УДК 519.237

О.В. Серая

Национальный технический университет «ХПИ», Харьков

РАЦИОНАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЕСУРСА ПРИ МНОГОНОМЕНКЛАТУРНОМ ПРОИЗВОДСТВЕ ПО ВЕРОЯТНОСТНОМУ КРИТЕРИЮ

В работе рассмотрена задача рационального распределения одномерного ресурса при многономенклатурном производстве, когда прибыль от реализации изготавливаемой продукции – случайная величина. Задача решена с использованием критерия – вероятность превышения случайной суммарной прибылью заданного порога. Для оптимизации получаемой при этом дробно-нелинейной целевой функции предложена специальная вычислительная процедура.

***Ключевые слова**: рациональное распределение ресурса, вероятностный критерий, дробно-нелинейный функционал.*

Введение

Задача рационального распределения одномерного ресурса при многономенклатурном производстве одна из традиционных практических задач [1 – 4].

В случаях, когда прибыль, получаемая при использовании ресурса, является линейной функцией его объема, задача формулируется таким образом.

Введем

x_j - величина ресурса, вкладываемого в производство j-го продукта, $j = 1,2,...,n$;

c_j - величина прибыли, получаемой при реализации единицы j-го продукта, $j = 1,2,...,n$;

d_j - расход ресурса на изготовление единицы j-го продукта, $j = 1,2,...,n$;

D_0 - общий объем распределяемого ресурса.

Тогда математическая модель задачи имеет вид: найти набор $X = \{x_j\}$, $j = 1,2,...,n$, максимизирующий линейную форму

$$L(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1}$$

и удовлетворяющий ограничениям

$$\sum_{j=1}^{n} d_j x_j = D_0, \tag{2}$$

$x_j \ge 0$, $j = 1,2,...,n$.

Эта задача линейного программирования [5] имеет очевидное тривиальное решение. Введем новую переменную $y_j = d_j x_j$, $j = 1,2,...,n$. тогда ограничения (2) упрощаются к виду

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = D_0,\ y_j \ge 0,\ j = 1,2,...,n, \tag{3}$$

а целевая функция (1) преобразуется следующим образом:

$$L(Y) = \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{d_j} y_j = \sum_{j=1}^{n} g_j y_j,\ g_j = \frac{c_j}{d_j}. \tag{4}$$

Понятно, что максимум (4) при ограничениях (3) достигается на наборе

$$y_j = \begin{cases} D_0, & j = j_0, \\ 0, & j = j_0, \end{cases}$$

где

$$j_0 = \arg\max\left\{\frac{c_j}{d_j}\right\}.$$

Отметим, что в современных условиях рыночной экономики приведенная модель задачи (1)-(2) не может быть признана реалистичной прежде всего потому, что величина прибыли, получаемой при реализации изготовленных продуктов, не является детерминированной. При этом естественно считать эту величину случайной. Пусть по результатам статистической обработки данных о реальных продажах для каждого продукта принята гипотеза о нормальном распределении прибыли, получаемой при реализации единицы этого продукта, то есть

$$\varphi_j(c_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j} \exp\left\{-\frac{(c_j - m_j)^2}{2\sigma_j^2}\right\},\ j = 1,2,...,n.$$

Здесь

m_j, σ_j^2 - математическое ожидание и дисперсия случайной величины прибыли от реализации единицы j-го продукта, $j = 1,2,...,n$.

Тогда суммарная случайная прибыль, получаемая от реализации набора $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ продуктов, будет равна

$$R(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j ,$$

а плотность распределения этой случайной величины будет иметь вид [6]

$$\varphi_\Sigma(R(X))=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\Sigma}\exp\left\{-\frac{(R-m_\Sigma)^2}{2\sigma_\Sigma^2}\right\}, \qquad (5)$$

где

$$m_\Sigma=\sum_{j=1}^{n} m_j x_j ,\ \sigma_\Sigma^2=\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2 x_j^2 . \qquad (6)$$

Теперь задача отыскания рационального ресурса может быть сформулирована так: найти набор $X=\{x_j\}$, максимизирующий среднюю прибыль $m_\Sigma(X)$, получаемую при реализации плана производства X, и удовлетворяющий ограничениям (2). Следует, однако, иметь в виду, что в условиях, когда дисперсии случайных величин прибыли от реализации производственных продуктов велики, решение, оптимальное в среднем, в каждой конкретной реализации продаж может оказаться неудовлетворительным. При этом гораздо больший интерес имеет решение, обеспечивающее максимум вероятности того, что численное значение случайной суммарной прибыли превысит некоторый выбранный допустимый порог.

Целью работы является разработка методики рационального распределения ограниченного одномерного ресурса при многономенклатурном производстве для случая, когда прибыль от реализации продукции – случайная величина с заданным законом распределения. При этом в качестве возможного критерия для оценки эффективности принимаемого решения предлагается вероятность того, что случайной значение прибыли превысит допустимый порог.

Постановка задачи

Введем пороговое значение прибыли R_0. Вероятность превышения этого порога случайным значением $R(X)$ суммарной прибыли с плотностью распределения (5) равна

$$P(R(X)\geq R_0)=\int_{R_0}^{\infty}\varphi_\Sigma(R(X))dR=$$

$$=\int_{R_0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\Sigma}\exp\left\{-\frac{(R-m_\Sigma)^2}{2\sigma_\Sigma^2}\right\}dR=$$

$$=\int_{\frac{R_0-m_\Sigma(X)}{\sigma_\Sigma(X)}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du. \qquad (7)$$

Поскольку максимизация вероятности (7) эквивалентна минимизации нижнего предела в соответствующем интеграле, то исходная задача преобразуется к следующей: найти набор, минимизирующий целевую функцию

$$F(X)=\frac{R_0-m(X)}{\sigma(X)}=\frac{R_0-\sum_{j=1}^{n}m_j x_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2 x_j^2}} \qquad (8)$$

и удовлетворяющий ограничениям (2). Преобразуем функцию (8):

$$F(X)=\frac{R_0-\sum_{j=1}^{n}m_j x_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2 x_j^2}}=\frac{\frac{\sum_{j=1}^{n}d_j x_j}{D_0}R_0-\sum_{j=1}^{n}m_j x_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2 x_j^2}}=$$

$$=\frac{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{d_j R_0}{D_0}-m_j\right)x_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2 x_j^2}}=\frac{\sum_{j=1}^{n}r_j x_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2 x_j^2}}, \qquad (9)$$

$$r_j=\frac{d_j R_0-m_j}{D_0},\ j=1,2,...,n .$$

Таким образом, задача сведена к минимизации дробно-нелинейной целевой функции (9) на множестве решений уравнения (2) с учетом неотрицательности переменных. Эта задача уже не является тривиальной.

Возможная высокая ее размерность не позволяет эффективно использовать при ее решении традиционные прямые методы оптимизации (в том числе и методы нулевого порядка). Поставим задачу разработки эффективного метода ее решения.

Основные результаты

Для решения задачи может быть использована следующая итерационная процедура. Критерий (9) в общем виде имеет вид:

$$F(X)=\frac{H(X)}{G(X)},\ G(X)>0 . \qquad (10)$$

Выберем некоторый удовлетворяющий ограничениям вектор $X^{(0)}$.

Поставим задачу отыскания другого удовлетворяющего ограничениям вектора $X^{(1)}$, для которого

$$F(X_1)<F\left(X^{(0)}\right).$$

Введем

$$\left(F(X_1)-F\left(X^{(0)}\right)\right)G\left(X^{(1)}\right)=$$

$$=\left(\frac{H\left(X^{(1)}\right)}{G\left(X^{(1)}\right)}-F\left(X^{(0)}\right)\right)G\left(X^{(1)}\right)= \quad (11)$$

$$=H\left(X^{(1)}\right)-\frac{H\left(X^{(0)}\right)}{G\left(X^{(0)}\right)}G\left(X^{(1)}\right).$$

Минимизируем (11) на множестве ограничений. Эта задача легче предыдущей, так как оптимизируемая функция (11) в отличие от (10) не является дробной. Пусть $X^{(1)}$ - решение задачи. Если при этом, с учетом положительности $G(X)$ на любом удовлетворяющем (2) наборе X ,

$$F\left(X^{(1)}\right)-F\left(X^{(0)}\right)<0, \quad (12)$$

то решение $X^{(1)}$ лучше, чем $X^{(0)}$ и может быть поставлена новая задача отыскания набора $X^{(2)} \neq X^{(1)}$, для которого имело бы место

$$F\left(X^{(2)}\right)<F\left(X^{(1)}\right).$$

Если же неравенство (12) не удовлетворяется, то план $X^{(0)}$ является оптимальным.

Таким образом, задача сведена к отысканию последовательности планов $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, …, для которых $F\left(X^{(k+1)}\right)-F\left(X^{(k)}\right)<0$. Решение заканчивается, когда на очередном шаге приведенное неравенство не выполняется.

Очевидный недостаток приведенной процедуры – не управляемая сходимость, которая в условиях высокой размерности задачи может оказаться неприемлемо плохой.

Рассмотрим другой метод минимизации (9) на множестве планов X , удовлетворяющих (2).

Введем

$$\frac{1}{z_0}=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2 x_j^2} \quad (13)$$

и набор переменных

$$z_j=z_0 x_j,\ j=1,2,...,n. \quad (14)$$

При этом целевая функция (9) преобразуется следующим образом:

$$F(X)=\frac{\sum_{j=1}^{n} r_j x_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2 x_j^2}}=z_0\sum_{j=1}^{n} r_j x_j=\sum_{j=1}^{n} r_j z_j. \quad (15)$$

Умножим левую и правую часть ограничения (2) на z_0.

При этом получим

$$z_0\sum_{j=1}^{n} d_j x_j=\sum_{j=1}^{n} d_j z_j=z_0 D_0. \quad (16)$$

Эту же операцию проделаем с соотношением (13). При этом получим

$$z_0\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2 x_j^2}=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2 z_0^2 x_j^2}=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2 z_j^2}=1. \quad (17)$$

Теперь задача (9), (2) трансформирована к следующей: найти набор $\{z_0,(z_j)\}$, $j=1,2,...,n$, минимизирующий линейную форму (15), удовлетворяющий ограничению (16) и, кроме того, дополнительному ограничению (17).

Для решения задачи предлагается следующая двухэтапная процедура. На первом этапе решим задачу отыскания набора $\{z_j\}$, $j=1,2,...,n$, минимизирующего (15) и удовлетворяющего ограничению (17). Затем на втором шаге определим параметр z_0 из условия (16).

Заменим ограничение (17) эквивалентным

$$\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2 z_j^2=1. \quad (18)$$

Задачу (15), (18) решим методом неопределенных множителей Лагранжа.

Введем функцию Лагранжа:

$$\Phi(Z)=\sum_{j=1}^{n} r_j z_j-\lambda\left(\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2 z_j^2-1\right).$$

Далее

$$\frac{\partial\Phi(Z)}{\partial z_j}=r_j-2\lambda\sigma_j^2 z_j=0,\ j=1,2,...,n.$$

Отсюда

$$z_j=\frac{1}{2\lambda}\frac{r_j}{\sigma_j^2},\ j=1,2,...,n. \quad (19)$$

Подставим (19) в (18) и найдем $\frac{1}{2\lambda}$.

Имеем

$$\frac{1}{4\lambda^2}\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2\frac{r_j^2}{\sigma_j^4}=\frac{1}{4\lambda^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{r_j^2}{\sigma_j^2}=1.$$

Отсюда

$$\frac{1}{4\lambda^2}=\frac{1}{\sum_{j=1}^{n}\frac{r_j^2}{\sigma_j^2}},\ \frac{1}{2\lambda}=\frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\frac{r_j^2}{\sigma_j^2}}}.$$

Тогда, с учетом (19), получим

$$z_j = \frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \frac{r_j^2}{\sigma_j^2}}} \cdot \frac{r_j}{\sigma_j^2} = \frac{\frac{R_0}{D_0} d_j - m_j}{\sigma_j^2 \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{R_0}{D_0} d_j - m_j \right)^2 \frac{1}{\sigma_j^2}}}, \quad (20)$$

$$j = 1,2,...,n .$$

Подставим полученный набор (20) в ограничение (16):

$$\sum_{j=1}^{n} d_j z_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{d_j \left(\frac{R_0}{D_0} d_j - m_j \right) \frac{1}{\sigma_j^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{R_0}{D_0} d_j - m_j \right)^2 \frac{1}{\sigma_j^2}}} = z_0 D_0 .$$

Отсюда

$$z_0 = \frac{1}{D_0} \frac{\sum_{j=1}^{n} d_j \left(\frac{R_0}{D_0} d_j - m_j \right) \frac{1}{\sigma_j^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{R_0}{D_0} d_j - m_j \right)^2 \frac{1}{\sigma_j^2}}} .$$

Наконец, с учетом (14), получим искомый набор X :

$$x_j = \frac{z_j}{z_0} =$$

$$= \frac{\left(\frac{R_0}{D_0} d_j - m_j \right) \frac{1}{\sigma_j^2} D_0 \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{R_0}{D_0} d_j - m_j \right)^2 \frac{1}{\sigma_j^2}}}{\left(\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{R_0}{D_0} d_j - m_j \right)^2 \frac{1}{\sigma_j^2}} \right) \left(\sum_{j=1}^{n} d_j \left(\frac{R_0}{D_0} d_j - m_j \right) \frac{1}{\sigma_j^2} \right)} =$$

$$= \frac{\left(\frac{R_0}{D_0} d_j - m_j \right) \frac{D_0}{\sigma_j^2}}{\sum_{j=1}^{n} d_j \left(\frac{R_0}{D_0} d_j - m_j \right) \frac{1}{\sigma_j^2}}, \quad j = 1,2,...,n .$$

Выводы

Таким образом, предложен метод решения задачи рационального распределения однородного ограниченного ресурса при многономенклатурном производстве для случая, когда прибыль от реализации изготавливаемого продукта есть случайная величина с известным законом распределения. Для решения получаемой при этом задачи математического программирования с дробно-нелинейной целевой функцией и линейным ограничением разработана двухэтапная вычислительная процедура, обеспечивающая получение искомого распределения ресурса в аналитической форме.

Список литературы

1. Гурин Л.С. Задачи и методы оптимального распределения ресурсов / Л.С. Гурин, Я.С. Дымарский, А.Д. Меркулов. – М.: Сов. радио, 1968. – 463 с.

2. Серая О.В. Экономико-математические модели задачи рационального распределения ресурса / О.В. Серая, Л.Г. Раскин, Д.А. Сагайдачный // Інформаційно-керуючі системи на залізничному транспорті. -№1. – Х., 2002. – С. 46 – 49.

3. Серая О.В. Рациональное покомпонентное распределение однородного ресурса в аддитивной сепарабельной целочисленной задаче / О.В. Серая, Л.Г. Раскин, В.П. Филипович // Вестник НТУ «ХПИ»: сб. науч. тр. Нац. техн. ун-та «ХПИ». - №6. – Х., 2002.– С. 110 – 114.

4. Серая О.В. Многомерные модели логистики в условиях неопределенности: моногр. / О.В. Серая. – Х.: ФОП Стеценко И.И., 2010. – 512 с.

5. Юдин Д.Б. Линейное программирование / Д.Б. Юдин, Е.Г. Гольштейн. – М.: Физматгиз, 1963. – 524 с.

6. Венцель Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Венцель. – М.: ФИЗМАТГИЗ, 1962. – 564с.

Поступила в редколлегию 25.07.2013

Рецензент: д-р техн. наук проф. Л.Г. Раскин, Национальный технический университет «ХПИ», Харьков.

РАЦІОНАЛЬНИЙ РОЗПОДІЛ РЕСУРСУ ПРИ БАГАТОНОМЕНКЛАТУРНОМУ ВИРОБНИЦТВІ ЗА ЙМОВІРНІСНИМ КРИТЕРІЄМ

О.В. Сіра

У роботі розглянута задача раціонального розподілу одновимірного ресурсу при багатономенклатурному виробництві, коли прибуток від реалізації продукції, що виготовляється - випадкова величина. Задача вирішена з використанням критерію - ймовірність перевищення випадковою сумарною прибутком заданого порогу. Для оптимізації одержуваної при цьому дрібно-нелінійної цільової функції запропонована спеціальна обчислювальна процедура.

***Ключові слова**: раціональний розподіл ресурсу, імовірнісний критерій, нелінійний для дробу функціонал.*

EFFICIENT RESOURCE ALLOCATION IN MULTINOMENCLATURE PRODUCTION BY PROBABILISTIC CRITERION

O.V. Sira

In this paper we consider the problem of rational distribution of resources in a one-dimensional multinomenclature production, when the profit from the sale of manufactured products is a random variable. The problem is solved with the use of criterion the probability of exceeding a given threshold by the total random profit. To optimize a rational-nonlinear objective function a proper computational procedure is offered.

***Keywords**: rational distributing of resource, probabilistic criterion, rational-nonlinear functional.*