

УДК 004.272.2:519.63

О.А. Дмитриева

Донецкий национальный технический университет, Донецк

## О МОДИФИКАЦИИ МНОГОШАГОВЫХ КОЛЛОКАЦИОННЫХ БЛОЧНЫХ МЕТОДОВ ПРИ ПАРАЛЛЕЛЬНОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

*Работа посвящена вопроам численной реализации задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем в параллельных компьютерных средах. Модифицированы блочные коллокационные методы, которые позволяют находить решение одновременно во всех расчетных точках блока, что обеспечивает сокращение времени получения решения. С целью выравнивания порядка аппроксимации во всех расчетных точках блока в разностные схемы введены дополнительные производные высших порядков для опорных и расчетных точек блока. Для разработанных методов определены условия устойчивости, порядки точности и доказана сходимость по начальным данным и по правой части. Показано, что порядок аппроксимации введенных методов значительно превышает классические варианты и одинаков во всех расчетных точках блока.*

**Ключевые слова:** задача Коши, точки коллокации, параллельный метод, старшие производные, устойчивость, сходимость.

### Введение

Растущая сложность моделирования реализуемых в настоящее время научных и инженерных приложений обусловила необходимость привлечения для расчетов высокопроизводительной вычислительной техники, в частности, многопроцессорных компьютерных систем [1]. Однако при переходе на параллельные системы возникает необходимость реструктуризации существующих последовательных методов и алгоритмов и разработки новых методов, которые бы учитывали особенности параллельной организации вычислений для эффективного использования в режимах мультипроцессорной обработки, что является довольно сложной задачей [2 – 4]. Вопросы эффективной структурной и алгоритмической организации параллельных вычислений особенно остро возникают при моделировании динамических объектов, описываемых системами обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ) с сосредоточенными параметрами большой размерности. Для повышения точности результатов моделирования таких объектов при численном решении задачи Коши

$$x' = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0 \quad (1)$$

в последнее время широко применяются коллокационные методы, в том числе, и со старшими производными, которые носят чисто неявный характер [5–6]. В работах [7 – 9] особое внимание уделяется численным методам решения задачи Коши для жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений на основе интерполяционных полиномов Эрмита. Но все эти методы носят последовательный характер и не могут быть использованы в многопроцессорных системах.

В работах [10 – 12] были рассмотрены вопросы построения параллельных коллокационных блочных методов, которые обеспечивают хорошие показатели параллелизма, но, к сожалению, не поддерживают одинаковый порядок аппроксимации во всех точках блока.

Данная статья является продолжением исследований, проведенных в [11 – 14], и связана с возможностью введения в параллельные блочные расчетные схемы, построенные на полиномах Эрмита, дополнительных производных высоких порядков.

### Модификация коллокационных блочных методов с производными высоких порядков

Рассмотренные в [13 – 14] два типа коллокационных блочных методов со старшими производными позволяют построить обобщенный подход к генерации таких методов. При этом тип генерируемого блочного метода будет определяться количеством используемых опорных точек, или размерностью опорного блока. Если в расчетной схеме для вычислений приближенных значений в следующем блоке используется только значение в последней точке предшествующего блока, можно говорить об одношаговом коллокационном блочном методе

$$u_{n,j} = u_{n,0} + \tau \sum_{i=1}^s \tau^i a_{i,j}^{(1)} F_{n,i}^{(1)}, \quad j=1,2,\dots,s, \quad (2)$$

где  $F_{n,i}^{(1)} = f^{(1)}(t_n + i\tau, u_{n,i})$  –  $i$ -ая производная правой части, вычисленная в точке  $t_n + j\tau$ ,  $a_{i,j}^{(1)}$  – коэффициенты расчетной схемы, которые находятся из соотношений

$$a_{i,j}^{(l)} = \int_0^{\tau} h_{j,l}(t) dt, \quad i, j = 1, 2, \dots, s,$$

$$b_{i,j} = \int_{-(m-i)\tau}^0 h_{j,0}(t) dt, \quad i, j = 1, 2, \dots, s.$$

где  $h_{j,l}$  – соответствующие многочлены Эрмита.

При использовании всех или нескольких значений в точках предшествующего блока речь будет идти о многошаговом коллокационном блочном методе вида

$$u_{n,j} = u_{n,0} + \tau \sum_{i=1}^m b_{i,j} F_{n-1,i}^{(0)} + \tau \sum_{l=0}^{p_j} \sum_{i=1}^s \tau^l a_{i,j}^{(l)} F_{n,i}^{(l)}, \quad (3)$$

$$j=1, 2, \dots, s, \quad n=1, 2, \dots, N,$$

где  $p_j$  – старший порядок введенной производной правой части в точке  $t_n + j\tau$ ,

В качестве исходных методов в работе рассматриваются вычислительные схемы (3) для блоков, содержащих  $s$  узлов, при использовании вычисленных значений приближенного решения в  $m$  предшествующих блоку узлах. В случае многошагового блочного метода начальный блок будет содержать точки сетки, в которых заданы стартовые значения приближенного решения, необходимые для продолжения расчета. Модификация разностных схем (3) связана с введением повышенного порядка производных в опорных точках (рис. 1), что позволяет повысить порядок аппроксимации разностных схем и не приводит к росту размерности системы.

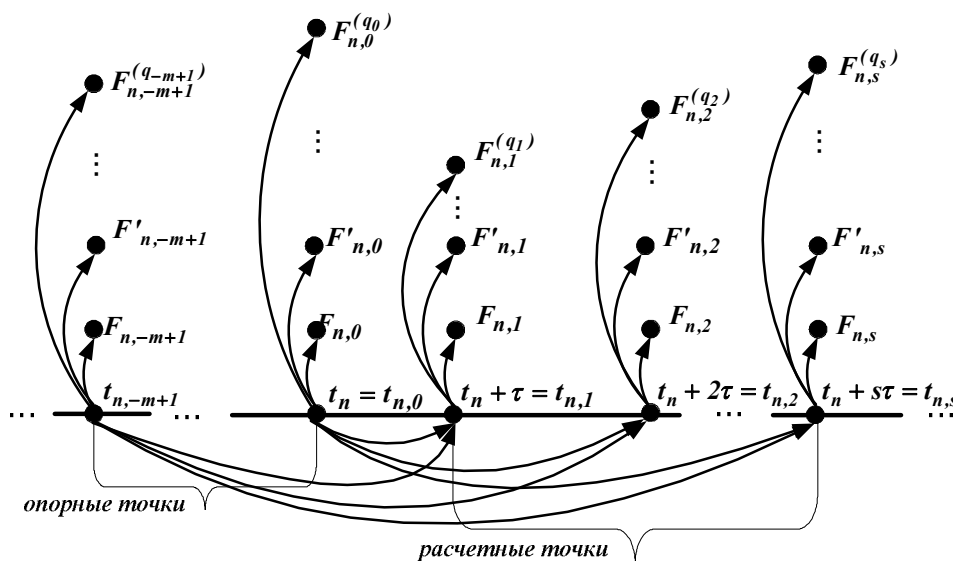


Рис. 1. Схема  $m$ -шагового  $s$ -точечного коллокационного блочного метода со старшими производными в опорных и расчетных точках

Уравнения многошаговых разностных методов для блока из  $s$  точек при использовании вычисленных значений приближенного решения в  $m$  предшествующих блоку узлах, с учетом введенных выше обозначений можно записать в виде:

$$u_{n,j} = u_{n,0} + \tau \sum_{i=1}^m \sum_{l=0}^{q_i} \tau^l b_{i,j}^{(l)} F_{n-1,i}^{(l)} + \tau \sum_{l=0}^{p_j} \sum_{i=1}^s \tau^l a_{i,j}^{(l)} F_{n,i}^{(l)}, \quad (4)$$

$$j=1, 2, \dots, s, \quad n=1, 2, \dots, N.$$

Поскольку все значения правых частей опорного блока  $F_{n-1,i}^{(0)}$  уже известны, не составит никакого труда определить их старшие производные  $F_{n-1,i}^{(l)} = f^{(l)}, l=1, 2, \dots, q_i, i=1, 2, \dots, m$ , не увеличивая количество уравнений в системе.

Формулы (4) определяют блочный коллокационный  $m$ -шаговый  $s$ -точечный разностный метод со старшими производными правых частей в расчет-

ных и опорных точках блока. При этом  $T_n^s = \{t_{n,1}, t_{n,2}, \dots, t_{n,s}\}$  – множество точек, в которых значения определяются одновременно.

### Генерация расчетных схем модифицированных методов

Введением в расчетную схему многошагового блочного метода со старшими производными (3) дополнительных слагаемых, которые будут определять производные правых частей в опорных точках многошаговой схемы вида (4), можно значительно повысить порядок аппроксимации. При этом, поскольку старшие производные вводятся на известных значениях, при осуществлении вычислений дополнительные итерации не потребуются. Для генерации расчетной схемы необходимо задать шаблон метода с определением количества опорных и расчетных точек и порядков

производных. Для получения сравнительных оценок можно воспользоваться схемой из [10] с из-

вестными расчетными коэффициентами и порядком аппроксимации (рис. 2).

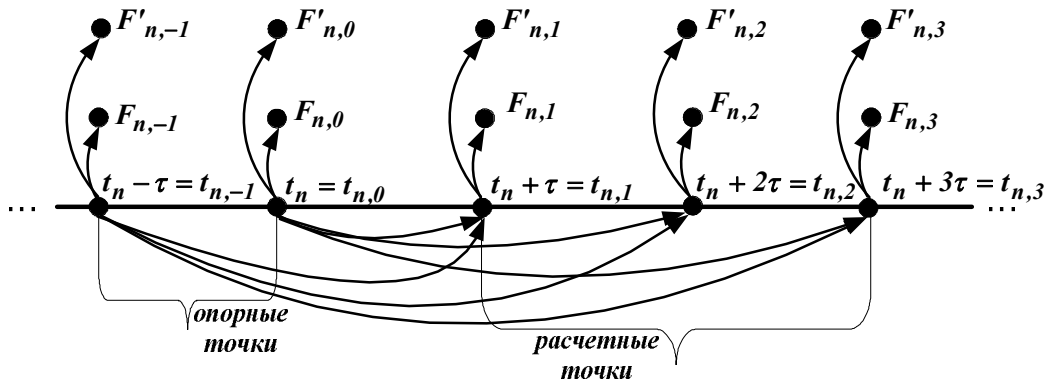


Рис. 2. Схема 2-шагового 3-точечного коллокационного блочного метода с первыми производными в опорных и расчетных точках

Сгенерированная таким образом разностная схема (5) для шаблона, приведенного на рис. 2, будет содержать только первые производные правых частей, но не только в расчетных, а еще и в опорных точках блока:

$$\begin{aligned}
 u_{n,1} = & u_{n,0} + \frac{26081\tau F_{n,-1}}{435460} + \frac{122341\tau F_{n,0}}{272160} + \frac{313\tau F_{n,1}}{630} + \\
 & + \frac{12091\tau F_{n,2}}{272160} + \frac{14111\tau F_{n,3}}{4354560} + \frac{893\tau^2 F'_{n,-1}}{725760} + \frac{6887\tau^2 F'_{n,0}}{90720} - \\
 & - \frac{47\tau^2 F'_{n,1}}{320} - \frac{1721\tau^2 F'_{n,2}}{90720} - \frac{103\tau^2 F'_{n,3}}{145152}, \quad (5) \\
 u_{n,2} = & u_{n,0} + \frac{157\tau F_{n,-1}}{17010} + \frac{4201\tau F_{n,0}}{8505} + \frac{313\tau F_{n,1}}{315} + \\
 & + \frac{4201\tau F_{n,2}}{8505} + \frac{157\tau F_{n,3}}{17010} + \frac{11\tau^2 F'_{n,-1}}{5670} + \frac{269\tau^2 F'_{n,0}}{2835} - \\
 & - 269\tau^2 F'_{n,2}/2835 - 11\tau^2 F'_{n,3}/5670, \\
 u_{n,3} = & u_{n,0} + \frac{411\tau F_{n,-1}}{17920} + \frac{711\tau F_{n,0}}{1120} + \frac{81\tau F_{n,1}}{70} + \\
 & + \frac{921\tau F_{n,2}}{1120} + \frac{6501\tau F_{n,3}}{17920} + \frac{9\tau^2 F'_{n,-1}}{1792} + \frac{183\tau^2 F'_{n,0}}{1120}
 \end{aligned}$$

$$- \frac{81\tau^2 F'_{n,1}}{320} + \frac{279\tau^2 F'_{n,2}}{1120} - \frac{339\tau^2 F'_{n,3}}{8960}.$$

Порядок аппроксимации модифицированной схемы равен во всех расчетных точках блока одинаков. Невязка в соответствующих точках оценивается как

$$\begin{aligned}
 r(t_n + \tau) &= -\frac{89x_0^{(11)}\tau^{11}}{314344800} + O[\tau]^{12}, \\
 r(t_n + 2\tau) &= -\frac{89x_0^{(11)}\tau^{11}}{157172400} + O[\tau]^{12}, \\
 r(t_n + 3\tau) &= -\frac{x_0^{(11)}\tau^{11}}{431200} + O[\tau]^{12},
 \end{aligned}$$

в то время, как разностная схема типа (3) на том же множестве расчетных и опорных точек аппроксимирует с 9-ым порядком. Таким образом, добиться дополнительного повышения точности можно за счет наращивания порядков производных правых частей в не только в расчетных, но и в опорных точках. Используя те же точки коллокации, что и в шаблоне, приведенном на рис. 2, но с введением в расчетные схемы добавочных производных второго порядка (рис. 3), можно получить разностные схемы, которые обеспечивают в расчетных точках 16-й порядок

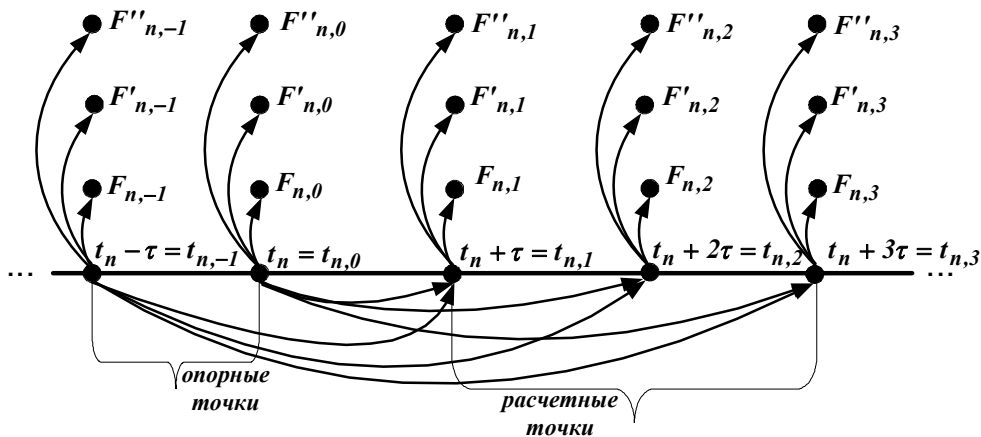


Рис. 3. Схема 2-шагового 3-точечного коллокационного блочного метода со вторыми производными в опорных и расчетных точках

$$r(t_n + \tau) = \frac{139x_0^{(16)}\tau^{16}}{14645959216000} + O[\tau]^{17},$$

$$r(t_n + 2\tau) = -\frac{10519x_0^{(16)}\tau^{16}}{16689521040192000} + O[\tau]^{17},$$

$$r(t_n + 3\tau) = \frac{3x_0^{(16)}\tau^{16}}{200904704000} + O[\tau]^{17}.$$

**Устойчивость модифицированных коллокационных блочных методов со старшими производными**

Модификация методов, связанная с введением старших производных в опорных точках блока не нарушает устойчивость по начальным данным, так как разностные уравнения (4), соответствующие однородной системе приводятся к виду

$$u_{n,j} = u_{n,0},$$

и можно утверждать, что решения устойчивы и являются равномерно по n ограниченными.

Исследование устойчивости по правой части проводится на одномерном модельном уравнении [15]

$$x' = \lambda x, t > 0, \tag{6}$$

где  $\lambda$  – комплексное число ( $\lambda < 0$ ). Для получения оценки для произвольной правой части, используя при этом модельное уравнение (6) с учетом соотношений  $F_{n,j} = \lambda u_{n,j}$ ,  $j=1-m, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, s$  система (4) записывается в виде

$$u_{n,j} = u_{n,0} + \tau\lambda \sum_{i=1}^m b_{i,j}^{(0)} u_{n-1,i} + \tau\lambda \sum_{i=1}^s a_{i,j}^{(0)} u_{n,i} + \tau^2\lambda \sum_{i=1}^m b_{i,j}^{(1)} + \tau^2\lambda \sum_{i=1}^s a_{i,j}^{(1)}, j=1, 2, \dots, s. \tag{7}$$

Полученное уравнение преобразуется к виду

$$(1 - \lambda\tau a_{j,j}^{(0)})u_{n,j} - \lambda\tau \sum_{i=1, i \neq j}^s a_{i,j}^{(0)} u_{n,i} = u_{n,0} \left( 1 + \lambda\tau \left( b_{j,m}^{(0)} + u_{n,0}^{-1} \left( \sum_{i=1}^s \tau b_{i,j}^{(1)} + \sum_{i=1}^s \tau a_{i,j}^{(1)} \right) \right) \right) + \lambda\tau \sum_{i=1}^{m-1} b_{i,j}^{(0)} u_{n-1,i}. \tag{8}$$

Вводятся обозначения

$$V_{n+1} = \{u_{n,j}, j=1, 2, \dots, s\},$$

$$U_n = \{u_{n,j-m}, j=1, 2, \dots, m\},$$

$$c_j = u_{n,0}^{-1} \left( \sum_{i=1}^s \tau b_{i,j}^{(1)} + \sum_{i=1}^s \tau a_{i,j}^{(1)} \right)$$

и (8) записывается векторной форме

$$A_1 U_n + A_2 V_{n+1} = 0, \tag{9}$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} \mu b_{1,1} & \mu b_{1,2} & \dots & \mu b_{1,m-1} & 1 + \mu(b_{1,m} + c_1) \\ \mu b_{2,1} & \mu b_{2,2} & \dots & \mu b_{2,m-1} & 1 + \mu(b_{2,m} + c_2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ \mu b_{s,1} & \mu b_{s,2} & \dots & \mu b_{s,m-1} & 1 + \mu(b_{s,m} + c_s) \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \mu a_{1,1}^{(0)} - 1 & \mu a_{1,2}^{(0)} & \dots & \mu a_{1,s}^{(0)} \\ \mu a_{2,1}^{(0)} & \mu a_{2,2}^{(0)} - 1 & \dots & \mu a_{2,s}^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu a_{s,1}^{(0)} & \mu a_{s,2}^{(0)} & \dots & \mu a_{s,s}^{(0)} - 1 \end{pmatrix}.$$

Разрешая (9) относительно  $V_{n+1}$ , можно получить

$$V_{n+1} = G U_n, \tag{10}$$

где

$$G = -A_2^{-1} A_1. \tag{11}$$

Система (10) преобразуется к эквивалентной системе

$$W_{n+1} = \tilde{G} W_n, \tag{12}$$

где

$$W_n = \{u_{n,m-1}, u_{n,l-m+1}, \dots, u_{n,0}\},$$

$$W_{n+1} = \{u_{n,s-m+1}, u_{n,s-m+2}, \dots, u_{n,0}, \dots, u_{n,s}\}.$$

Матрица (11) имеет размерность  $s \times m$ , а матрица из (12) – квадратная, и ее размерность определяется  $\max(s, m)$ . Если число опорных и расчетных точек совпадает ( $s = m$ ), то совпадают и матрицы  $G = \tilde{G}$ . В противном случае, если опорных точек меньше, чем расчетных ( $m < s$ ), в матрице  $\tilde{G}$  первые  $s - m$  столбцов следует положить равными 0, а последние  $m$  столбцов будут совпадать с  $G$

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & g_{1,m-1} & g_{1,m-2} & \dots & g_{1,0} \\ 0 & \dots & 0 & g_{2,m-1} & g_{2,m-2} & \dots & g_{2,0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & g_{s,m-1} & g_{s,m-2} & \dots & g_{s,0} \end{pmatrix}.$$

Для случая, когда опорных точек больше, чем расчетных ( $s < m$ ), матрицу  $\tilde{G}$  следует привести к виду

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ g_{1,1} & g_{1,2} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & g_{1,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{s,1} & g_{s,2} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & g_{s,m} \end{pmatrix}.$$

Устойчивость численного метода (4) определяется собственными значениями матрицы  $\tilde{G}$ , и для устойчивости по правой части должно быть выполнено условие корней. Т.е. для некоторой нормы мат-

риці  $\tilde{G}$  справедливо неравенство  $\|\tilde{G}\| \leq 1$ , или все корни характеристического уравнения матрицы  $\tilde{G}$  лежат внутри или на границе единичного круга, причем на границе круга нет кратных корней.

Так для проверки устойчивости трехшагового двухточечного метода, заданного разностными уравнениями (5) необходимо перейти к модельному уравнению, положив  $F_{n,j} = \lambda u_{n,j}$  и сформировать матрицы

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{26081\mu}{4354560} & 1 + \frac{122341\mu}{272160} \\ \frac{157\mu}{17010} & 1 + \frac{4201\mu}{8505} \\ \frac{411\mu}{17920} & 1 + \frac{711\mu}{1120} \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \frac{313\mu}{630} - 1 & \frac{12091\mu}{272160} & \frac{14111\mu}{4354560} \\ \frac{313\mu}{315} & \frac{4201\mu}{8505} - 1 & \frac{157\mu}{17010} \\ \frac{81\mu}{70} & \frac{921\mu}{1120} & \frac{6501\mu}{17920} - 1 \end{pmatrix}.$$

Далее по сформированным матрицам  $G$  и  $\tilde{G}$  строится область устойчивости для метода (5) с первыми производными правых частей расчетных и опорных точек. Из рис. 4 – 5 видно, что модификация метода, связанная с введением производных правых частей в опорных точках блока, обеспечивает смещение годографа в положительную полуплоскость, а, следовательно, построенные таким образом схемы могут быть использованы для решения жестких задач.

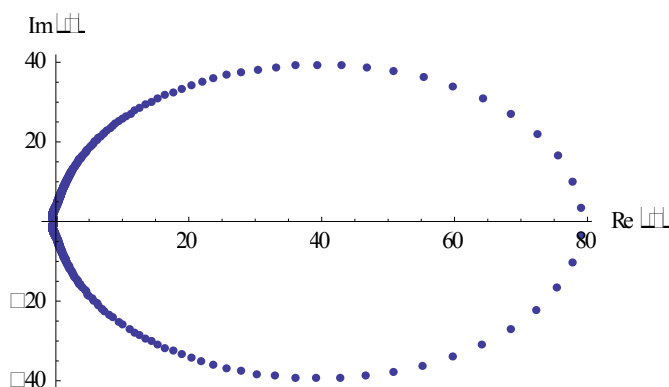


Рис. 4. Область устойчивости коллокационного блочного метода (5) с первыми производными в опорных и расчетных точках

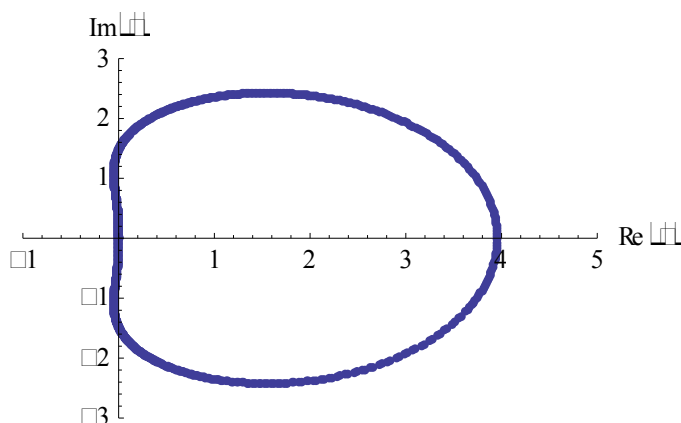


Рис. 5. Область устойчивости коллокационного блочного метода со вторыми производными в опорных и расчетных точках

### Заключение

Введение старших производных в расчетные схемы блочных многошаговых коллокационных методов, рассмотренных в работе, существенно расширяют класс разностных методов решения задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Проведенный анализ этих методов позволил получить оценки их устойчивости по Далквисту, сходи-

мости по правой части и оценки погрешности. Полученные результаты представляют возможности построения новых более эффективных параллельных алгоритмов и их реализации на современных мультипроцессорных вычислительных системах. Разработанные методы ориентированы на использование в параллельных вычислительных системах с улучшенными показателями ускорения и эффективности за счет одновременного вычисления новых значений во

всех точках блока. Потенциальное ускорение при этом соответствует количеству расчетных точек  $s$ . Проведенные численные эксперименты, связанные с решением одношаговыми и многошаговыми блочными методами тестовых жестких систем подтвердили их надежность и эффективность.

### Список литературы

1. Воеводин В.В. Параллельные вычисления. [Текст] / В.В. Воеводин, Вл.В. Воеводин. – СПб.: BHV-Санкт-Петербург, 2002. – 608 с. – ISBN 5-94157-160-7.
2. Фельдман, Л.П. Чисельні методи в інформації. [Текст] / Л.П. Фельдман, А.І. Петренко, О.А. Дмитрієва. – К.: Видавнича група BHV. – 2006. – 480 с.
3. Dmitrieva O. Parallel Step Control. Development of parallel algorithms of the step variation for simulation of stiff dynamic systems [Text] / O. Dmitrieva, L. Feldman. – Lambert Academic Publishing, 2013. – 72 p.
4. Дмитрієва, О.А. Паралельні різниці методи розв'язання задачі Коші [Текст] / О.А. Дмитрієва. – Донецьк: ДонНТУ. – 2011. – 265 с.
5. Алышин, А.Б. Численное решение сверхжестких дифференциально-алгебраических систем [Текст] / А.Б. Алышин, Е.А. Алышина, Н.Н. Калиткин, А.Б. Корягина // Доклады академии наук. – 2006. – Т.408, № 4. – С. 1–5.
6. Куликов, Г.Ю. Об одношаговых коллокационных методах со старшими производными для решения обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст] / Г.Ю. Куликов, А. И. Меркулов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2004. – Т. 44, № 10. – С. 1782-1807.
7. Куликов, Г.Ю. Об автоматическом управлении длиной шага и порядком в одношаговых коллокационных методах со старшими производными. [Текст] / Г.Ю. Куликов, Е.Ю. Хрусталёва // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2010. – Т. 50, № 6. – С. 1060-1077.
8. Аульченко, С.М. Метод численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием интерполяционных полиномов Эрмита. [Текст] / С.М. Аульченко, А.Ф. Латыпов, Ю.В. Никуличев //

Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1998. – Т. 38, № 10. – С. 1665 – 1670.

9. Латыпов, А.Ф. Численный метод решения задачи Коши для жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений на основе многосвязных интерполяционных полиномов Эрмита. [Текст] / А.Ф. Латыпов, О.В. Попик // Вычислительные технологии. – 2011. – Т. 16, № 2. – С. 78-85.
10. Фельдман, Л.П., Разработка обобщенных коллокационных блочных методов [Текст] / Л.П. Фельдман, О.А. Дмитриева // Сборник трудов конференции «МОДЕЛИРОВАНИЕ – 2012», 16-18 мая 2012. – К.: Институт проблем моделирования в энергетике, 2012. – С.434-437.
11. Dmitrieva, O. Parallel Algorithms of Simulation. Increase of simulation of dynamic objects with the lumped parameters into parallel computer systems [Text] / O. Dmitrieva, A. Firsova - Lambert Academic Publishing. – 2012. – 192 p.
12. Дмитриева, О.А. Высокоэффективные алгоритмы управления шагом на основе параллельных коллокационных блочных методов [Текст] / О.А. Дмитриева // Искусственный интеллект. – 2012. – № 4. – С. 77 – 88.
13. Дмитриева О.А. Повышение порядка аппроксимации параллельных блочных одношаговых разностных схем решения задачи Коши / О.А. Дмитриева // Наукові праці Донецького національного технічного університету. Серія «Обчислювальна техніка і автоматизація». – 2013. – № 24 (202). – С. 104 – 112.
14. Дмитриева О.А. Разработка многошаговых параллельных коллокационных блочных методов с использованием интерполяционных полиномов Эрмита [Текст] / О.А. Дмитриева // Радиоэлектронні і комп'ютерні системи. – 2013. – № 5 (64) – С. 243-249. – ISSN 1814-4225
15. Хайрер, Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие задачи [Текст] / Э. Хайрер, Г. Ваннер – М.: Мир, 1999. – 685 с.

Поступила в редколлегию 11.07.2013

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Л.П. Фельдман, Донецкий национальный технический университет, Донецк.

### ПРО МОДИФІКАЦІЮ БАГАТОКРОКОВИХ КОЛОКАЦІЙНИХ БЛОКОВИХ МЕТОДІВ ПРИ ПАРАЛЕЛЬНОМУ МОДЕЛЮВАННІ ДИНАМІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

О.А. Дмитриева

Робота присвячена питанням чисельної реалізації задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь і їхніх систем у паралельних комп'ютерних середовищах. Модифіковано блокові колокаційні методи, які дозволяють знаходити розв'язки одночасно у всіх розрахункових точках блоку, що забезпечує скорочення часу одержання рішення. З метою вирівнювання порядку апроксимації у всіх розрахункових точках блоку в різниці схемі введено додаткові похідні вищих порядків для опорних і розрахункових точок блоку. Для розроблених методів визначено умови стійкості, порядки точності і доведена збіжність за початковим даними й по правій частині. Показано, що порядок апроксимації введених методів значно перевищує класичні варіанти й однаковий у всіх розрахункових точках блоку.

**Ключові слова:** задача Коші, точки колокації, паралельний метод, старші похідні, стійкість.

### ON MODIFICATION OF MULTISTEP COLLOCATION BLOCK METHODS WITH PARALLEL SIMULATION OF DYNAMIC OBJECTS

O.A. Dmitrieva

The paper concerns itself with the numerical realization of the Cauchy problem for ordinary differential equations and their systems in parallel computer systems. The block collocation methods are developed that allow us to find a solution simultaneously in all the calculating points of the block, which reduces the time of obtaining the solution even for the sequential implementation. In order to align the order of approximation in all the calculating points of the block the additional higher-order derivatives are introduced into the difference schemes. The conditions of stability, the order of accuracy and the convergence of the initial data and of the right-hand side are determined for the developed methods. It is shown that the order of approximation of the introduced methods is much higher than that of classical models, and the same in all calculating points of the block.

**Keywords:** the Cauchy problem, the collocation points, a parallel method, higher derivatives, stability, convergence.