УДК 519.873

А.Н. Дегтярёв, Д.Б. Кучер, В.Н. Мирянова

Севастопольский национальный технический университет, Севастополь

ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТИ ОШИБКИ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ ДВУМЕРНЫМИ КВАЗИОРТОГОНАЛЬНЫМИ СИГНАЛАМИ

Для передачи информации предложено использовать ортогональные с весом сигналы. Указанные сигналы получаются путем смещения импульсной характеристики каналоформирующего оборудования. Показано, что вероятность ошибочного приема координаты символа сообщения снижается при уменьшении энергии весовой функции и энергии импульсной характеристики каналоформирующего оборудования, а также при повышении порядка каналоформирующего оборудования.

Ключевые слова: *физически реализуемые функции, эквидистантные функции, ортогональность, межсимвольная интерференция, закон распределения, вероятность ошибки.*

Введение

При передаче информации по спутниковым, радиорелейным и кабельным линиям связи с частотным разделением абонентов часто используют двумерные сигналы, например амплитудно-фазоманипулированные. В таких каналах связи по мере повышения скорости передачи информации растет уровень межсимвольной интерференции (МСИ). В [1] показано, что полное устранение МСИ при одновременной минимизации дисперсии аддитивного шума канала связи достигается, если приемный фильтр состоит из каскадного соединения фильтра, согласованного с принимаемым сигналом, и трансверсального фильтра (эквалайзера), содержащего бесконечное число отводов. Линия задержки физически реализуемого эквалайзера имеет конечное число отводов и, следовательно, полностью устранить МСИ невозможно. На практике производится оптимизация эквалайзера по критериям минимума пикового значения МСИ или минимума среднеквадратического значения МСИ [1]. В общем случае оптимальный по указанным критериям эквалайзер не является оптимальным по критерию минимума вероятности ошибки, т.к. он нарушает условие согласованности приемного фильтра с сигналом.

Наряду с линейной обработкой сигнала для компенсации МСИ в отсчетные моменты времени используют и нелинейную обработку, в частности, прием с обратной связью по решению [2, 3]. Этому методу присуще явление размножения ошибок.

Если последующие символы создают значительный уровень МСИ, то линейная и нелинейная обработки используются совместно [4].

Если параметры тракта в процессе эксплуатации подвержены изменениям, то его характеристики периодически подстраиваются с помощью адаптивной коррекции тракта на приеме [3 – 5]. Вообще, известные способы борьбы с МСИ не позволяют полностью ее устранить. Положение усугубляется еще и тем, что с ростом избирательности каналоформирующих фильтров растет и уровень МСИ.

Как показано в работе [6], существует возможность одновременного снижения уровня МСИ и МКП путем применения квазиортогональных эквидистантных сигналов. Если указанные сигналы получены с помощью смещения импульсной характеристики физически реализуемого фильтра, то уровень помех снижается с повышением порядка фильтра или (и) снижения скорости передачи информации.

Цель работы состоит в определении вероятности ошибки передачи информации квазиортогональными эквидистантными сигналами при условии совместного воздействия МСИ и аддитивного шума канала связи.

Основные допущения

Будем рассматривать передачу двумерных сигналов. Если по каналу связи передается последовательность информационных символов, то сигнал на выходе модулятора передатчика имеет вид

$$S(t)=\sum_{j=0}^{M}(a_j\cos\omega_0 t+b_j\sin\omega_0 t)g(t-jT). \qquad (1)$$

где коэффициенты a_j и b_j определяют координату j-го информационного символа на плоскости, $g(t)$ – реакции идентичных канальных фильтров модулятора на прямоугольный импульс, длительность которого меньше периода колебания тактовой частоты T, ω_0 – циклическая частота несущего колебания. Отметим, что T обратно пропорционален скорости передачи информации.

В работе [6] показано, что если функции $g(t-kT)$ удовлетворяют условиям:

$$\begin{cases} J_1 = \int\limits_{nT}^{nT+\alpha} g(t-nT)g(t-kT)\cos^2\omega_0 t\rho(t)dt = \\ = \begin{cases} 1, k=n, \\ 0, k\neq n, \end{cases} \\ J_2 = \int\limits_{nT}^{nT+\alpha} g(t-nT)g(t-kT)\cos\omega_0 t\sin\omega_0 t\rho(t)dt = \\ = 0, \ \text{äëÿ \ ëþ áûõ n è k}, \\ J_3 = \int\limits_{nT}^{nT+\alpha} g(t-nT)g(t-kT)\sin^2\omega_0 t\rho(t)dt = \\ = \begin{cases} 1, k=n, \\ 0, k\neq n, \end{cases} \end{cases} \qquad (2)$$

(α – интервал времени принятия решения о том, какой из информационных символов был передан, $\rho(t)$ – периодическая весовая функция с периодом T), то определить последовательность координат переданных M информационных символов можно с помощью следующих процедур

$$\sum_{n=1}^{M} a_n\delta(t-nT) = \sum_{n=0}^{M}\int\limits_{nT}^{nT+\alpha} S(t)z_I(t)dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{M}\int\limits_{nT}^{nT+\alpha}(a_n\cos\omega_0 t + b_n\sin\omega_0 t)g(t-nT)\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{\infty} g(t-kT)\cos\omega_0 t\rho(t)dt, \qquad (3)$$

$$\sum_{n=1}^{M} b_n\delta(t-nT) = \sum_{n=0}^{M}\int\limits_{nT}^{nT+\alpha} S(t)z_Q(t)dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{M}\int\limits_{nT}^{nT+\alpha}(a_n\cos\omega_0 t + b_n\sin\omega_0 t)g(t-nT)\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{\infty} g(t-kT)\sin\omega_0 t\rho(t)dt, \qquad (4)$$

где
$$z_I(t) = \sum_{k=1}^{\infty} g(t-kT)\cos\omega_0 t\rho(t),$$

$$z_Q(t) = \sum_{k=1}^{\infty} g(t-kT)\sin\omega_0 t\rho(t).$$

Соотношения (3) и (4) имеют место в силу выполнения условий (2).

Любые фильтры (Баттерворта, Чебышева, эллиптические, Бесселя и промежуточные) порядка N имеют импульсные характеристики вида:

$$g(t) = 1(t)\sum_{k=1}^{N/2} A_k e^{\sigma_k t}\sin(\omega_k t + \psi_k), \qquad (5)$$

если N – четное число

и
$$g(t) = 1(t)A_0 e^{\sigma_0 t} +$$

$$+1(t)\sum_{k=1}^{(N-1)/2} A_k e^{\sigma_k t}\sin(\omega_k t + \psi_k), \qquad (6)$$

если N – нечетное число.

Здесь 1(t) – функция Хевисайда, $\sigma_k + j\omega_k$ – корни характеристического уравнения дифференциального уравнения, описывающего работу фильтра.

Поскольку вес $\rho(\tau)$ имеет период T, то он может быть записан в виде ряда Фурье

$$\rho(\tau) = c_0 + \sum_{k=1}^{K} c_{ck}\cos(\frac{2\pi k}{T}t) + \sum_{n=1}^{M} c_{sn}\cos(\frac{2\pi n}{T}t). \qquad (7)$$

В работе [6] показано, что подстановка выражений (5) или (6) и (7) в систему уравнений (2), позволяет получить непротиворечивую и совместную систему уравнений только относительно 3N неизвестных коэффициентов c_0, c_{ck} и c_{sn}, определяющих весовую функцию $\rho(\tau)$.

Таким образом, мгновенные значения импульсной характеристики g(t) взятые в моменты времени (N+n)T , n=0, 1, 2, 3…, будут влиять на МСИ.

Оценка помехоустойчивости сигналов

Будем считать, что на оценку координат принимаемого символа влияют только значения координат предыдущих символов. Проведем оценку координаты $\hat{a}_k$, k-го принимаемого символа. В этом случае сигнал на входе приемника на интервале наблюдения описывается выражением

$$S_{ïð}(t) = \sum_{j=-\infty}^{k}(a_j\tilde{g}_1(t-jT) + b_j\tilde{g}_2(t-jT)) + n(t),$$

где n(t) – аддитивный шум в канале связи,

$$\tilde{g}_1(t-jT) = g(t-jT)\cos\omega_0 t$$

и
$$\tilde{g}_2(t-jT) = g(t-jT)\sin\omega_0 t$$

можно рассматривать как импульсные характеристики некоторых эквивалентных высокочастотных фильтров.

$$\hat{a}_k = \int\limits_{kT}^{kT+\alpha}\tilde{g}_1(t-kT)\rho(t)\sum_{j=-\infty}^{k} a_j\tilde{g}_1(t-jT)dt +$$

$$+\int\limits_{kT}^{kT+\alpha}\tilde{g}_1(t-kT)\rho(t)\sum_{j=-\infty}^{k} b_j\tilde{g}_2(t-jT)dt +$$

$$+\int\limits_{kT}^{kT+\alpha}\tilde{g}_1(t-kT)\rho(t)n(t)dt =$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{k} a_j\int\limits_{kT}^{kT+\alpha}\tilde{g}_1(t-kT)\tilde{g}_1(t-jT)\rho(t)dt +$$

$$+\sum_{j=-\infty}^{k} b_j\int\limits_{kT}^{kT+\alpha}\tilde{g}_1(t-kT)\tilde{g}_2(t-jT)\rho(t)dt +$$

$$+\int\limits_{kT}^{kT+\alpha}\tilde{g}_1(t-kT)\rho(t)n(t)dt. \qquad (8)$$

Поскольку N последних слагаемых в каждой сумме равенства (8) удовлетворяют условиям (1), то в момент времени принятия решения kT+α имеем

$$\hat{a}_k = a_k + \sum_{j=-\infty}^{k-N} a_j \int_{kT}^{kT+\alpha} \tilde{g}_1(t-kT)\tilde{g}_1(t-jT)\rho(t)dt +$$

$$+\sum_{j=-\infty}^{k-N} b_j \int_{kT}^{kT+\alpha} \tilde{g}_1(t-kT)\tilde{g}_2(t-jT)\rho(t)dt +$$

$$+\int_{kT}^{kT+\alpha} \tilde{g}_1(t-kT)\rho(t)n(t)dt =$$

$$= a_k + \sum_{j=-\infty}^{k-N} a_j I_{1j}(\alpha) + \sum_{j=-\infty}^{k-N} b_j I_{2j}(\alpha) + \xi(\alpha),$$

где $I_{1j}(\alpha) = \int_{kT}^{kT+\alpha} \tilde{g}_1(t-jT)\tilde{g}_1(t-kT)\rho(t)dt$,

$$I_{2j}(\alpha) = \int_{kT}^{kT+\alpha} \tilde{g}_2(t-jT)\tilde{g}_1(t-kT)\rho(t)dt,$$

$$\xi(\alpha) = \int_{kT}^{kT+\alpha} \tilde{g}_1(t-kT)\rho(t)n(t)dt.$$

Выражение

$$X_k(\alpha) = \sum_{j=-\infty}^{k-N} a_j I_{1j}(\alpha) + \sum_{j=-\infty}^{k-N} b_n I_{2j}(\alpha) \qquad (9)$$

представляет собой отсчет межсимвольной интерференции, а величина $\xi(\alpha)$ является ошибкой, вызванной действием аддитивного шума канала связи.

В соответствии с [1] дисперсия МСИ, при отсутствии квадратурных переходов ($b_n = 0$), равна

$$\sigma_X^2(\alpha) = \sum_{j=-\infty}^{k-N} I_{1j}^2(\alpha).$$

Максимальное значение МСИ с учетом квадратурных переходов ($b_n \neq 0$) имеет вид

$$X_{max}(\alpha) = \sum_{j=-\infty}^{k-N} \left|I_{1j}(\alpha)\right| + \sum_{j=-\infty}^{k-N} \left|I_{2j}(\alpha)\right|.$$

Как показано в работе [6], абсолютные значения величин $I_{1j}(\alpha)$ и $I_{2j}(\alpha)$ убывают с ростом модуля индекса j, поэтому число слагаемых в суммах выражения (9) можно приближенно считать конечными и равными Q. В этом случае случайная величина $X_k(\alpha)$ при отсутствии квадратурных переходов ($b_n = 0$) принимает конечное число значений, равное 2^Q, а плотность вероятности случайной величины $x = X_k(\alpha)$ запишется как

$$w_1(x) \approx \frac{1}{2^Q}\sum_{l=1}^{2^Q} \delta(x - X_l(\alpha)), \qquad (10)$$

где $X_l(\alpha)$ – отсчет МСИ при l-м сочетании интерферирующих символов, число сочетаний равно 2^Q.

Оценка величины $\hat{a}_k$ записывается в виде

$$\hat{a}_k = X_k(\alpha) + \xi(\alpha).$$

Случайная величина $\xi(\alpha)$ записывается как

$$\xi(\alpha) = \int_{kT}^{kT+\alpha} \tilde{g}_1(t-kT)\rho(t)n(t)dt =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=1}^{\alpha/\Delta t} \tilde{g}_1(t_i - kT)\rho(t_i)n(t_i)\Delta t \approx$$

$$\approx \sum_{i=1}^{\alpha/\Delta t} \tilde{g}_1(t_i - kT)\rho(t_i)n(t_i)\Delta t, \qquad (11)$$

следовательно

$$\hat{a}_k = X_k(\alpha) + \sum_{i=1}^{\alpha/\Delta t} \tilde{g}_1(t_i - kT)\rho(t_i)n(t_i)\Delta t =$$

$$= \frac{\Delta t}{\alpha} X_k(\alpha) + \tilde{g}_1(t_1 - kT)\rho(t_1)n(t_1)\Delta t +$$

$$+ \frac{\Delta t}{\alpha} X_k(\alpha) + \tilde{g}_1(t_2 - kT)\rho(t_2)n(t_2)\Delta t +$$

$$+ \ldots + \frac{\Delta t}{\alpha} X_k(\alpha) + \tilde{g}_1(t_{\alpha/\Delta t} - kT)\rho(t_{\alpha/\Delta t})n(t_{\alpha/\Delta t})\Delta t.$$

Если $n(t)$ является стационарным белым гауссовским шумом с нормальным законом распределения с нулевым средним, то случайные величины $n(t_i)$ имеют нормальный закон распределения с нулевым средним

$$w_n(z) = \frac{1}{\sigma_n\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/\left(2\sigma_n^2\right)},$$

где σ_n^2 – дисперсия случайной величины $n(t_i)$.

Определим закон распределения пары слагаемых

$$y_i = \frac{\Delta t}{\alpha} X_k(\alpha) + \tilde{g}_1(t_i - kT)\rho(t_i)n(t_i)\Delta t.$$

Закон распределения случайной величины $u = \frac{\Delta t}{\alpha} X_k(\alpha)$ имеет вид

$$w_1(u) \approx \frac{1}{2^Q}\sum_{l=1}^{2^Q} \frac{\alpha}{\Delta t}\delta\left(\frac{\alpha u}{\Delta t} - X_l(\alpha)\right)$$

Закон распределения случайной величины $v = \tilde{g}_1(t_i - kT)\rho(t_i)n(t_i)\Delta t$ запишется как

$$w_n(v) = \frac{1}{\left|\tilde{g}_1(t_i - kT)\rho(t_i)\Delta t\right|} w_n\left(\frac{v}{\tilde{g}_1(t_i - kT)\rho(t_i)\Delta t}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sigma_n \left|\tilde{g}_1(t_i - kT)\rho(t_i)\Delta t\right|\sqrt{2\pi}} \times$$

$$\exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma_n^2(\tilde{g}_1(t_i - kT)\rho(t_i)\Delta t)^2}\right). \qquad (12)$$

Закон распределения случайной величины y_i имеет вид свертки:

$$w_2(y_i) = \int_{-\infty}^{\infty} w_1(y_i - x)w_n(x)dx =$$

$$= \frac{1}{2^Q}\sum_{l=1}^{Q}\frac{1}{\sigma_n\left|\tilde{g}_l(t_i - kT)\rho(t_i)\Delta t\right|\sqrt{2\pi}}\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{\left(y_i - \frac{\Delta t}{\alpha}X_l(\alpha)\right)^2}{2\sigma_n^2\left(\tilde{g}_l(t_i - kT)\rho(t_i)\Delta t\right)^2}\right). \qquad (13)$$

Закон распределения случайной величины $\hat{a}_k$ имеет вид свертки функций вида (13):

$$w_a(\hat{a}_k) = \frac{1}{2^Q}\sum_{l=1}^{Q}\frac{1}{\sigma_n\sqrt{2\pi}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{\alpha/\Delta t}\left(\tilde{g}_l(t_i - kT)\rho(t_i)\Delta t\right)^2}}\times$$

$$\times\exp\left(-(\hat{a}_k - X_l(\alpha))^2 \Big/ \left(2\sigma_n^2\sum_{i=1}^{\alpha/\Delta t}\left(\tilde{g}_l(t_i - kT)\rho(t_i)\Delta t\right)^2\right)\right). \qquad (14)$$

Воспользуемся неравенством Буняковского-Шварца и получим

$$\sum_{i=1}^{\alpha/\Delta t}\left(\tilde{g}_l(t_i - kT)\rho(t_i)\Delta t\right)^2 \le$$

$$\sum_{i=1}^{\alpha/\Delta t}\tilde{g}_l^2(t_i - kT)\Delta t\sum_{i=1}^{\alpha/\Delta t}\rho^2(t_i)\Delta t\,.$$

Перейдем к пределу

$$\lim_{\Delta t\to 0}\sum_{i=1}^{\alpha/\Delta t}\tilde{g}_l^2(t_i - kT)\Delta t\sum_{i=1}^{\alpha/\Delta t}\rho^2(t_i)\Delta t =$$

$$= \int_{kT}^{kT+\alpha}\tilde{g}_l^2(t - kT)dt\int_{kT}^{kT+\alpha}\rho^2(t)dt\,. \qquad (15)$$

С учетом (15) выражение (14) перепишется как

$$w_a(\hat{a}_k) = \frac{1}{2^Q}\sum_{l=1}^{Q}\frac{1}{\sigma_n\sqrt{2\pi}\sqrt{\int\limits_{kT}^{kT+\alpha}\tilde{g}_l^2(t - kT)dt\int\limits_{kT}^{kT+\alpha}\rho^2(t)dt}}\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{(\hat{a}_k - X_l(\alpha))^2}{2\sigma_n^2\int\limits_{kT}^{kT+\alpha}\tilde{g}_l^2(t - kT)dt\int\limits_{kT}^{kT+\alpha}\rho^2(t)dt}\right). \qquad (16)$$

Пусть a_{k+1} – координата соседнего символа сообщения. Вероятность ошибочного определения координаты a_{k+1} при передаче символа с координатой a_k составляет

$$P_{\text{îø}} = \int_{(a_{k+1}+a_k)/2}^{\infty} w_a(\hat{a}_k)d\hat{a}_k\,.$$

Выводы

Вероятность ошибочного приема координаты символа сообщения зависит от дисперсии шума канала связи, отсчетов МСИ, энергии импульсных характеристик эквивалентных высокочастотных фильтров и энергии весовой функции на интервале времени принятия решения о переданном символе. С ростом каждой из этих величин вероятность ошибки повышается.

Предварительный численный эксперимент показывает, что снижение скорости передачи за счет увеличения интервала принятия решения α приводит к снижению уровня отсчетов МСИ и энергии весовой функции, но повышает энергию импульсных характеристик эквивалентных высокочастотных фильтров.

Повышение порядка канальных фильтров модулятора приводит к снижению уровня отсчетов МСИ и энергии импульсных характеристик эквивалентных высокочастотных фильтров, но повышает энергию весовой функции.

Направление дальнейших исследований состоит в оптимизации предложенного способа передачи информации двумерными квазиортогоными сигналами с целью снижения вероятности ошибки при заданной скорости передачи информации.

Список литературы

1. *Зюко А.Г. Помехоустойчивость и эффективность систем передачи информации / А.Г. Зюко [и др.] – М.: Радио и связь, 1985. – 272 с.*
2. *Бельфиоре К.А. Компенсация посредством решающей обратной связи / К.А. Бельфиоре, Дж. Х. Парк // ТИИЭР. – 1979. –Т. 67. – № 8. – С. 67-83.*
3. *Кловский Д.Д. Инженерная реализация радиотехнических схем / Д.Д. Кловский, Б.И. Николаев. – М.: Связь, 1975. – 200 с.*
4. *Спилкер Дж. Цифровая спутниковая связь / Дж. Спилкер. – М.: Связь, 1979. – 592 с.*
5. *Кловский Д.Д. Передача дискретных сообщений по радиоканалам / Д.Д. Кловский. – М.: Радио и связь, 1982. – 304 с.*
6. *Дегтярев А.Н. Демодуляция двумерных сигналов с понижением уровня межсимвольной интерференции / А.Н. Дегтярев // Збірник наукових праць Академії ВМС імені П.С. Нахімова. – 2013. – Вып. 1(13). – С. 60 – 67.*

Надійшла до редколегії 23.07.2013

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Э.Ф. Бабуров, Севастопольский национальный технический университет, Севастополь, Украина.

ОЦІНКА ЙМОВІРОСТІ ПОМИЛКИ ПЕРЕДАЧІ ІНФОРМАЦІЇ ДВОВИМІРНИМИ КВАЗІОРТОГОНАЛЬНИМИ СИГНАЛАМИ

А.М. Дегтярьов, Д.Б. Кучер, В.М. Мирянова

Для передачі інформації запропоновано використовувати ортогональні з вагою сигнали. Зазначені сигнали виходять шляхом зміщення імпульсної характеристики каналоформуючого обладнання. Показано, що ймовірність помилкового прийому координати символу повідомлення знижується при зменшенні енергії вагової функції та енергії імпульсної характеристики каналоформіруючого обладнання, а також при підвищенні порядку каналоформіруючого обладнання.

***Ключові слова:** функції, що фізично реалізовуються, еквідистантні функції, ортогональність, міжсимвольна інтерференція, закон розподілу, вірогідність помилки.*

ASSESSMENT OF THE ERROR POSSIBILITY OF THE INFORMATION TRANSFER FOR THE TWO-DIMENSIONAL QUASI-ORTHOGONAL SIGNALS

A.N. Degtyarev, D.B. Kucher, V.N. Miryanova

For the information transfer is proposed to use the signals, which are orthogonal with weight. These signals are obtained by shifting of the pulse response of the channel equipment. It is shown that the probability of erroneous reception of message symbol coordinates decreases, if decreasing energy of the weighting function and the decreasing energy of the channel impulse response, as well as increasing order jf the channel equipment.

Keywords: *physically realized functions, equidistant functions, orthogonal, intercharacter interference, distributing law, probability of error.*