность оборудования, аналитическая модель, телекоммуникационные сети.

Введение

Анализ публикаций отечественных и зарубежных специалистов в области надежности показал, что пренебрежение вопросами надежности телекоммуникационных сетей связи привело к отсутствию в настоящее время достаточно разработанных теоретических положений и методов, необходимых для научного обоснования решений, принимаемых при модернизации существующих и построении новых сетей и систем связи [1 – 8].

Целью данной статьи является разработка аналитической модели сети связи и получение на ее основе возможности количественной оценки вероятности своевременной доставки пакетов с учетом характеристик надежности оборудования.

Постановка задачи

Рассмотрим многофазовую одноканальную сеть связи, фрагмент которой представлен на рис. 1.

Пусть на вход этой сети поступает поток сообщений, который приближенно можно считать пуассоновским. В ряде работ показано, что в инженерных расчетах можно полагать, что входящий поток в каждую фазу является пуассоновским с параметром $\lambda_{\hat{a}i}$.

В каждой фазе осуществляется обслуживание сообщений (заявок, пакетов), причем время обслуживания $t_{\hat{a}i} = t_{\hat{a}}$ – случайная величина с произвольной функцией распределения (ФР)

$$V(t) = P\{t_{\hat{a}} < t\}.$$

Оборудование каждой фазы обладает ограниченной надежностью, поэтому в процессе обслужи-

вания заявок в i -й фазе ($i = \overline{1, n}$) возможно возникновение отказа с интенсивностью λ_i . Суммарная интенсивность отказов сети связи, состоящей из оборудования n фаз обслуживания, равна:

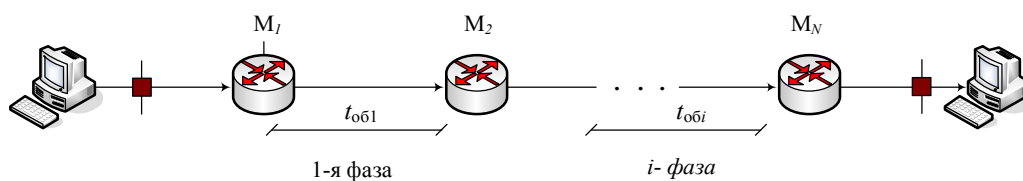
$$\lambda_{\hat{n}} = \sum_{i=1}^n \lambda_i. \quad (1)$$

При отказе оборудования i -й фазы обслуживания ($i = \overline{1, n}$) осуществляется восстановление работоспособности, причем время восстановления – случайная величина с произвольной ФР $F_{\hat{a}^3}(t) = P\{t_{\hat{a}^3} < t\}$ и конечным математическим ожиданием $\bar{t}_{\hat{a}^3}$. Поскольку оборудование всех фаз обслуживания разнотипное, то ФР времени восстановления сети $F_{\hat{a}n}(t)$ определяется с учетом вероятности возникновения отказа оборудования i -й фазы, т.е.:

$$F_{\hat{a}n}(t) = P\{t_{\hat{a}n} < t\} = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_{\hat{n}}} F_{\hat{a}^3}(t), \quad (2)$$

где $\lambda_{\hat{n}}$ – интенсивность отказов сети связи (выражение (1)); $t_{\hat{a}n}$ – время восстановления работоспособности сети связи.

На суммарное время передачи сообщения $t_{\Sigma \hat{a}}$ по многофазовой сети связи накладывается ограничение, определяющее допустимое время $t_{\hat{a}}$ запаздывания доставки данного сообщения абоненту. Величина этого ограничения характеризует используемый в сети временной резерв, расходуемый при обслуживании заявки в каждой фазе.



M – маршрутизатор,
 t_{obi} – время обслуживания в i -ой фазе

Рис. 1. Фрагмент многофазовой одноканальной сети связи

Для указанных выше исходных условий необходимо получить расчетные соотношения для вероятности своевременной доставки сообщения по рассматриваемой многофазовой сети связи.

Решение задачи

При решении задачи примем следующие ограничения и допущения:

будем считать, что время обслуживания заявки в каждой фазе распределено по экспоненциальному или по нормальному закону или по закону Эрланга k -го порядка;

случайная величина $t_{i\dot{a}}$ распределена по экспоненциальному закону с параметром λ_i , а время восстановления работоспособности сети связи $t_{\dot{a}\bar{n}}$ распределено по произвольному закону $F_{\dot{a}\bar{n}}(t)$ (выражение (2)) с конечным математическим ожиданием $\bar{t}_{\dot{a}\bar{n}}$;

используемый в сети связи резерв времени – детерминированная величина $t_{\dot{a}} = \text{const}$;

входящий поток заявок в каждую фазу является пуассоновским с параметром $\lambda_{\dot{a}\bar{o}}$;

отказы оборудования каждой фазы обслуживания – события независимые;

при отказе оборудования i -й фазы сеть прекращает функционировать до момента восстановления работоспособности;

отказы обнаруживаются в момент их возникновения (в сети предусмотрен идеальный (полный, непрерывный, безошибочный) контроль работоспособности);

сообщение, обслуживание которого прервано вследствие возникшего отказа, считается потерянным;

информация о законах распределения исходных случайных величин известна или задана.

Для своевременной доставки сообщения по данной сети связи требуется выполнение нескольких условий: необходимо, чтобы

1) поступившая заявка на обслуживание застала сеть связи в работоспособном состоянии;

2) во время передачи сообщения не возник отказ оборудования сети;

3) время передачи сообщения в сети связи не превысило допустимого значения t_d ;

4) заявка при поступлении в сеть связи не получила отказа в обслуживании ни в одной из фаз.

Поскольку указанные выше события являются независимыми, то вероятность своевременной доставки сообщения можно представить в виде произведений вероятностей этих событий, т.е.

$$P_{\dot{a}\bar{n}} = P_1 P_2 P_3 P_4, \quad (3)$$

где P_1 – вероятность застать оборудование сети в работоспособном состоянии в произвольный момент времени в установившемся режиме; $P_2 = P\{t_{i\dot{c}} > t_{\Sigma i \dot{a}}\}$ – вероятность того, что во время передачи сообщения в сети не возникнет отказ оборудования;

$P_3 = P\{t_{\Sigma i \dot{a}} \leq t_{\dot{a}}\}$ – вероятность того, что суммарное время доставки сообщения абоненту не превысит допустимого значения t_d ; P_4 – вероятность того, что при поступлении в сеть связи заявка не получит отказа в обслуживании ни в одной фазе.

Вероятность P_1 представляет собой стационарный коэффициент готовности сети связи $K_{\dot{a}}$, количественная оценка которого определяется по формуле:

$$K_{\dot{a}} = \bar{t}_{i\bar{n}} / (\bar{t}_{i\bar{n}} + \bar{t}_{\dot{a}\bar{n}}), \quad (4)$$

где $\bar{t}_{i\bar{n}}$ и $\bar{t}_{\dot{a}\bar{n}}$ – соответственно средняя наработка до отказа и среднее время восстановления оборудования сети связи, т.е.

$$\bar{t}_{i\bar{n}} = \frac{1}{\lambda_{i\bar{n}}} = 1 / \sum_{i=1}^n \lambda_i, \quad \bar{t}_{\dot{a}\bar{n}} = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_{i\bar{n}}} \bar{t}_{\dot{a}\bar{n}i}.$$

Для расчета вероятности $P_2 = P\{t_{i\bar{n}} > t_{\Sigma i \dot{a}}\}$ необходимо определить ФР суммарного времени обслуживания $t_{\Sigma i \dot{a}}$ (времени передачи сообщения абоненту). Это время определяется суммой n одинаково распределенных случайных величин $t_{i\dot{a}}$, характеризующих время обслуживания заявки в каждой фазе сети. Поэтому ФР случайной величины $t_{\Sigma i \dot{a}}$ представляет собой n -кратную свертку $B_n(t) = P\{t_{\Sigma i \dot{a}} < t\}$ функции распределения $B(t)$.

Функция распределения $B_n(t)$ при экспоненциальном распределении $B(t)$ имеет вид:

$$B_n(t) = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\mu_{i\dot{a}} t)^i}{i!} e^{-\mu_{i\dot{a}} t}, \quad (5)$$

при нормальном распределении $B(t)$ ($\bar{t}_{i\dot{a}} \geq 3\sigma_{i\dot{a}}$)

$$B_n(t) = 0,5 + \hat{O}\left(\frac{(t - n\bar{t}_{i\dot{a}})}{(\sigma_{i\dot{a}} \sqrt{n})}\right), \quad (6)$$

при распределении Эрланга k -го порядка с параметром $\mu_{i\dot{a}} = k/\bar{t}_{i\dot{a}}$

$$B_n(t) = 1 - \sum_{i=0}^{nk-1} \frac{(\mu_{i\dot{a}} t)^i}{i!} e^{-\mu_{i\dot{a}} t}, \quad (7)$$

где $\hat{O}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-u^2/2} du$ – табулированная функция Лапласа.

Запишем теперь формулу для вероятности P_2 :

$$P_2 = P\{t_{i\bar{n}} > t_{\Sigma i \dot{a}}\} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda_{i\bar{n}} t} dB_n(t). \quad (8)$$

Подставляя в формулу (8) выражения (5) – (7), получаем расчетные соотношения для вероятности P_2 при различных законах распределения $B(t)$:

при экспоненциальном распределении $B(t)$ с параметром $\mu_{i\dot{a}}$:

$$P_2 = P\{t_{i\bar{n}} > t_{\Sigma i \dot{a}}\} = \mu_{i\dot{a}}^n / (\mu_{i\dot{a}} + \lambda_{i\bar{n}})^n, \quad (9)$$

при нормальном распределении $B(t)$ с параметрами $t_{i\dot{a}}$ и $\sigma_{i\dot{a}}$ ($\bar{t}_{i\dot{a}} \geq 3\sigma_{i\dot{a}}$):

$$P_2 = P\{t_{i\dot{n}} > t_{\Sigma i\dot{a}}\} = e^{-\lambda_{i\dot{n}} n \bar{t}_{i\dot{a}} + 0,5 \lambda_{i\dot{n}}^2 n \sigma_{i\dot{a}}^2} \left[0,5 + \hat{O} \left(\frac{n \bar{t}_{i\dot{a}} - \lambda_{i\dot{n}} n \sigma_{i\dot{a}}^2}{\sigma_{i\dot{a}} \sqrt{n}} \right) \right]; \quad (10)$$

при распределении $B(t)$ по закону Эрланга с параметрами k и $\mu_{i\dot{a}} = k/\bar{t}_{i\dot{a}}$:

$$P_2 = P\{t_{i\dot{n}} > t_{\Sigma i\dot{a}}\} = \frac{\mu_{i\dot{a}}^{nk}}{(\mu_{i\dot{a}} + \lambda_{i\dot{n}})^{nk}}, \quad (11)$$

где $\hat{O}(x)$ – функция Лапласа.

Вероятность P_3 представляет собой вероятность того, что суммарное время доставки сообщения абоненту $t_{\Sigma i\dot{a}}$ не превысит допустимой величины $t_{\dot{a}}$, характеризующей используемый в сети связи резерв времени. Функция распределения этой случайной величины выражается формулами (5) – (7). Если подставить в эти формулы вместо t значение $t_{\dot{a}}$, то получим расчетные соотношения для вероятности $P_3 = P\{t_{\Sigma i\dot{a}} \leq t_{\dot{a}}\}$.

Вероятность P_4 есть вероятность того, что обслуживание заявки в каждой фазе сети завершится до поступления новой заявки, т.е. в каждой фазе должно выполняться условие: $t_{\dot{a}\dot{o}} > t_{i\dot{a}}$. Для принятых исходных данных можно записать формулу для вероятности выполнения этого условия в каждой фазе:

$$P\{t_{\dot{a}\dot{o}} > t_{i\dot{a}}\} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda_{\dot{a}\dot{o}} t} dB(t). \quad (12)$$

При экспоненциальном распределении $B(t)$ из формулы (12) получаем

$$P\{t_{\dot{a}\dot{o}} > t_{i\dot{a}}\} = \frac{\mu_{i\dot{a}}}{\mu_{i\dot{a}} + \lambda_{\dot{a}\dot{o}}}, \quad (13)$$

при нормальном распределении $B(x)$ с параметрами $\bar{t}_{i\dot{a}}$ и $\sigma_{i\dot{a}}$ ($\bar{t}_{i\dot{a}} \geq 3\sigma_{i\dot{a}}$)

$$P\{t_{\dot{a}\dot{o}} > t_{i\dot{a}}\} = e^{-\lambda_{\dot{a}\dot{o}} \bar{t}_{i\dot{a}} + 0,5 \lambda_{\dot{a}\dot{o}}^2 \sigma_{i\dot{a}}^2} \left[0,5 + \hat{O} \left(\frac{\bar{t}_{i\dot{a}} - \lambda_{\dot{a}\dot{o}} \sigma_{i\dot{a}}^2}{\sigma_{i\dot{a}}} \right) \right]; \quad (14)$$

при распределении $B(x)$ по закону Эрланга с параметрами k и $\mu_{i\dot{a}}$

$$P\{t_{\dot{a}\dot{o}} > t_{i\dot{a}}\} = \frac{\mu_{i\dot{a}}^k}{(\mu_{i\dot{a}} + \lambda_{\dot{a}\dot{o}})^k}, \quad (15)$$

где $\hat{O}(x)$ – функция Лапласа.

Поскольку каждая заявка проходит n фаз обслуживания, то для получения вероятности P_4 необходимо вероятности, рассчитанные по формулам (13) – (15), возвести в степень n .

Подставляя полученные выражения для вероятностей P_1, P_2, P_3, P_4 в формулу (3), окончательно получаем расчетные соотношения для принятого показателя качества функционирования многофазовой одноканальной сети связи:

при экспоненциальном распределении $B(t)$ времени обслуживания заявки в одной фазе сети

$$P_{\dot{n}\dot{a}}(t_{\dot{a}}) = \frac{\bar{t}_{i\dot{n}} B_n(t_{\dot{a}}) \mu_{i\dot{a}}^{2n}}{(\bar{t}_{i\dot{n}} + \bar{t}_{\dot{a}\dot{n}})(\mu_{i\dot{a}} + \lambda_c)^n (\mu_{i\dot{a}} + \lambda_{\dot{a}\dot{o}})^n}, \quad (16)$$

при нормальном распределении $B(t)$ с параметрами $\bar{t}_{i\dot{a}}$ и $\sigma_{i\dot{a}}$ ($\bar{t}_{i\dot{a}} \geq 3\sigma_{i\dot{a}}$)

$$P_{\dot{n}\dot{a}}(t_{\dot{a}}) = \frac{\bar{t}_{i\dot{n}} B_n(t_{\dot{a}})}{\bar{t}_{i\dot{n}} + \bar{t}_{\dot{a}\dot{n}}} e^{-\lambda_{i\dot{n}} n \bar{t}_{i\dot{a}} + 0,5 \lambda_{i\dot{n}}^2 n \sigma_{i\dot{a}}^2} \times \left[0,5 + \hat{O} \left(\frac{n \bar{t}_{i\dot{a}} - \lambda_{i\dot{n}} n \sigma_{i\dot{a}}^2}{\sigma_{i\dot{a}} \sqrt{n}} \right) \right] \times \quad (17)$$

$$\times \left[e^{-\lambda_{\dot{a}\dot{o}} \bar{t}_{i\dot{a}} + 0,5 \lambda_{\dot{a}\dot{o}}^2 \sigma_{i\dot{a}}^2} \left(0,5 + \hat{O} \left(\frac{\bar{t}_{i\dot{a}} - \lambda_{\dot{a}\dot{o}} \sigma_{i\dot{a}}^2}{\sigma_{i\dot{a}}} \right) \right) \right]^n,$$

при распределении $B(t)$ по закону Эрланга с параметрами k и $\mu_{i\dot{a}} = k/\bar{t}_{i\dot{a}}$

$$P_{\dot{n}\dot{a}}(t_{\dot{a}}) = \frac{\bar{t}_{i\dot{n}} B_n(t_{\dot{a}}) \mu_{i\dot{a}}^{2nk}}{(\bar{t}_{i\dot{n}} + \bar{t}_{\dot{a}\dot{n}})(\mu_{i\dot{a}} + \lambda_c)^{nk} (\mu_{i\dot{a}} + \lambda_{\dot{a}\dot{o}})^{nk}}, \quad (18)$$

где $\bar{t}_{i\dot{n}} = \frac{1}{\lambda_{i\dot{n}}} = 1 / \sum_{i=1}^n \lambda_i$; $\bar{t}_{\dot{a}\dot{n}} = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_{i\dot{n}}} \bar{t}_{\dot{a}i}$; $B_n(t_{\dot{a}})$ – соответствующие формулы (5) – (7) при $t = t_{\dot{a}}$.

Отметим, что приведенные выше формулы для количественной оценки вероятности своевременной доставки сообщения учитывают характеристики надежности оборудования сети связи и резерв времени, используемый при обслуживании заявки.

Приведем некоторые результаты теоретически исследованных полученных расчетных соотношений.

Рассмотрим трехфазовую одноканальную сеть связи, которая характеризуется следующими исходными данными: $\lambda_i = \lambda = 10^{-3} 1/\div$; $\bar{t}_{\dot{a}i} = \bar{t}_{\dot{a}} = 1,0 \div$; $\mu_{i\dot{a}} = 3 \text{ н}$; $\lambda_{\dot{a}\dot{o}} = 5 \text{ в}$; $t_{\dot{a}} \geq \frac{1}{n \mu_{i\dot{a}}}$. Построим гра-

фики зависимости вероятности $P_{\dot{n}\dot{a}}(t_{\dot{a}})$ от резуль- татного времени для однофазной ($n = 1$), двухфазо- вой ($n = 2$) и трехфазовой ($n = 3$) сети для двух случаев распределения $B(t)$ времени обслуживания заявки в одной фазе: экспоненциального с парамет- ром $\mu_{i\dot{a}}$ и нормального с параметром $\bar{t}_{i\dot{a}} = 1/\mu_{i\dot{a}}$ и $\sigma_{i\dot{a}} = \bar{t}_{i\dot{a}}/3$.

При расчетах воспользуемся формулами (16) и (17), результаты расчетов представлено на рис. 2.

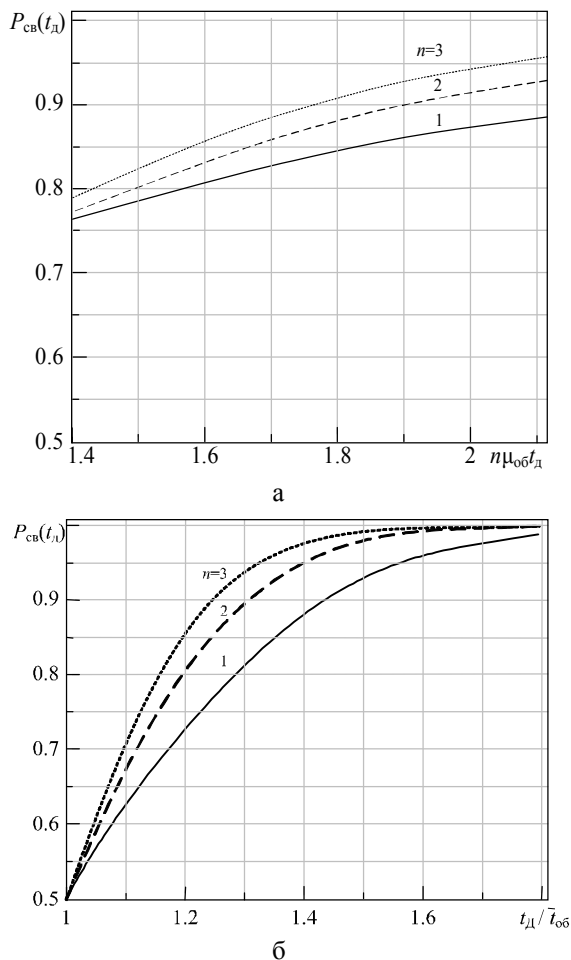


Рис. 2. Графики зависимости вероятности своевременной доставки сообщения от относительной величины резервного времени для n фаз ($n = 1, 2, 3$)

Графики рис. 2, а соответствуют случаю, когда время обслуживания в каждой фазе распределено по экспоненциальному, а графики рис. 2, б – по нормальному законам.

Анализируя изменение кривых на приведенных графиках, заметим, что характер этого изменения определяется видом функции распределения времени обслуживания $V_n(t)$ при $n = 1, 2$ и 3 (выражения (5) и (6)). Так, при использовании выражения (5) получаем

$$V_1(t_{\bar{a}}) = 1 - e^{-\mu_{i\bar{a}}t_{\bar{a}}},$$

$$V_2(t_{\bar{a}}) = 1 - e^{-2\mu_{i\bar{a}}t_{\bar{a}}} (1 + 2\mu_{i\bar{a}}t_{\bar{a}}),$$

$$V_3(t_{\bar{a}}) = 1 - e^{-3\mu_{i\bar{a}}t_{\bar{a}}} \left(1 + 3\mu_{i\bar{a}}t_{\bar{a}} + \frac{(3\mu_{i\bar{a}}t_{\bar{a}})^2}{2!} \right).$$

Аналогичный вывод можно сделать и при исследовании формулы (6) (при нормальном законе распределения времени обслуживания в каждой фазе).

Анализ полученных выражений и построенных на их основе графиков позволяет обосновать величину резервного (допустимого) времени для обеспечения требуемого (заданного) значения $D_{\bar{n}\bar{a}}(t_{\bar{a}})$.

Так, для достижения $D_{\bar{n}\bar{a}}(t_{\bar{a}}) = 0,95$ (рис. 2, а) при экспоненциальном законе обслуживания пакетов в каждой фазе трехфазной ($n = 3$) сети необходимо увеличить резервное время $t_{\bar{a}}$ в 2,1 раза по сравнению со средним временем обслуживания $\bar{t}_{i\bar{a}}$.

При нормальном законе обслуживания пакетов в каждой фазе трехфазной сети (рис. 2, б) для достижения такого же значения $D_{\bar{n}\bar{a}}(t_{\bar{a}}) = 0,95$ необходимо увеличить резервное время $t_{\bar{a}}$ в 1,4 раза по сравнению с $\bar{t}_{i\bar{a}}$.

Кроме того важно заметить, что с увеличением количества фаз обслуживания увеличивается $\bar{t}_{i\bar{a}}$, но приращение резервного времени $t_{\bar{a}}$ для достижения заданного $D_{\bar{n}\bar{a}}(t_{\bar{a}})$ уменьшается.

При одном и том же виде ФР времени обслуживания пакетов в каждой фазе многофазовой сети резервное время $t_{\bar{a}}$, необходимое для обеспечения заданных значений $D_{\bar{n}\bar{a}}(t_{\bar{a}})$, значительно больше при экспоненциальном законе распределения времени обслуживания пакетов, чем при нормальном.

Например, для достижения значения $D_{\bar{n}\bar{a}}(t_{\bar{a}}) = 0,95$ при экспоненциальном законе распределения и $n = 3$ требуется увеличить резервное время $t_{\bar{a}}$ на 54,4 % относительно резервного времени при нормальном законе распределения, при $n = 2$ – на 71,4 % и при $n = 1$ – на 89,8 %.

Вывод

Таким образом, в работе предложена аналитическая модель, а также получены аналитические выражения, которые позволяют количественно оценить вероятность своевременной доставки пакетов с учетом характеристик надежности оборудования сети связи.

Список литературы

1. Киселев Л.К. / Концептуальные основы обеспечения устойчивости сетей связи // Л.К. Киселев, А.П. Маркелов, Б.В. Воробьев – М.: – Электросвязь, 1994. – № 2. – С. 23 – 26.
2. Юрасова Л.В. / Проблемы разработки нормативных правовых актов по вопросам применения средств связи // Л.В. Юрасова, С.Ф. Кондратов – М.: Электросвязь, 2007. – № 3 – С. 35 – 40.
3. Нетес В.А. Соглашения об уровне обслуживания: стандарты и реалии / В.А. Нетес // Вестник связи, 2003. – № 8. – С. 72 – 79.
4. Нетес В.А. Задание требований по надежности в соглашениях об уровне обслуживания / В.А. Нетес // Электросвязь, 2004. – № 4. – С. 37 – 39.
5. Букринский С.А. Проблема обеспечения устойчивости, живучести и безопасности сетей связи – основная задача управления сетями следующего поколения / С.А. Букринский // 4-я Междуна. конф. «Управление сетями

электросвязи – основа надежности функционирования телекоммуникационной инфраструктуры» – М. – 2006. – С. 29 – 36.

6. Duffy J. Cisco routers caused major outage in Japan: report / J. Duffy // *Network World*. 16.05. – 2007. – P. 15 – 20.

7. Next Generation Networks Task Force Report // *The President's National Security Telecommunications Advisory Committee*. – March 28, – 2006. – P. 38.

8. Norros I. A broad approach to the dependability of IP networks / I. Norros // *European CUP Newsletter*. – 2006. – Vol. 2. No 3. – P. 11 – 17.

Поступила в редколлегию 1.08.2013

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Б.П. Креденцер, Военный институт телекоммуникаций и информатизации НТУУ “КПИ”, Киев.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МНОГОФАЗОВОЙ ОДНОКАНАЛЬНОЙ СЕТИ СВЯЗИ С РЕАЛЬНОЙ НАДЕЖНОСТЬЮ ОБОРУДОВАНИЯ

Д.І. Могилевич

Запропоновано аналітичну модель на основі якої отримані розрахункові співвідношення, що дозволяють кількісно оцінити показники якості функціонування мережі зв'язку з урахуванням характеристик надійності обладнання.

Ключові слова: надійність обладнання, аналітична модель, телекомунікаційні мережі.

ANALYTICAL MODEL OF A MULTI-PHASE SINGLE-CHANNEL NETWORK CONNECTION WITH REAL RELIABILITY OF EQUIPMENT

D.I. Mogylevych

An analytical model is proposed that is based on the calculated ratios which were obtained to quantify indicators of the quality of the network connection, taking into account the characteristics of reliability.

Keywords: reliability of the elements, analytical model, telecommunication networks.