УДК 517.91:681.51

Т.Е. Александрова

Национальный технический университет «ХПИ», Харьков

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СИНТЕЗА ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ КВАДРАТИЧНЫМ КРИТЕРИЕМ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Рассматривается проблема поиска решения задачи параметрического синтеза линейной динамической системы с интегральным квадратичным критерием оптимальности. Доказывается утверждение о единственности решения такой задачи. В качестве примера рассматривается параметрический синтез системы наведения и стабилизации танковой пушки в канале вертикального наведения.

Ключевые слова: *параметрический синтез, динамическая система, интегральный квадратичный критерий, система наведения и стабилизации.*

Постановка задачи

Пусть возмущенное движение динамической системы описывается линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{X}(t) = A(\alpha)X(t), \tag{1}$$

где $X(t)$ – n-мерный вектор состояния системы; α – m-мерный вектор варьируемых параметров системы.

Качество динамической системы (1) будем оценивать величиной интегрального квадратичного функционала

$$J(\alpha) = \int_0^\infty \langle X(t), QX(t) \rangle dt, \tag{2}$$

где Q – квадратная симметрическая сильвестрова матрица.

Задача параметрического синтеза системы (1) состоит в отыскании вектора варьируемых параметров $\alpha \in G_\alpha$, где G_α – множество допустимых векторов α, при котором функционал (2) на решениях системы (1) достигает минимума.

В работах [1 – 3] показано, что значение функционала (2) составляет

$$J(\alpha) = \langle X(0), K(\alpha)X(0) \rangle, \tag{3}$$

где $X(0)$ – начальное условие системы (1); $K(\alpha)$ – квадратная симметрическая матрица, удовлетворяющая матричному алгебраическому уравнению

$$K(\alpha)A(\alpha) + A^T(\alpha)K(\alpha) + Q = 0. \tag{4}$$

Решение сформулированной выше задачи параметрического синтеза динамической системы (1) сводится к отысканию минимума определенно-положительной квадратичной формы (3).

Любой из известных численных методов поиска экстремума функции многих переменных, в том числе и наиболее распространенный метод Нелдера-Мида [4], реализованный в программных продуктах Optimization Toolbox и Minimize в интерактивных средах MATLAB и MATHCAD соответственно, позволяет отыскать локальный минимум функции, расположенный вблизи стартовой точки. Отыскание глобального минимума функции существенно усложняет задачу параметрического синтеза.

Целью настоящей работы является исследование экстремальных свойств функции (3), представляющей собой функцию Ляпунова динамической системы (1) в момент $t = 0$.

Основная часть

В качестве множества G_α выберем область устойчивости системы (1), характеристическое уравнение которой представим в виде

$$\det\left[A(\alpha) - Es\right] = a_0(\alpha)s^n + \\ + a_1(\alpha)s^{n-1} + ... + a_n(\alpha) = 0. \tag{5}$$

При $\alpha \in G_\alpha$ все корни уравнения (5) находятся слева от мнимой оси комплексной плоскости корней, а гиперповерхность Γ_α, ограничивающая область G_α, является отображением мнимой оси плоскости корней характеристического уравнения (5) на m-мерное пространство варьируемых параметров Λ_α.

В плоскости корней характеристического уравнения (5) рассмотрим линию

$$s = \beta + j\omega, \tag{6}$$

параллельную мнимой оси плоскости корней и сдвинутую относительно мнимой оси на величину $\beta < 0$. Отображение этой линии на m-мерное пространство варьируемых параметров Λ_α определяет гиперповерхность $\tilde{A}_\alpha(\beta)$, называемую гиперповерхностью равной степени устойчивости [5] и ограничивающую область $G_\alpha(\beta)$. Если $\alpha \in G_\alpha(\beta)$, то степень устойчивости такой системы не менее $|\beta|$. Это означает, что при $\alpha \in G_\alpha(\beta)$ ближайший к мнимой оси действительный корень или пара комплексно-сопряженных корней уравнения (5) отстоят слева от мнимой оси не менее, чем на расстоянии $|\beta|$.

Выбирая $|\beta_1| < |\beta_2| < ... < |\beta_k|$, получаем множества $G_\alpha(\beta_1), G_\alpha(\beta_2), ..., G_\alpha(\beta_k)$, ограниченные гиперповерхностями $\tilde{A}_\alpha(\beta_1), \tilde{A}_\alpha(\beta_2), ..., \tilde{A}_\alpha(\beta_k)$ соответственно, вложенными друг в друга.

Предположим, что при $\beta = \beta_k$ множество $G_\alpha(\beta_k)$ и гиперповерхность $\tilde{A}_\alpha(\beta_k)$ стягиваются в точку α^* в m-мерном пространстве $Ё_\alpha$, либо в множество $\overline{G}_\alpha(\beta_k)$, ограниченное гиперповерхностью $\overline{\tilde{A}}_\alpha(\beta_k)$ в том же пространстве, причем множество $\overline{G}_\alpha(\beta_k)$ и гиперповерхность $\overline{\tilde{A}}_\alpha(\beta_k)$ имеют размерности меньше, чем размерности множества $G_\alpha(\beta_k)$ и гиперповерхности $\tilde{A}_\alpha(\beta_k)$ соответственно. Первый случай соответствует ближайшему к линии оси действительному корню характеристического уравнения

$$\det\left[A(\alpha^*) - Es\right] = 0, \tag{7}$$

а второй случай – ближайшей к мнимой оси паре комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения (7). Как в первом, так и во втором случае запас устойчивости динамической системы (1) составляет $|\beta_k|$ и является максимальным для $\alpha \in G_\alpha$. Во втором случае на множестве $\overline{G}_\alpha(\beta_k)$ требуется отыскать точку, в которой функционал (3) достигает минимума. Значение этого функционала зависит от двух векторов $X(0)$ и α, что создает определенные трудности, так как значения компонент вектора состояния $X(0)$ в момент времени $t = 0$ в значительной степени неопределенны. В этой связи целесообразно использовать понятие главной координаты динамической системы (1), иными словами, координаты, в наибольшей мере характеризующей поведение динамической системы. Изменение главной координаты в стабилизируемом процессе главным образом определяет значение функционала (2) или (3). Обозначим главную координату вектора состояния $X(t)$ через $x_i(t)$, а ее значение в момент времени $t = 0$ через $x_i(0)$. Все остальные компоненты вектора $X(0)$ положим равными нулю. Тогда квадратичная форма (3) равна

$$J(\alpha) = k_{ii}(\alpha) x_i^2(0). \tag{8}$$

Умножение критерия качества на какое-либо постоянное число не изменяет положения оптимальной точки в пространстве Λ_α, поэтому критерий (8) может быть представлен в виде

$$J(\alpha) = k_{ii}(\alpha), \tag{9}$$

где $k_{ii}(\alpha)$ – i-й диагональный элемент матрицы $K(\alpha)$.

Таким образом, если в динамической системе (1) можно выделить главную координату, то в процессе решения задачи параметрического синтеза такой системы вместо критерия (3), значение которого определяется векторами $X(0)$ и α, можно пользоваться критерием (9), значение которого определяется только лишь вектором α.

Известно [6], что любой устойчивой динамической системе (1) соответствует функция Ляпунова $V[X(t), \alpha]$, представляющая собой определенно-положительную квадратичную форму

$$V[X(t), \alpha] = \langle X(t), K(\alpha) X(t) \rangle, \tag{10}$$

где квадратная симметрическая сильвестрова матрица $K(\alpha)$ удовлетворяет матричному алгебраическому уравнению (4).

Зададим точку $\alpha_1 \in \tilde{A}_\alpha(\beta_1)$ в пространстве $Ё_\alpha$ на гиперповерхности $\tilde{A}_\alpha(\beta_1)$. Поскольку эта гиперповерхность вложена в область устойчивости системы (1), то точке α_1 соответствует функция Ляпунова $V[X(t), \alpha_1] = \langle X(t), K(\alpha_1) X(t) \rangle$, а значение функционала качества (2), вычисленное на решениях системы (1), в соответствии с (9) составляет

$$J(\alpha_1) = k_{ii}(\alpha_1).$$

Для любой точки $\alpha_j \in \tilde{A}_\alpha(\beta_j)$, $(i = \overline{1,k})$ имеем

$$J(\alpha_j) = k_{ii}(\alpha_j), \quad (i = \overline{1,k})$$

При $\alpha = \alpha_k = \alpha^*$ значение функции (9) составляет

$$J(\alpha^*) = k_{ii}(\alpha^*).$$

Коль скоро с возрастанием индекса $j = \overline{1,k}$ запас устойчивости системы (1) возрастает, значение функции (9) убывает

$$k_{ii}(\alpha_1) > k_{ii}(\alpha_2) > ... > k_{ii}(\alpha^*). \tag{10}$$

Неравенство (10) доказывает единственность минимума функции (9) по α при $\alpha \in G_\alpha$.

Пример

В качестве примера рассмотрим решение задачи параметрического синтеза стабилизатора танковой пушки, возмущенное движение которого описывается системой линейных дифференциальных уравнений [7]:

$$\begin{aligned} &\ddot{\phi}(t) = -\frac{k_м k_д}{J_n}\beta(t);\\ &\ddot{\beta}(t) = -\frac{1}{T_1^2}\beta(t) - \frac{T_2}{T_1^2}\dot{\beta}(t) + \frac{k_e k_y}{cT_1^2}k_\phi \phi(t) + \\ &\quad + \frac{k_e k_y}{cT_1^2}k_c k_{\dot{\phi}}\dot{\phi}(t), \end{aligned} \qquad (11)$$

где $\phi(t)$ – угол поворота оси канала ствола танковой пушки относительно оси цапф; $\beta(t)$ – угол поворота якоря электромагнита электрогидравлического усилителя; $\text{Ò}_1, \text{Ò}_2$ – постоянные времени электромагнита управления; J_n – момент инерции танковой пушки относительно оси цапф; c – коэффициент жесткости фиксирующей пружины якоря электромагнита; $k_{\text{ì}}, k_{\text{ä}}, k_{\text{å}}, k_{\text{ó}}, k_{\text{ñ}}$ – коэффициенты пропорциональности; $k_\phi, k_{\dot{\phi}}$ – варьируемые параметры стабилизатора, подлежащие выбору. Систему (11) запишем в нормальной форме, производя замену переменных $x_1(t) = \phi(t); x_2(t) = \dot{\phi}(t); x_3(t) = \beta(t); x_4(t) = \dot{\beta}(t)$:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1(t) = x_2(t);\\ &\dot{x}_2(t) = -\frac{k_M k_Д}{I_n}x_3(t);\\ &\dot{x}_3(t) = x_4(t);\\ &\dot{x}_4(t) = \frac{k_e k_y}{cT_{k1}^2}k_\phi x_1(t) + \frac{k_e k_y}{cT_{k1}^2}k_c k_{\dot{\phi}} x_2(t) - \\ &\quad - \frac{1}{T_{k1}^2}x_3(t) - \frac{T_{k2}}{T_{k1}^2}x_4(t). \end{aligned} \qquad (12)$$

Собственная матрица системы (12) может представлена в виде:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{k_M k_{\text{Ä}}}{I_n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{k_e k_y}{cT_{k1}^2}k_\phi & \dfrac{k_e k_y}{cT_{k1}^2}k_c k_{\dot{\phi}} & -\dfrac{1}{T_{k1}^2} & -\dfrac{T_{k2}}{T_{k1}^2} \end{bmatrix}, \qquad (13)$$

а характеристическое уравнение замкнутой системы (12) записывается

$$\begin{aligned} &\det(A - Es) = s^4 + \frac{T_{k2}}{T_{k1}^2}s^3 + \frac{1}{T_{k1}^2}s^2 + \\ &+ \frac{k_M k_{\text{Ä}} k_e k_y}{cI_n T_{k1}^2}k_c k_{\dot{\phi}} s + \frac{k_M k_{\text{Ä}} k_e k_y}{cI_n T_{k1}^2}k_\phi = 0. \end{aligned} \qquad (14)$$

Значения параметров танковой пушки с электрогидравлическим исполнительным органом составляют: I_n =736,9 Н·м·с^2; T_{k1} =10^{-2} с; T_{k2} =0,0005 с; c=100 Нм; k_c =0,2 с^2; $k_{\text{ì}}$ =0,0006 Н·м·Па$^{-1}$; $k_{\text{ä}}$ =1,228*10^{7}Па; k_e =10^3 Н·м·А$^{-1}$; k_y =0,01 Ом$^{-1}$. Тогда матрица (13) и характеристическое уравнение (14) могут быть записаны в виде:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 10^3 k_\phi & 0{,}2\cdot 10^3 k_{\dot{\phi}} & -10^4 & -5 \end{bmatrix}; \qquad (15)$$

$$s^4 + 5s^3 + 10^4 s^2 + 0{,}2\cdot 10^4 k_{\dot{\phi}} s + 10^4 k_\phi = 0. \qquad (16)$$

В характеристическом уравнении (16) произведем замену $s = \beta + j\omega$, выделим в уравнении (16) действительную и мнимую части, приравняем их нулю и из полученных уравнений выделим коэффициенты k_ϕ и $k_{\dot{\phi}}$:

$$\begin{aligned} &k_\phi = 3\cdot 10^{-4}\beta^4 + 2\cdot 10^{-4}\beta^2\omega^2 - 10^{-4}\omega^4 + \\ &+ 10^{-3}\beta^3 + 10^{-3}\beta\omega^2 + \omega^2 + \beta^2;\\ &k_{\dot{\phi}} = -2\cdot 10^{-3}\beta^3 + 2\cdot 10^{-3}\beta\omega^2 - 7{,}5\cdot 10^{-3}\beta^2 + \\ &+ 2{,}5\cdot 10^{-3}\omega^2 - 10\beta. \end{aligned} \qquad (17)$$

В плоскости варьируемых параметров $(k_\phi, k_{\dot{\phi}})$ с помощью соотношений (17) построим кривые при изменении ω от нуля до бесконечности при различных отрицательных значениях β. При $\beta = 0$ построенная кривая представляет собой область устойчивости замкнутой системы стабилизации, а при $\beta < 0$ – кривые равной степени устойчивости, представленные на рис. 1.

При β =-1,25 кривые равной степени устойчивости стягиваются в отрезок прямой, параллельный оси абсцисс, ограниченный точками $a = 1{,}5613$ и $b = 2496{,}87$. Если значения варьируемых параметров k_ϕ и $k_{\dot{\phi}}$ выбраны на отрезке (a, b), то замкнутая система стабилизации имеет постоянный максимальный запас устойчивости. Всюду на отрезке (a, b) значение параметра $k_{\dot{\phi}}$ постоянно и равно $k_{\dot{\phi}}^* = 12{,}5$.

В системе (11) главной координатой является переменная $\phi(t)$, поэтому в качестве начальных условий системы (11) выберем $\phi(0) = x_1(0) \neq 0$; $\dot{\phi}(0) = x_2(0) = 0$; $\beta(0) = x_3(0) = 0$; $\dot{\beta}(0) = x_4(0) = 0$. Действительно, в момент $t = 0$ танковая пушка отклонена от направления на цель на угол $\phi(0)$ и находится в покое, а стабилизатор отключен, следовательно $\dot{\phi}(0) = \beta(0) = \dot{\beta}(0) = 0$. После выбора цели в момент $t = 0$ стабилизатор включается и происходит наводка оси канала ствола на цель. При выбранных начальных условиях значение функционала (2) составляет

$$J(k_\phi, k_{\dot{\phi}}) = k_{11}(k_\phi, k_{\dot{\phi}}). \qquad (18)$$

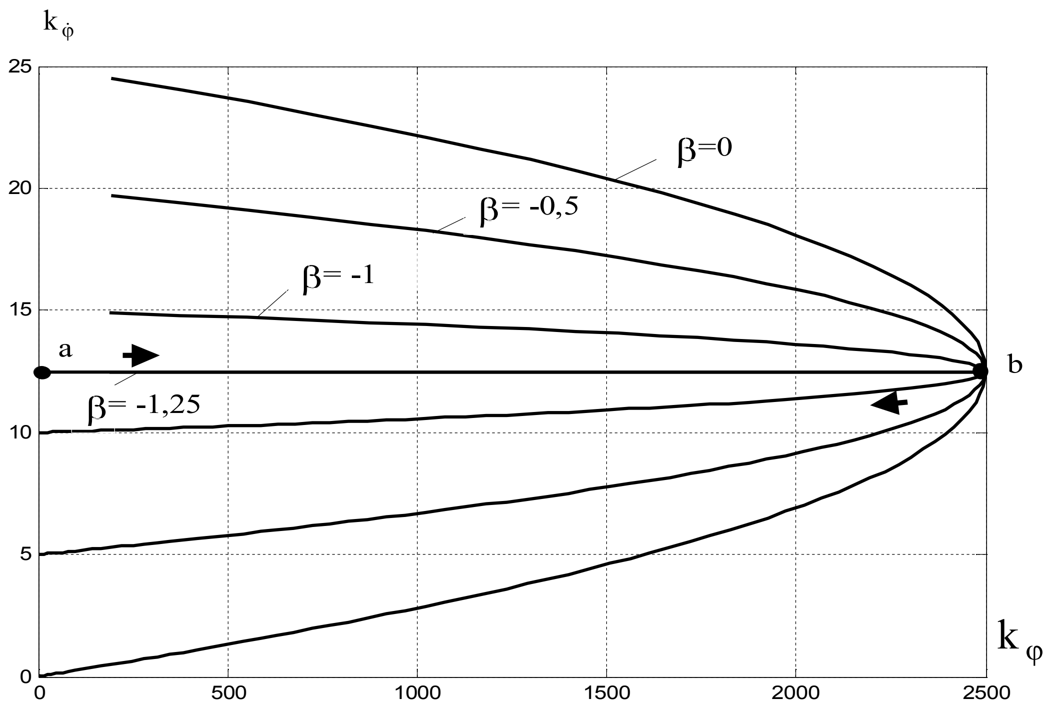

Рис. 1. Кривые равной степени устойчивости системы (12)

Квадратную симметрическую матрицу $K(k_\phi, k_{\dot{\phi}})$ будем отыскивать в виде

$$K(k_\phi, k_{\dot{\phi}}) = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} & k_{34} \\ k_{14} & k_{24} & k_{34} & k_{44} \end{bmatrix}, \qquad (19)$$

а матрицу Q функционала (2) положим равной

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (20)$$

Подставим матрицы (15), (19) и (20) в матричное уравнение (4), которое эквивалентно системе алгебраических уравнений относительно неизвестных элементов матрицы (19):

$$\begin{aligned}
&2\cdot 10^3 k_\phi k_{14} + 1 = 0;\\
&k_{11} + 0{,}2\cdot 10^3 k_{\dot{\phi}} k_{14} + 10^3 k_\phi k_{24} = 0;\\
&-10k_{12} - 10^4 k_{14} + 10^3 k_\phi k_{34} = 0;\\
&k_{13} - 5k_{14} + 10^3 k_\phi k_{44} = 0;\\
&k_{12} + 0{,}2\cdot 10^3 k_{\dot{\phi}} k_{24} = 0;\\
&-10k_{22} - 10^4 k_{24} + k_{13} + 0{,}2\cdot 10^3 k_{\dot{\phi}} k_{34} = 0;\\
&k_{23} - 5k_{24} + k_{14} + 0{,}2\cdot 10^3 k_{\dot{\phi}} k_{44} = 0;\\
&-10k_{23} - 10^4 k_{34} = 0;\\
&k_{33} - 5k_{34} - 10k_{24} - 10^4 k_{44} = 0;\\
&k_{34} - 5k_{44} = 0.
\end{aligned} \qquad (17)$$

Из системы (21) получаем

$$k_{11}\left(k_\phi, k_{\dot{\phi}}\right) = \frac{k_{\dot{\phi}}}{k_\phi} + \frac{10^3 k_{\dot{\phi}} + 2{,}5k_\phi - 25\cdot 10^3}{40k_{\dot{\phi}}^2 - 10^3 k_{\dot{\phi}} + 2{,}5k_\phi}. \qquad (22)$$

В соотношении (22) положим $k_{\dot{\phi}} = k_{\dot{\phi}}^* = 12.5$. В результате имеем

$$k_{11}\left(k_\phi, k_{\dot{\phi}}^*\right) = \frac{12{,}5}{k_\phi} + \frac{2{,}5k_\phi - 12{,}5\cdot 10^3}{2{,}5k_\phi - 6{,}25\cdot 10^3}. \qquad (23)$$

Продифференцируем (23) по k_ϕ и результат дифференцирования приравняем нулю. В результате получаем квадратное уравнение

$$k_\phi^2 + 25{,}1\cdot k_\phi - 3\cdot 10^4 = 0. \qquad (24)$$

Решение уравнения (24) позволяет получить на отрезке (a, b) точку

$$k_\phi = k_\phi^* = 161{,}11,$$

доставляющую минимум функционалу (18).

Точка $\left(k_\phi^*, k_{\dot{\phi}}^*\right)$ доставляет максимальный запас устойчивости и максимальное быстродействие замкнутой системе (1), а также обеспечивает высокое качество процессов стабилизации.

На рис. 2 приведены сечения функции двух переменных (18) по переменной k_ϕ при различных постоянных значениях переменной $k_{\dot{\phi}}$.

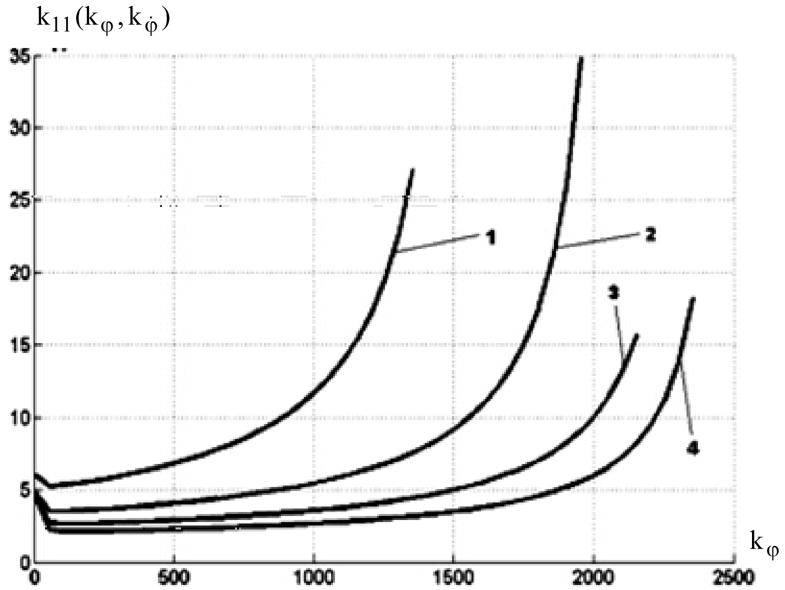

Рис. 2. Сечения функции (18) при: $k_{\dot{\phi}} = 5$ (кривая 1); $k_{\dot{\phi}} = 7{,}5$ (кривая 2); $k_{\dot{\phi}} = 10$ (кривая 3); $k_{\dot{\phi}} = 12{,}5$ (кривая 4)

Вывод

Интегральный квадратичный функционал (2), вычисленный на решениях динамической системы (1), имеет единственный минимум по α в области устойчивости G_{α}, иными словами, задача параметрического синтеза линейной динамической системы с интегральным квадратичным критерием оптимальности имеет единственное решение.

Список литературы

1. *Александров Е.Е. Автоматизированное проектирование динамических систем с помощью функций Ляпунова / Е.Е. Александров, М.В. Бех – Харьков: Основа, 1993. – 113 с.*
2. *Александров Е.Е. Многоканальные системы оптимального управления / Е.Е. Александров, И.Н. Богаенко, Б.И. Кузнецов. – К.: Техніка, 1995. – 292 с.*
3. *Александров Е.Е. Оптимизация многоканальных систем автоматического управления / Е.Е. Александров, Ю.Т. Костенко, Б.И. Кузнецов. – Х.: Основа, 1996. –288 с.*
4. *Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование / Д. Химмельблау. – М.: Мир, 1975. – 534 с.*
5. *Орурк И.А. Новые методы синтеза линейных и некоторых нелинейных динамических систем / И.А. Орурк. – М.-Л.: Наука, 1965. – 207 с.*
6. *Летов А.М. Динамика полета и уравнение / А.М. Летов. – М.: Наука, 1969. – 312 с.*
7. *Александрова Т.Е. Параметрический синтез оптимального стабилизатора танковой пушки / Т.Е. Александрова, И.В. Костяник, А.Е. Истомин // Механіка та машинобудування. – 2012. – №2. – С. 203-210.*

Поступила в редколлегию 4.07.2013

Рецензент: д-р техн. наук, проф. С.М. Порошин, Национальный технический университет «ХПИ», Харьков.

ПРО ЄДНІСТЬ РІШЕННЯ ЗАДАЧІ ПАРАМЕТРИЧНОГО СИНТЕЗУ ЛІНІЙНОЇ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ З ІНТЕГРАЛЬНИМ КВАДРАТИЧНИМ КРИТЕРІЄМ ОПТИМАЛЬНОСТІ

Т.Є. Александрова

Розглядається проблема пошуку рішення задачі параметричного синтезу лінійної динамічної системи з інтегральним квадратичним критерієм оптимальності. Доводиться твердження про єдність рішення такої задачі. Як приклад розглядається параметричний синтез системи наведення і стабілізації танкової гармати в каналі вертикального наведення.

Ключові слова: *параметричний синтез, динамічна система, інтегральний квадратичний критерій, система наведення і стабілізації.*

ON UNIQUENESS OF SOLUTION FOR LINEAR DYNAMIC SYSTEM PARAMETRIC SYNTHESIS PROBLEM WITH INTEGRAL QUADRATIC CRITERION OF OPTIMALITY

T.Ye. Alexandrova

The problem of finding a solution of parametric synthesis of linear dynamic system with an integral quadratic criterion of optimality is considered. We prove the assertion of the uniqueness of the solution of this problem. As an example, regarded is the parametric synthesis of guidance and stabilization for tank gun in the channel of vertical guidance.

Keywords: *parametric synthesis, a dynamic system, integral quadratic criterion, the system of guidance and stabilization.*