УДК 519.217.4 + 519.633.2

К.А. Рыбаков

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва

РЕШЕНИЕ РОБАСТНОГО УРАВНЕНИЯ ДУНКАНА–МОРТЕНСЕНА–ЗАКАИ СПЕКТРАЛЬНЫМ МЕТОДОМ

В статье рассматривается решение задачи оптимальной фильтрации сигналов в стохастических дифференциальных системах. Для приближенного нахождения апостериорной плотности вероятности вектора состояния объекта наблюдения применяется спектральный метод, в основе метода лежит представление решения робастного уравнения Дункана–Мортенсена–Закаи в виде ряда по функциям некоторой полной ортонормированной системы. Спектральный метод упрощает процесс решения задачи, он удобен для применения современных вычислительных систем.

Ключевые слова: *апостериорная плотность вероятности, оптимальная фильтрация, стохастическая система, спектральный метод, уравнение Дункана–Мортенсена–Закаи.*

Введение

Оценивание текущего состояния динамической системы в условиях помех по результатам измерений в соответствии с заданным критерием – оптимальная фильтрация – возникает во многих задачах радиотехники, навигации и управления, при обработке информации [1, 2]. Достаточно полный обзор методов, которые могут применяться в задаче оптимальной фильтрации, содержится в [3]. Более краткий – в работе автора [4]. В этой работе для решения задачи оптимальной фильтрации предлагается спектральный метод (спектральная форма математического описания), основанный на ортогональном разложении функций [5].

Представление решения задачи (в том числе и задачи оптимальной фильтрации [6, 7]) в виде ортогонального ряда довольно часто используется при построении приближенно-аналитических методов. Но, как правило, для этого выбирается конкретная система ортогональных или ортонормированных функций и выводятся явные или неявные соотношения для нахождения коэффициентов ряда. При таком подходе, конечно же, используются свойства выбранных ортогональных функций (например, рекуррентные соотношения, связывающие эти функции; формулы, устанавливающие связи функций и их производных и т.п.). Основное отличие предлагаемого метода состоит в использовании произвольной ортонормированной системы, при этом соотношения для определения коэффициентов ряда представляются матричными уравнениями, для которых можно получить формулы точного решения или сформировать методику приближенного решения. Свойства выбранных ортонормированных функций также используются, но несколько иначе, а именно от этих свойств зависит структура матриц, которые ставятся в соответствие линейным операторам (операторам умножения, дифференцирования, интегрирования и др.), определяющим исходную задачу. Выбор той или иной системы ортонормированных функций может привести к тому, что соответствующая матрица будет, например, треугольной, ленточной, симметрической или кососимметрической. Для многих базисных систем и перечисленных выше линейных операторов такие матрицы известны, что снижает вычислительную сложность алгоритмов, построенных на основе спектральной формы математического описания.

Задача оптимальной фильтрации

Будем рассматривать модель системы наблюдения, описываемую стохастическими дифференциальными уравнениями Ито [8]:

$$\begin{gathered} dX(t) = f(X(t))dt + \sigma(X(t))dW(t),\ X(t_0) = X_0, \\ dY(t) = c(X(t))dt + dV(t),\ Y(t_0) = Y_0 = 0, \end{gathered} \tag{1}$$

где $X \in R^n$ – вектор состояния, $Y \in R^m$ – вектор измерений; $t \in T = [t_0, t_1]$ – отрезок времени функционирования; $f(x)$ – вектор-функция $n \times 1$, $\sigma(x)$ – матричная функция $n \times s$, $c(x)$ – вектор-функция $m \times 1$; $W(t)$ и $V(t)$ – s-мерный и m-мерный стандартные винеровские процессы. Процессы $W(t)$, $V(t)$ и начальное состояние X_0, заданное плотностью вероятности $\varphi_0(x)$, независимы.

Задача оптимальной фильтрации состоит в нахождении оценки $\hat{X}(t)$ по результатам измерений $Y_0^t = \{Y(\tau), \tau \in [t_0, t)\}$, т.е. $\hat{X}(t) = \psi(t, Y_0^t)$, где $\psi(t, Y_0^t)$ – функция, обеспечивающая в каждый момент времени t выполнение условия

$$M[(X(t) - \hat{X}(t))^{\mathrm{T}} (X(t) - \hat{X}(t))] \to \min_{\psi(t,\cdot)},$$

M – знак математического ожидания.

Решение этой задачи определяется соотношением [8]

$$\psi(t, Y_0^t) = M[X(t) \mid Y_0^t] = \int_{R^n} x p(t, x \mid Y_0^t) dx,$$

в котором $p(t, x \mid Y_0^t)$ – апостериорная плотность вероятности вектора состояния X.

Уравнения для апостериорной плотности вероятности

Для нахождения апостериорной плотности вероятности могут использоваться различные уравнения. Уравнение Стратоновича–Кушнера [8] непосредственно описывает эволюцию $p(t, x \mid Y_0^t)$, но его решение слишком трудоемко из-за нелинейности уравнения. Уравнению Дункана–Мортенсена–Закаи [8, 9] удовлетворяет ненормированная апостериорная плотность вероятности $\varphi(t, x \mid Y_0^t)$:

$$\frac{\partial \varphi(t, x \mid Y_0^t)}{\partial t} = \mathcal{L}\varphi(t, x \mid Y_0^t) + \sum_{\alpha=1}^{m} c_\alpha(x) \frac{dY_\alpha(t)}{dt} \varphi(t, x \mid Y_0^t), \quad \varphi(t_0, x) = \varphi_0(x), \tag{2}$$

где

$$\mathcal{L}\varphi(t, x \mid Y_0^t) = \mathcal{A}\varphi(t, x \mid Y_0^t) - \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{m} c_\alpha^2(x) \varphi(t, x \mid Y_0^t),$$

$$\mathcal{A}\varphi(t, x \mid Y_0^t) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}[f_i(x)\varphi(t, x \mid Y_0^t)] + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}[g_{ij}(x)\varphi(t, x \mid Y_0^t)],$$

$$g_{ij}(x) = \sum_{k=1}^{s} \sigma_{ik}(x)\sigma_{jk}(x), \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Оно является стохастическим дифференциальным уравнением в частных производных, его можно записывать в формах Ито или Стратоновича. Уравнение (2) понимается в форме Стратоновича. Существенное преимущество этого уравнения – линейность, но его решение осложняет наличие процесса типа белого шума в последних слагаемых (при фиксированных измерениях – наличие одной из траекторий этого процесса). С помощью замены

$$\rho(t, x \mid Y_0^t) = \exp\left\{-\sum_{\alpha=1}^{m} c_\alpha(x) Y_\alpha(t)\right\} \varphi(t, x \mid Y_0^t) \tag{3}$$

от ненормированной апостериорной плотности вероятности $\varphi(t, x \mid Y_0^t)$ можно перейти к другой характеристике $\rho(t, x \mid Y_0^t)$, которая удовлетворяет робастному уравнению Дункана–Мортенсена–Закаи [9], последнее не содержит процессов типа белого шума (или их траекторий, если измерения зафиксированы):

$$\frac{\partial \rho(t, x \mid Y_0^t)}{\partial t} = \mathcal{L}\rho(t, x \mid Y_0^t) - \sum_{\alpha=1}^{m} Y_\alpha(t)\mathcal{L}_\alpha \rho(t, x \mid Y_0^t) + \sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{m} Y_\alpha(t) Y_\beta(t) \mathcal{L}_{\alpha\beta} \rho(t, x \mid Y_0^t). \tag{4}$$

Здесь $\mathcal{L}_\alpha = [\mathcal{C}_\alpha, \mathcal{L}]$, $\mathcal{L}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}[\mathcal{C}_\alpha, \mathcal{L}_\beta] = \frac{1}{2}[\mathcal{C}_\alpha, [\mathcal{C}_\beta, \mathcal{L}]]$, $[\mathcal{C}_\alpha, \mathcal{L}]$ и $[\mathcal{C}_\alpha, \mathcal{L}_\beta]$ – коммутаторы операторов ($[\cdot, \cdot]$ – скобки Ли), $\mathcal{C}_\alpha$ – операторы умножения на функции $c_\alpha(x)$, $\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m$. Начальное условие для этого уравнения $\rho(t_0, x) = \varphi_0(x)$, что следует из формулы замены ненормированной апостериорной плотности вероятности (3) при $t = t_0$ с учетом начального условия $Y(t_0) = 0$.

Принимая во внимание, что два оператора умножения на скалярные функции являются коммутирующими, получаем $\mathcal{L}_\alpha = [\mathcal{C}_\alpha, \mathcal{A}] = \mathcal{C}_\alpha \circ \mathcal{A} - \mathcal{A} \circ \mathcal{C}_\alpha$, где $\mathcal{C}_\alpha \circ \mathcal{A}$ и $\mathcal{A} \circ \mathcal{C}_\alpha$ – композиции линейных операторов, тогда $\mathcal{L}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}[\mathcal{C}_\alpha, [\mathcal{C}_\beta, \mathcal{A}]]$.

Робастное уравнение Дункана–Мортенсена–Закаи удобно для приближенно-аналитического или численного решения, однако таких методов предложено не так много [7, 10].

Переход от функции $\rho(t, x \mid Y_0^t)$ к апостериорной плотности вероятности $p(t, x \mid Y_0^t)$ вектора состояния X осуществляется при помощи обратной замены и нормировки:

$$\varphi(t, x \mid Y_0^t) = \exp\left\{\sum_{\alpha=1}^{m} c_\alpha(x) Y_\alpha(t)\right\} \rho(t, x \mid Y_0^t),$$
$$p(t, x \mid Y_0^t) = \frac{\varphi(t, x \mid Y_0^t)}{\int_{R^n} \varphi(t, x \mid Y_0^t) dx}. \tag{5}$$

Спектральный метод решения робастного уравнения Дункана–Мортенсена–Закаи

Предлагается решать приведенное выше робастное уравнение Дункана–Мортенсена–Закаи с применением спектральной формы математического описания. В статье нет возможности привести все определения, свойства и утверждения, которые использовались для получения спектрального аналога этого уравнения, поэтому сформулируем лишь базовые определения. Спектральной характеристикой некоторой квадратично интегрируемой функции называется упорядоченная совокупность коэффициентов разложения этой функции относительно полной ортонормированной системы (базисной системы). Спектральная характеристика функции обычно представляется бесконечной матрицей-столбцом. Коэффициенты разложения (элементы матрицыстолбца) упорядочены в соответствии с порядком следования базисных функций. Спектральная характеристика линейного оператора, заданного на пространстве квадратично интегрируемых функций, – это совокупность спектральных характеристик образов базисных функций при применении этого оператора. Она представляется бесконечной матрицей (спектральные характеристики образов базисных функций – столбцы этой матрицы). Размерность матриц-столбцов (спектральных характеристик функций) и матриц (спектральных характеристик линейных операторов) определяется количеством индексов, с помощью которых нумеруются базисные функции. Например, если число индексов n, а такие базисные функции используются для представления функций вектора состояния $X \in R^n$, то эти размерности соответственно равны n и $2n$. Для представления функций времени и вектора состояния базисные функции, как правило, задают $n+1$ индексом, тогда размерности спектральных характеристик функций и спектральных характеристик линейных операторов будут равны $n+1$ и $2(n+1)$ соответственно. Более подробно о представлении спектральных характеристик многомерными матрицами и их свойствах можно ознакомиться в [11, 12].

Определим базисные системы и получим спектральный аналог робастного уравнения Дункана–Мортенсена–Закаи в предположении, что отрезок времени T и измерения Y_0^t зафиксированы $(t=t_1)$. Пусть $\mathbb{E} = \{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$ – ортонормированный базис пространства $L_2(T \times R^n)$, причем функции $e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)$ порождаются всевозможными произведениями функций, образующих ортонормированные базисы $\mathbb{Q} = \{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ и $\mathbb{P} = \{p(i_1,\ldots,i_n,x)\}_{i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$ пространств $L_2(T)$ и $L_2(R^n)$ соответственно, т.е.

$$e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x) = q(i_0,t)\cdot p(i_1,\ldots,i_n,x),\quad i_0,i_1,\ldots,i_n = 0,1,2,\ldots$$

Введем следующие обозначения: $A(n,n)$ – спектральная характеристика оператора $\mathcal{A}$, $C_\alpha(n,n)$ – спектральные характеристики операторов $\mathcal{C}_\alpha$, $\alpha = 1,2,\ldots,m$. Эти спектральные характеристики определены относительно базиса $\mathbb{P}$.

Спектральная характеристика $L(n,n)$ оператора $\mathcal{L}$, определенная относительно той же базисной системы, выражается через спектральные характеристики $A(n,n)$ и $C_\alpha(n,n)$:

$$L(n,n) = A(n,n) - \tfrac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{m} C_\alpha^2(n,n),$$

что следует из свойств спектральных характеристик линейных операторов. В свою очередь спектральную характеристику $A(n,n)$ можно выразить с помощью спектральных характеристик операторов дифференцирования первого и второго порядков, а также операторов умножения на функции $f_i(x)$ и $g_{ij}(x)$, $i,j = 1,2,\ldots,n$ (см. [11, 12]).

Далее выразим спектральную характеристику $L_\alpha(n,n)$ линейного оператора $\mathcal{L}_\alpha$ ($\mathbb{S}$ – спектральное преобразование):

$$\mathbb{S}[\mathcal{L}_\alpha] = \mathbb{S}[[\mathcal{C}_\alpha,\mathcal{A}]] = \mathbb{S}[\mathcal{C}_\alpha \circ \mathcal{A} - \mathcal{A}\circ\mathcal{C}_\alpha] = \mathbb{S}[\mathcal{C}_\alpha]\cdot\mathbb{S}[\mathcal{A}] - \mathbb{S}[\mathcal{A}]\cdot\mathbb{S}[\mathcal{C}_\alpha],$$

или

$$L_\alpha(n,n) = C_\alpha(n,n)\cdot A(n,n) - A(n,n)\cdot C_\alpha(n,n) = [C_\alpha(n,n), A(n,n)],$$

где $[C_\alpha(n,n), A(n,n)]$ будем называть коммутатором спектральных характеристик линейных операторов, заданных на пространстве функций вектора состояния. Следовательно, спектральная характеристика $L_{\alpha\beta}(n,n)$ линейного оператора $\mathcal{L}_{\alpha\beta}$ выражается формулой

$$L_{\alpha\beta}(n,n) = \tfrac{1}{2}[C_\alpha(n,n),[C_\beta(n,n),A(n,n)]].$$

Нетрудно показать, что для произвольных спектральных характеристик $A(n,n)$, $B(n,n)$, $C(n,n)$ и $\gamma \in R$ верны перечисленные ниже свойства для коммутаторов.

1. Билинейность:

$$[A(n,n)+B(n,n),C(n,n)] = [A(n,n),C(n,n)] + [B(n,n),C(n,n)],\quad [A(n,n),B(n,n)+C(n,n)] = [A(n,n),B(n,n)] + [A(n,n),C(n,n)],$$
$$[\gamma A(n,n),B(n,n)] = \gamma[A(n,n),B(n,n)],$$
$$[A(n,n),\gamma B(n,n)] = \gamma[A(n,n),B(n,n)].$$

2. Антикоммутативность:

$$[A(n,n),B(n,n)] = -[B(n,n),A(n,n)],$$

или $[A(n,n),A(n,n)] = \mathcal{O}(n,n)$.

3. Тождество Якоби:

$$[A(n,n),[B(n,n),C(n,n)]] + [B(n,n),[C(n,n),A(n,n)]] + [C(n,n),[A(n,n),B(n,n)]] = \mathcal{O}(n,n).$$

В последних двух соотношениях $\mathcal{O}(n,n)$ – нулевая $2n$-мерная матрица, соответствующая нулевому оператору.

Заметим, что если $A(n,n)$ – спектральная характеристика относительно базиса $\mathbb{P}$ для некоторого линейного оператора $\mathcal{A}$, который задан на пространстве функций вектора состояния (здесь $\mathcal{A}$ не обязательно прямой производящий оператор диффузионного процесса $X(t)$, определенный выше), то спектральная характеристика $E(1,1)\otimes A(n,n)$ относительно базисной системы $\mathbb{E}$ соответствует этому же оператору, применяемому к функциям времени и вектора состояния (время – параметр). Если же $Y(1,1)$ – спектральная характеристика некоторого линейного оператора $\mathcal{Y}$ относительно базиса $\mathbb{Q}$, заданного на пространстве функций времени, то спектральная характеристика $Y(1,1)\otimes E(n,n)$ соответствует этому же оператору, но применяемому к функциям времени и вектора состояния (вектор состояния – параметр). Здесь $E(1,1)$ и $E(n,n)$ – единичные матрицы размерности 2 и $2n$, соответствующие тождественным операторам на пространствах функций времени и функций вектора состояния. Если на пространстве функций времени и вектора состояния задан оператор, который представляется в виде композиции $\mathcal{Y}\circ\mathcal{A}$, то его спектральная характеристика выражается формулой $Y(1,1)\otimes A(n,n)$.

Применим спектральное преобразование к левой и правой частям уравнения (4). Учитывая линейность спектрального преобразования, получаем

$$\mathbb{S}\left[\left.\frac{\partial\rho(t,x\,|\,Y_0^t)}{\partial t}\right|_{\rho(t_0,x)=\varphi_0(x)}\right]=\mathbb{S}\left[\mathcal{L}\rho(t,x\,|\,Y_0^t)\right]-$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{m}\mathbb{S}\left[Y_\alpha(t)\mathcal{L}_\alpha\rho(t,x\,|\,Y_0^t)\right]+$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{m}\mathbb{S}\left[Y_\alpha(t)Y_\beta(t)\mathcal{L}_{\alpha\beta}\rho(t,x\,|\,Y_0^t)\right].$$

Прежде чем перейти далее, обозначим через $P(1,1)$ спектральную характеристику оператора дифференцирования с учетом значения функции в начальный момент времени, определенную относительно базиса $\mathbb{Q}$; $q(1,0;t_0)$ – матрица-столбец значений функций системы $\mathbb{Q}$ при $t=t_0$:

$$q(1,0;t_0)=\left[q(0,t_0)\ q(1,t_0)\ q(2,t_0)\ \ldots\right]^{\mathrm{T}};$$

$\Phi_0(n,0)$ – спектральная характеристика плотности вероятности $\varphi_0(x)$ начального состояния X_0, определенная относительно базиса $\mathbb{P}$; $Y_\alpha(1,1)$ – спектральные характеристики операторов умножения на функции $Y_\alpha(t)$, определенные относительно базиса $\mathbb{Q}$, $\alpha=1,2,\ldots,m$; $R(n+1,0)$ – спектральная характеристика функции $\rho(t,x\,|\,Y_0^t)$, определенная относительно базисной системы $\mathbb{E}$.

С учетом введенных обозначений запишем спектральный аналог робастного уравнения Дункана–Мортенсена–Закаи (уравнение относительно неизвестной спектральной характеристики $R(n+1,0)$):

$$\left(P(1,1)\otimes E(n,n)\right)\cdot R(n+1,0)-q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0(n,0)=$$

$$=\left(E(1,1)\otimes L(n,n)\right)\cdot R(n+1,0)-$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{m}\left(Y_\alpha(1,1)\otimes L_\alpha(n,n)\right)\cdot R(n+1,0)+$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{m}\left(\left(Y_\alpha(1,1)\cdot Y_\beta(1,1)\right)\otimes L_{\alpha\beta}(n,n)\right)\cdot R(n+1,0).$$

Сгруппируем все слагаемые с множителем $R(n+1,0)$ в левой части равенства, а тензорное произведение $q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0(n,0)$ перенесем вправо:

$$\left(P(1,1)\otimes E(n,n)-E(1,1)\otimes L(n,n)+\right.$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{m}Y_\alpha(1,1)\otimes L_\alpha(n,n)-$$

$$\left.-\sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{m}\left(Y_\alpha(1,1)\cdot Y_\beta(1,1)\right)\otimes L_{\alpha\beta}(n,n)\right)\cdot R(n+1,0)=$$

$$=q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0(n,0),$$

тогда

$$R(n+1,0)=\left(P(1,1)\otimes E(n,n)-E(1,1)\otimes L(n,n)+\right.$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{m}Y_\alpha(1,1)\otimes L_\alpha(n,n)-$$

$$\left.-\sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{m}\left(Y_\alpha(1,1)\cdot Y_\beta(1,1)\right)\otimes L_{\alpha\beta}(n,n)\right)^{-1}\times$$

$$\times\left(q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0(n,0)\right)$$

и, следовательно,

$$\rho(t,x\,|\,Y_0^t)=\sum_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}r_{i_0i_1\ldots i_n}\cdot e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x),\qquad(6)$$

$$(t,x)\in T\times R^n,$$

где $r_{i_0i_1\ldots i_n}$ – элементы спектральной характеристики $R(n+1,0)$, т.е. коэффициенты разложения функции $\rho(t,x\,|\,Y_0^t)$ в ряд по функциям базисной системы $\mathbb{E}$.

Найти точное значение всех коэффициентов разложения $r_{i_0i_1\ldots i_n}$ вряд ли возможно за исключением, может быть, каких-либо специально подобранных примеров. Поэтому имеет смысл рассматривать приближенное решение в виде частичной суммы ряда (6). В этом случае индексы $i_0,i_1,\ldots,i_n$ принимают лишь конечное число значений, а все введенные ранее спектральные характеристики будут конечными матрицами.

Базисные системы для представления функций времени и вектора состояния могут формироваться с помощью как хорошо известных ортонормированных систем [11–13], так и новых [14]. Аналогичный метод решения можно применить и для неавтономных стохастических систем (при явной зависимости функций $f(\cdot)$, $\sigma(\cdot)$ и $c(\cdot)$ от времени). После определения функции $\rho(t,x\,|\,Y_0^t)$, используя (5), можно получить апостериорную плотность вероятности $p(t,x\,|\,Y_0^t)$ и найти оптимальную оценку $\hat{X}(t)$.

Выводы

В настоящее время при решении задач анализа непрерывных систем управления спектральным методом, как правило, для представления функций времени используются базисные системы, заданные на стационарном отрезке [11], хотя первоначально спектральный метод анализа применялся с использованием базисных систем, заданных на нестационарном отрезке [5, 13]. В задачах синтеза оптимального управления, если промежуток времени функционирования задан, базисные системы следует задавать на стационарном отрезке времени из-за необходимости учета краевых условий (такие задачи рассмотрены в [12]). В рассматриваемой задаче оптимальной фильтрации при выводе спектрального аналога робастного уравнения Дункана–Мортенсена–Закаи предполагалось, что отрезок времени функционирования зафиксирован вместе с измерениями Y_0^t, однако можно воспользоваться и базисными системами, заданными на нестационарном отрезке времени, что позволит решать задачу оценивания текущего состояния объекта наблюдения в темпе с поступлением измерений.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-08-00323-а).

Список литературы

1. *Марковская теория оценивания в радиотехнике / Под ред. М.С. Ярлыкова. – М.: Радиотехника, 2004.*

2. *Ориентация и навигация подвижных объектов: современные информационные технологии / Под ред. Б.С. Алешина, К.К. Веремеенко и А.И. Черноморского. – М.: Физматлит, 2006.*

3. *Chen Z. Bayesian Filtering: From Kalman Filters to Particle Filters, and Beyond / Z. Chen // Tech. Report: Adaptive Syst. Lab., McMaster University, Hamilton, ON, Canada, 2003.*

4. *Рыбаков К.А. Сведение задачи нелинейной фильтрации к задаче анализа стохастических систем с обрывами и ветвлениями траекторий / К.А. Рыбаков // Дифференциальные уравнения и процессы управления. – 2012. – № 3. – С. 91–110.*

5. *Солодовников В.В. Спектральная теория нестационарных систем управления / В.В. Солодовников, В.В. Семенов. – М.: Наука, 1974.*

6. *Lototsky S. Nonlinear Filtering Revisited: A Spectral Approach / S. Lototsky, R. Mikulevicius, B.L. Rozovskii // SIAM Journal on Control and Optimization. – 1997. – V. 35. No. 2. – P. 435 – 461.*

7. *Luo X. Hermite Spectral Method to 1D Forward Kolmogorov Equation and its Application to Nonlinear Filtering Problems [Electronic resorce] / X. Luo, S.S.-T. Yau/ – Attached to: arXiv:1301.1403 [math.OC].*

8. *Пантелеев А.В. Нелинейные системы управления: описание, анализ и синтез / А.В. Пантелеев, Е.А. Руденко, А.С. Бортаковский. – М.: Вузовская книга, 2008.*

9. *Hazewinkel M. Lectures on Linear and Nonlinear Filtering / M. Hazewinkel // Analysis and Estimation of Stochastic Mechanical Systems (ed. by W.O. Schiehlen, W. Wedig). – Springer-Verlag, 1988. – P. 103–136.*

10. *Yau S.S.-T. New Algorithms in Real Time Solution of the Nonlinear Filtering Problem // Communications in Information and Systems. – 2008. – V. 8. No. 3. – P. 303–332.*

11. *Пантелеев А.В. Прикладной вероятностный анализ нелинейных систем управления спектральным методом / А.В. Пантелеев, К.А. Рыбаков. – М.: МАИ-ПРИНТ, 2010.*

12. *Пантелеев А.В. Методы и алгоритмы синтеза оптимальных стохастических систем управления при неполной информации / А.В. Пантелеев, К.А. Рыбаков. – М.: МАИ, 2012.*

13. *Рыбин В.В. Моделирование нестационарных непрерывно-дискретных систем управления спектральным методом в системах компьютерной математики / В.В. Рыбин. – М.: МАИ, 2011.*

14. *Рыбаков К.А. Многопараметрические ортонормированные системы функций для решения задач в спектральной форме математического описания / К.А. Рыбаков // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. Межд. конф., Воронеж, 26–28 ноября 2012 г.: Сб. тр. конф. Ч. 1. – Воронеж: Изд.-полиграф. центр ВГУ, 2012. – С. 327–331.*

Поступила в редколлегию 21.07.2013

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. М.М. Хрусталёв, Московский авиационный институт, Москва.

РІШЕННЯ РОБАСТНОГО РІВНЯННЯ ДУНКАНА–МОРТЕНСЕНА–ЗАКАИ СПЕКТРАЛЬНИМ МЕТОДОМ

К.О. Рибаков

У статті розглядається рішення задачі оптимальної фільтрації сигналів в стохастичних диференціальних системах. Для наближеного знаходження апостеріорної щільності ймовірності вектора стану об'єкта спостереження застосовується спектральний метод, в основі методу лежить уявлення рішення робастного рівняння Дункана-Мортенсена-Закаи у вигляді ряду за функціями деякої повної ортонормованій системи. Спектральний метод спрощує процес вирішення завдання, він зручний для застосування сучасних обчислювальних систем.

Ключові слова: *апостеріорна щільність ймовірності, оптимальна фільтрація, стохастична система, рівняння Дункана-Мортенсена-Закаи, спектральний метод.*

SOLVING ROBUST DUNCAN–MORTENSEN–ZAKAI EQUATION BY SPECTRAL METHOD

K.A. Rybakov

In this paper it is considered the solution of optimal filtering problem for stochastic differential systems. The spectral method is used for the approximate finding of conditional probability density for the system state. This method is based on representation of the solution for robust Duncan–Mortensen–Zakai equation as the orthogonal series. This approach simplifies the process of solving the problem, making it convenient for the use of computers.

Keywords: *conditional density, Duncan–Mortensen–Zakai equation, optimal filtering problem, spectral method, stochastic system.*