УДК 681.128.43

І.Ю. Кравченко

*Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова, Київ*

# МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПРОГНОЗУВАННЯ ТРАЄКТОРІЇ ЛІТАКА НА ОСНОВІ ЛІНІЙНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ І ЕКСТРАПОЛЯЦІЇ ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ ЗІ ЗМІШАНОЮ ПОСЛІДОВНІСТЮ ЙОГО СКЛАДОВИХ

*В статті запропонована математична модель прогнозування траєкторії літака на основі лінійної фільтрації і екстраполяції випадкового процесу зі змішаною послідовністю його складових, яка відображає оптимальний метод узгодженої екстраполяції з попередньою фільтрацією похибок вимірювань.*

***Ключові слова:*** *математична модель, прогнозування траєкторії літака, фільтрація і екстраполяція, випадковий процес.*

## Вступ

На підставі результатів аналізу досвіду експлуатації та розвитку як військової, так ї цивільної авіації провідних країн світу встановлено, що в сучасних умовах зросли вимоги до безпеки польотів. Однією з важних частин загальної проблеми безпеки польотів є підвищення ефективності систем автоматичного управління літальними апаратами у процесі її експлуатації та модернізації. Дослідження показали, що в сучасних умовах найбільш перспективними є і системи автоматичного управління літальним апаратом, в яких реалізована ідея прогнозування траєкторії. Це пов’язано з відсутністю апріорної інформації про можливі зовнішні впливи та дестабілізуючи фактори.

**Постановка задачі.** Зміст задачі визначає, що результат екстраполяції повинен бути оптимальним в середньому по множині реалізацій, у той час як для окремих реалізацій помилка екстраполяції може бути як завгодно великою. Дана обставина суттєво обмежує можливість задовольнити одну з вимог до посадки – здійснення з першого заходу, оскільки помилка одиночної екстраполяції не гарантується і, таким чином, суттєво зростає можливість невдалої посадки, що не припустимо. Дана обставина виявляє ще одну задачу, пов’язану з дослідженням похибки однократної екстраполяції. Виходячи з вищевикладеного, задачею є розробка різних за обсягом апріорної інформації оптимальних у середньоквадратичному сенсі методів екстраполяції реалізації випадкового процесу для прогнозування траєкторії літака при посадці.

**Аналіз публікацій.** У багатьох джерелах [1 – 4 та ін.] є інформація про проведення досліджень щодо розробки та застосування систем прогнозування траєкторії на етапі посадки літака за кордоном (США, РФ). І хоча більшість матеріалів, що стосуються застосування подібних систем, є закритими, з окремих відомостей все ж таки можна зробити висновок про їх існування та наукові підходи розробок, а також проте що існуюча теорія прогнозування потребує подальшого розвитку.

**Мета статті** полягає в обґрунтуванні різних за обсягом апріорної інформації оптимальних у середньоквадратичному сенсі моделей екстраполяції реалізації випадкового процесу для прогнозування траєкторії літака при посадці.

## Основна частина

Відомі підходи побудови фільтру – екстраполятору реалізації випадкового процесу [5 – 9 та ін.] не забезпечує абсолютного мінімуму середнього квадрата помилки прогнозу траєкторії літака при посадці.

Траєкторія літака $\hat{\bar{x}}(t)$ розглядається як реалізація векторного випадкового процесу $\bar{X}(t)=(X1(t),X2(t),X3(t))$, характеристики якого припускаються заданими на необхідному часовому інтервалі $t_1 \le t \le t_i$. Кожна складова $X_j(t),\ j=1,3$, процесу $\bar{X}(t)$ є скалярним випадковим процесом, що описує зміни в часі однієї із координат літака. В загальному випадку дані складові пов'язані. З випадковим процесом $\bar{X}(t)$ пов'язаний процес вимірів $\bar{Z}(t)$, який задається співвідношенням

$$\bar{Z}(t)=\bar{X}(t)+\bar{Y}(t), \qquad (1)$$

де $\overline{Y}(t)=(Y_1(t),\ Y_2(t),\ Y_3(t))$ – випадковий процес змін у часі похибок вимірів відповідної компоненти $X_j(t),\ j=\overline{1,3}$ процесу $\bar{X}(t)$. В зв'язку з тим, що вимірювання здійснюються у різних каналах, складові випадкового процесу $\bar{Y}(t)$ припускаються незалежними. Статистичні властивості процесу $\bar{Y}(t)$ на інтервалі $t_1 \le t \le t_i$ також припускаються відомими.

Для зниження похибки екстраполяції пропонується використовувати так звану "змішану" випадкову послідовність

$$\{\overset{\circ}{X}'\}=\{\hat{\overset{\circ}{X}}(1),\hat{\overset{\circ}{X}}(2),...,\hat{\overset{\circ}{X}}(k),\overset{\circ}{X}(i=k+1),...,\overset{\circ}{X}(I)\},$$

яка сполучує в собі для $i \le k$, так і дані о процесі $\overset{\circ}{X}(t)$ для $k<i\le I$. Важливим є то, що для цієї послідовності стандартним методом може бути отримано канонічне розкладення, яке і є основою для формування моделі прогнозу. Розглянемо особливості побудови такого методу для зростаючих $k$.

Для $k=1$ випадкова величина $\hat{\overset{\circ}{X}}(1)$ (результат множини фільтрації) запишеться так

$$\hat{\overset{\circ}{X}}(1)=P_1\overset{\circ}{Z}(1). \qquad (2)$$

В даному виразі $P_1$ – коефіцієнт оптимальної лінійної фільтрації, який визначається, як і раніше, з умови $M[|\overset{\circ}{X}(1)-\hat{\overset{\circ}{X}}(2)|^2]=\min$.

Властивості величини $\hat{\overset{\circ}{X}}(1)$ визначаються співвідношеннями

$$D_{\hat{x}}(1)=P_1^2 D_z(1), \qquad (3)$$

$$R_{\hat{x},x}(1,i)=P_1 R_{zx}(1,i),\ \ i=\overline{2,I}. \qquad (4)$$

На базі канонічного розкладення при наявності першого відомого значення $\overset{\circ}{z}(1)$ можливо записати

$$m^{(1)}_{\overset{\circ}{x}}(i)=\hat{\overset{\circ}{x}}(i)\varsigma_1^{(1)}(i)=\overset{\circ}{z}(1)P_1\varsigma_1^{(1)}(i),\ \ i=\overline{2,I}. \qquad (5)$$

$\varsigma_1^{(1)}(i)$ визначається співвідношенням

$$\varsigma_1^{(1)}(i)=\frac{1}{D_{Q_1^{(1)}}}R_{\hat{x},x}(1,i),\ \ i=\overline{1,I}, \qquad (6)$$

де $D_{Q_1^{(1)}}=D_{\hat{x}}(1)$.

Таким чином, для $k=1$ задача вирішена, оскільки в даному випадку згадане раніше розузгодження усунуто.

Розглянемо реалізацію ідею узгодженої сумісної фільтрації і екстраполяції для $k=2$. При цьому випадкова величина $\{\overset{\circ}{X}2\}$ формується стандартним чином як

$$\hat{\overset{\circ}{X}}(2)=(1-P_2)m^{(1)}_{\overset{\circ}{x}}(2)+p_2\overset{\circ}{Z}(2), \qquad (7)$$

що повністю визначає послідовність

$$\{\overset{\circ}{X}2\}=\{\hat{\overset{\circ}{X}}(1),\hat{\overset{\circ}{X}}(2),\overset{\circ}{X}(3),...,\overset{\circ}{X}(I)\}.$$

Для послідовності $\{\overset{\circ}{X}2\}$ може бути отримано канонічне розкладення

$$\overset{\circ}{X}2(i)=\sum_{\nu=1}^{i}Q_\nu^{(2)}\varsigma_\nu^{(2)},\ \ i=\overline{1,I}. \qquad (8)$$

Сформована на базі канонічного розкладення (8) модель оптимальної лінійної сумісної фільтрації і екстраполяції при наявності двох перших вимірювань $\overset{\circ}{z}(\mu),\ \mu=\overline{1,2}$ має вигляд

$$\begin{aligned}m^{(2)}_{\overset{\circ}{x}}(i)&=\hat{\overset{\circ}{x}}(1)[\varsigma_1^{(2)}(i)-\varsigma_1^{(2)}(2)\varsigma_2^{(2)}(i)]+\hat{\overset{\circ}{x}}(2)\varsigma_2^{(2)}(i)=\\&=\overset{\circ}{z}(1)P_1[\varsigma_1^{(2)}(i)-\varsigma_1^{(2)}(2)\varsigma_2^{(2)}(i)+\\&+(1-P_2)\varsigma_1^{(2)}(i)\varsigma_2^{(2)}(i)]+\overset{\circ}{z}(2)P_2\varsigma_2^{(2)}(i),\ \ i=\overline{3,I}.\end{aligned} \qquad (9)$$

У даному випадку $\varsigma_1^{(1)}(2)$ визначається з співвідношення (6), а вирази для визначення $\varsigma_\nu^{(2)}(i)$, $\nu=\overline{1,2}$, $i=\overline{3,I}$, $\varsigma_1^{(2)}(2)$ мають вигляд

$$\varsigma_1^{(2)}(2)=\frac{R_{\hat{x}}(1,2)}{D_{Q_1^{(2)}}}; \qquad (10)$$

$$\varsigma_1^{(2)}(I)=\frac{R_{\hat{x}}(1,i)}{D_{Q_1^{(i)}}};\ i=\overline{3,I}; \qquad (11)$$

де $D_{Q_1^{(2)}}(i)=D_{\hat{x}}(1)$;

$$\varsigma_2^{(2)}(i)=\frac{1}{D_{Q_2^{(2)}}}[R_{\hat{x}x}(2,i)-D_{Q_1^{(2)}}\varsigma_1^{(2)}(2)\varsigma_1^{(2)}(i)],\quad i=\overline{3,I}; \qquad (12)$$

де $D_{Q_1^{(2)}}=D_{\hat{x}}(2)-D_{Q_1^{(2)}}[\varsigma_1^{(2)}(i)]^2$.

З аналізу виразів (7) та (12) слідує, що координатні функції $\varsigma_1^{(1)}(i)$ і $\varsigma_1^{(2)}(i)$ для $i=\overline{3,I}$ співпадають. Дана обставина пояснюється тим, що, по-перше, в моменти $i=1$ і $i=\overline{3,I}$ послідовність $\{\overset{\circ}{X}2\}$ має такі властивості, що і послідовність $\{\overset{\circ}{X}1\}$ і, по-друге, координатні функції $\varsigma_1^{(1)}(i)$ і $\varsigma_1^{(2)}(i)$ формуються в канонічних розкладеннях (5), (9) у першу чергу. Зрозуміло, що за аналогічною причиною функції $\varsigma_\nu^{(2)}(i)$, $\nu=\overline{1,2}$, $i=\overline{4,I}$, $\varsigma_1^{(2)}(2)$ розкладення (9) співпадають з відповідними координатними функціями канонічного розкладу послідовності $\{\overset{\circ}{X}3\}=\{\hat{\overset{\circ}{X}}(1),\hat{\overset{\circ}{X}}(2),\hat{\overset{\circ}{X}}(3),X(4),...,X(I)\}$, що сформована на черговому етапі фільтрації.

$$Cv_\mu^{(k)}(i)=\begin{cases}Cv_\mu^{(k-1)}(i)-Cv_\mu^{(k-1)}(k)\varsigma_k^{(\nu)}(i), & \mu<k;\\ \varsigma_k^{(\nu)}(i), & \mu=k.\end{cases} \qquad (13)$$

Враховуючи дане позначення метод (10) набуває вигляду

$$m_{\overset{\circ}{x}}^{(2)}(i)=\overset{\circ}{z}(1)P1[C2_1^{(2)}(i)+ +(1-P_2)C1_1^{(1)}(2)C2_2^{(2)}(i)]+z(2)P_2C2_2^{(2)}(i),\ i=\overline{3,I}. \qquad (14)$$

Отримана модель прогнозу створює основу для формування випадкової величини $\hat{\overset{\circ}{X}}(3)$:

$$\hat{\overset{\circ}{X}}(3)=(1-P_3)m_{\overset{\circ}{x}}^{(2)}(3)+P_3\overset{\circ}{Z}(3). \qquad (15)$$

Канонічний розклад послідовності $\{\overset{\circ}{X}3\}=\{\hat{\overset{\circ}{X}}(1),\hat{\overset{\circ}{X}}(2),\hat{\overset{\circ}{X}}(3),X(4),...,X(I)\}$, має вигляд

$$X3(i)=\sum_{\nu=1}^{i}Q_\nu^{(3)}\varsigma_\nu^{(3)}(i),\quad i=\overline{1,I}. \qquad (16)$$

Співвідношення для визначення координатних функцій $\varsigma_\nu^{(3)}(\mu)$, $\nu=\overline{1,3}$, $\mu=\overline{\nu,3}$, $i=\overline{4,I}$ що використовуються для формування методу прогнозу при наявності $\overset{\circ}{z}(\mu)$, $\mu=\overline{1,3}$ з врахуванням властивостей елементів канонічного розкладання (5) і (6) має вигляд

$$\varsigma_\nu^{(3)}(i)=\begin{cases}\varsigma_\nu^{(2)}(i),\ \text{для}\ \nu=\overline{1,2},\ i=\overline{\nu,I},\ i\neq3;\\ \dfrac{1}{D_{Q_\nu^{(3)}}}[R_{\hat{x}}(\nu,i)-\sum\limits_{j=1}^{\nu-1}D_{Q_j^{(3)}}\varsigma_j^{(3)}(\nu)\varsigma_j^{(3)}(i)],\\ \quad\text{для}\ \nu=\overline{1,2},\ i=3;\\ \dfrac{1}{D_{Q_\nu^{(3)}}}[R_{x\hat{x}}(\nu,i)-\sum\limits_{j=1}^{\nu-1}D_{Q_j^{(3)}}\varsigma_j^{(3)}(\nu)\varsigma_j^{(3)}(i)],\\ \quad\text{для}\ \nu=3,\ i=\overline{4,I};\end{cases} \qquad (17)$$

$$D_{Q_\nu^{(3)}}=\begin{cases}D_{Q_\nu^{(2)}},\ \nu=\overline{1,2};\\ D_{\hat{x}}(3)-\sum\limits_{j=1}^{\nu-1}D_{Q_j^{(3)}}(\varsigma_j^{(3)}(3))^2,\ \nu=3.\end{cases} \qquad (18)$$

Як і очікувалось, координатні функції канонічного розкладення (16), необхідні для виводу методу прогнозу при $(k=3)$, відрізняються від відповідних координатних функцій розкладення (8) тільки для моменту i=3, яке визначає різницю між послідовностями $\{\overset{\circ}{X}2\}$ і $\{\overset{\circ}{X}3\}$.

Здійснюючи аналогічні попереднім перетворення, отримаємо оптимальну модель узгодженої сумісної фільтрації і екстраполяції при наявності вимірювань $\overset{\circ}{z}(\mu)$, $\mu=\overline{1,3}$:

$$\begin{aligned}m_{\overset{\circ}{x}}^{(3)}(i)&=\overset{\circ}{z}(1)P1[C3_1^{(3)}(i)+(1-P_2)C1_1^{(1)}(2)C3_2^{(2)}(i)+\\ &+[C2_1^{(2)}(3)+C1_1^{(1)}(2)(1-P_2)C2_2^{(2)}(3)](1-P_3)C3_3^{(3)}(i)]+\\ &+\overset{\circ}{z}(2)P2[C3_2^{(3)}(i)+C2_2^{(2)}(3)(1-P_3)C3_3^{(3)}(i)]+\\ &+\overset{\circ}{z}(3)P_3C3_3^{(3)}(i),\ i=\overline{4,I}.\end{aligned} \qquad (19)$$

Рекурентний характер співвідношень (6), (15), (20) дозволяє записати рівняння, що описує функціонування оптимального лінійного фільтра-екстраполятора для довільного числа $k<I$ результатів послідовних вимірювань $\overset{\circ}{z}(\mu)$, $\mu=\overline{1,3}$:

$$m_{\hat{x}}^{(k)}=m_x(i)+\sum_{\mu=1}^{k}\overset{\circ}{z}(\mu)P_\mu L_\mu^{(k)}(i),\quad i=\overline{k+1,I}. \qquad (20)$$

В даному випадку вагові функції $L_\mu^{(k)}(i)$, $\mu=\overline{1,k}$, $i=\overline{k+1,I}$ визначаються співвідношенням

$$L_\mu^{(k)}(i)=\sum_{j=\mu}^{k}N_\mu(j)Ck_j^{(k-1)}(i),\ \mu=\overline{1,k},\quad i=\overline{k+1,I}\ .(21)$$

В свою чергу $Ck_j^{(k-1)}(i)$ обчислюються за допомогою виразу (14), а ваги $N_\mu(j)$ визначаються рекурентними співвідношенням

$$N_\mu(j)=\begin{cases}1,\ j=\mu;\\ \sum\limits_{\nu=\mu}^{j-1}N_\mu(\nu)Cj-1_\nu^{(j-1)}(j)(1-P_j),\ \ j=\overline{\mu+1,k}.\end{cases}\quad(22)$$

В якості вихідної інформації для визначення $L_\mu^{(k)}(i)$ використовуються координатні функції $\varsigma_\nu^{(\mu)}(i),\ \mu=\overline{1,k},\ \ \nu=\overline{1,k},\ \ i=\overline{\nu,I},$ котрі є елементами канонічних розкладень послідовностей $\{\hat{\mathring{X}}_\mu\}=\{\hat{\mathring{X}}(1),\ ...,\hat{\mathring{X}}(\mu),\mathring{X}(i=\mu+1),\ ...,\mathring{X}(I)\},\ \ \mu=\overline{1,k}.$ Вказані координатні функції визначаються рекурентними співвідношеннями

$$\varsigma_\nu^{(\mu)}(i)=\begin{cases}\varsigma_\nu^{(\mu-1)}(i),\ \text{для}\ \ \nu=\overline{1,\mu-1},\ i=\overline{\nu,I},\ i\neq\mu;\\ \dfrac{1}{D_{Q_\nu^{(\mu)}}}[R_{\hat{x}}(\nu,i)-\sum\limits_{j=1}^{\nu-1}D_{Q_j^{(\mu)}}\varsigma_j^{(\mu)}(\nu)\varsigma_j^{(\mu)}(i)],\\ \qquad\text{для}\ \ \nu=\overline{1,\mu-1},\ i=\mu;\\ \dfrac{1}{D_{Q_\nu^{(\mu)}}}[R_{x\hat{x}}(\nu,i)-\sum\limits_{j=1}^{\nu-1}D_{Q_j^{(\mu)}}\varsigma_j^{(\mu)}(\nu)\varsigma_j^{(\mu)}(i)],\\ \qquad\text{для}\ \ \nu=\mu,\ i=\overline{\mu+1,I};\end{cases}\quad(23)$$

$$D_{Q_j^{(\mu)}}=\begin{cases}D_{Q_j^{(\mu-1)}},\quad \nu=\overline{1,\mu-1};\\ D_{\hat{x}}(\mu)-\sum\limits_{j=1}^{\nu-1}D_{Q_j^{(\mu)}}\left(\varsigma_j^{(\mu)}(\mu)\right)^2,\quad \nu=\mu.\end{cases}\quad(24)$$

Вирази для визначення $R_{\hat{x}}(\nu,\mu),\ R_{\hat{x}x}(\nu,i)$, $D_{\hat{x}}(i)$ з використанням (20) мають вигляд

$$D_{\hat{x}}(i)=(1-P_i)^2\sum_{l=1}^{i-1}\sum_{j=1}^{i-1}R_z(l,j)P_lP_jL_l^{(i-1)}(i)L_j^{(i-1)}(i)+$$
$$+P_i^2D_z(i)+(1-P_i)P_i\sum_{\nu=1}^{i-1}R_z(\nu,i)P_\nu P_iL_\nu^{(i-1)}(i),\quad i=\overline{1,k};\quad(25)$$

$$R_{\hat{x}}(\nu,\mu)=(1-P_\mu)(1-P_\nu)\times$$
$$\times\sum_{l=1}^{\nu-1}\sum_{j=1}^{\mu-1}R_z(l,j)P_lP_jL_l^{(\nu-1)}(\nu)L_j^{(\mu-1)}(\mu)+$$
$$+(1-P_\nu)P_\mu\sum_{j=1}^{\nu-1}R_z(j,\mu)P_jL_j^{(\nu-1)}(\nu)+(1-P_\mu)P_\nu\times\quad(26)$$
$$\times\sum_{j=1}^{\mu-1}R_z(j,\nu)P_jL_j^{(\mu-1)}(\mu)+P_\nu P_\mu R_z(\nu,\mu),$$
$$\nu,\mu=\overline{1,k};$$

$$R_{\hat{x},x}(\mu,i)=(1-P_\mu)\sum_{j=1}^{\mu-1}R_{zx}(j,i)P_jL_j^{(\mu-1)}(\mu)+$$
$$+P_\mu R_{zx}(\mu,i),\ \ \mu=\overline{1,k},\ \ i=\overline{\mu+1,I}.\quad(27)$$

Вираз для середнього квадрату помилки фільтрації з використанням співвідношення (20) запишеться так

$$E_\Phi(k)=M[|(1-P_k)\sum_{\mu=1}^{k-1}\mathring{Z}(\mu)P(\mu)L_\mu^{(k-1)}(k)+$$
$$+P_\mu\mathring{Z}(k)-\mathring{X}(k)|^2].$$

Після диференціювання цього виразу по $P_k$ і рішення відповідного рівняння отримаємо вираз для розрахунку оптимального значення $P_k$:

$$P_k=\frac{R1_k+R2_k-R3_k}{R1_k+R2_k-2R3_k+D_y(k)};\quad(28)$$

де

$$R1_k=D_x(k)-2\sum_{\mu=1}^{k-1}R_x(\mu,k)L_\mu^{(k-1)}(k)P_\mu-$$
$$-2\sum_{\mu=1}^{k-1}R_{xy}(\mu,k)L_\mu^{(k-1)}(k)P_\mu+$$
$$+\sum_{\mu=1}^{k-1}\sum_{\nu=1}^{k-1}R_x(\mu,\nu)L_\mu^{(k-1)}(k)P_\mu L_\nu^{(k-1)}(k)P_\nu;$$

$$R2_k=\sum_{\mu=1}^{k-1}\sum_{\nu=1}^{k-1}R_x(\mu,\nu)L_\mu^{(k-1)}(k)P_\mu L_\nu^{(k-1)}(k)P_\nu;$$

$$R3_k=\sum_{\mu=1}^{k-1}R_y(\mu,k)L_\mu^{(k-1)}(k)P_\mu.$$

Громіздкість процедури визначення вагових функцій $L_\mu^{(k)}(k),\ \ \mu=\overline{1,k},\ \ i=\overline{k+1,I}$ і коефіцієнтів фільтрації $P_\mu,\ \ \mu=\overline{1,k}$ визначається тим, що, по-перше, при їх розрахунку враховується уся передісторія процесів $X(t)$ і $Y(t)$ в рамках самих загальних уявлень о їх характері; по-друге, при обчисленні $L_\mu^{(k)}(k),\ \ \mu=\overline{1,k},\ \ i=\overline{k+1,I}$ і $P_\mu,\ \ \mu=\overline{1,k}$ враховуються властивості випадкових величин $\hat{\mathring{X}}(\mu),\ \mu=\overline{1,k}.$

Однак слідує мати на увазі, що вказані параметри методу (20), також як і параметри усіх попередніх, що були представлені в роботі методи прогнозу, можуть бути обчислені попередньо, і таким чином метод (20) не накладає яких-не будь обмежень у обчислювальному відношенні і може бути реалізованим в сучасних бортових обчислювальних комплексах.

Помилка одиночної екстраполяції при використанні методу (20) запишеться у вигляді

$$\sigma_{\hat{x}}^{(k)}(i) = m_{\hat{x}}^{(k)}(i) - m_x^{(k)}(i) - \\ - \sum_{\nu=k+1}^{i} V_\nu \phi_\nu(i),\ i = \overline{k+1, I}. \quad (29)$$

Її дисперсія, як і раніше, дорівнює апостеріорній дисперсії, а вираз для умовної систематичної похибки однократної екстраполяції має вигляд

$$S_{\hat{x}}^{(k)}(i / z(\mu),\ \mu = \overline{1,k}) = \sum_{\mu=1}^{k} \overset{\circ}{x}(\mu)(P_\mu L_\mu^{(k)}(i) - f_\mu^{(k)}(i)) + \\ + \sum_{\mu=1}^{k} \overset{\circ}{y}(\mu) P_\mu L_\mu^{(k)}(i),\ k < I,\ i = \overline{k+1, I}. \quad (30)$$

$$S_{\hat{x}}^{(k)}(i) = 0,\ i = \overline{k+1, I}.$$

Таким чином, при використанні методу (21) систематична похибка екстраполяції є відсутня.

Середній квадрат похибки екстраполяції запишеться як

$$E_{\hat{x}}^{(k)}(i) = \sum_{\mu=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{k} R_y(\mu,\nu) P_\mu P_\nu L_\mu^{(k)}(i) L_\nu^{(k)}(i) + \\ + \sum_{\mu=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{k} R_{xy}(\mu,\nu)(P_\mu L_\mu^{(k)}(i) - \\ - f_\mu^{(k)}(i)) P_\nu L_\nu^{(k)}(i) + \sum_{\mu=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{k} R_x(\mu,\nu)(P_\mu L_\mu^{(k)}(i) \\ - f_\mu^{(k)}(i))(P_\nu L_\nu^{(k)}(i) - \\ - f_\nu^{(k)}(i)),\ k < I,\ i = k+1, I. \quad (31)$$

## Висновки

З викладеного можливо зробити висновок, що в результаті проведених досліджень отримано оптимальний метод узгодженої екстраполяції з попередньою фільтрацією похибок вимірювань, котрий також як і метод, покладений в його основу, не накладає яких-небудь суттєвих обмежень на клас випадкових процесів що прогнозуються.

Запропонований фільтр-екстраполятор є узагальненням усіх відомих скалярних методів прогнозу. Останні витікають з нього, як часткові випадки, такі, що відповідають накладенню на фільтр-екстраполятор визначених обмежень.

## Список літератури


*1. Norizan M. Short Term Load Forecasting Using Double Seasonal ARIMA Model / M. Norizan, A. Maizah Hura, I. Zuhaimy // Regional Conference on Statistical Sciences. – Malaysia, Kelantan, 2010. – P. 57-73.*

*2. Robert A. Richards. Application of Multiple Artificial Intelligence Techniques for an Aircraft Carrier Landing Decision Support Tool, 2002.*

*3. Бурдун И.Е. Изучение физики и логики сложных полётных ситуаций с помощью программно-моделирующего комплекса VATES / И.Е. Бурдун // 2-я конференция "Тренажерные технологии и обучение: новые подходы и задачи", 24-25 апреля 2003 года / ЦАГИ им. проф. Н.Е.Жуковского, 2003. – 11 с.*

*4. Воробьев В.Г. Автоматическое управление полетом самолетов / В.Г. Воробьев, С.В. Кузнецов. – М.: Транспорт, 1995. – 448 с.*

*5. Тихонов В.И. Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов / В.И. Тихонов, Н.К. Кульман. – М.: Сов. радио, 1975. – 704 с.*

*6. Казаков В.А. Статистическая динамика систем с переменной структурой / В.А. Казаков. – М.: Наука, 1977. – 416 с.*

*7. Свешников А.А. Прикладные методы теории случайных функций / А.А. Свешников. – М.: Наука, 1975. – 704 с.*

*8. Колмогоров А.Н. Об аналитических методах в теории вероятностей / А.Н. Колмогоров // Успехи математических наук. – 1938. – Вып. 5.*

*9. Kalman R.E. A new approach to linear filtering and prediction theory / R.E. Kalman // Trans.ASME.I.Bas.V.82D. – 1960. – № 2. – P. 35-45.*


*Надійшла до редколегії 5.11.2013*

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. О.В. Барабаш, Національний авіаційний університет, Київ.

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ТРАЕКТОРИИ САМОЛЕТА НА ОСНОВЕ ЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ И ЭКСТРАПОЛЯЦИИ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА СО СМЕШАННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ ЕГО СОСТАВЛЯЮЩИХ

И.Ю. Кравченко

*В статье предложена математическая модель прогнозирования траектории самолета на основе линейной фильтрации и экстраполяции случайного процесса со смешанной последовательностью его составляющих, которая отражает оптимальный метод согласованной экстраполяции с предварительной фильтрацией погрешностей измерений.*

***Ключевые слова:*** *математическая модель, прогнозирование траектории самолета, фильтрация и экстраполяция, случайный процесс.*

### FORECASTING MATHEMATICAL MODEL AIRCRAFT TRAJECTORY BASED ON LINEAR FILTERING AND EXTRAPOLATION STOCHASTIC PROCESS TO MIXED SEQ ITS COMPONENTS

I.Yu. Kravchenko

*The paper proposed a mathematical model of the aircraft trajectory prediction based on a linear filtering and extrapolation of a random process with a mixed sequence of its components, which reflects the optimal method of extrapolation consistent with previous filtration measurement errors.*

***Keywords***: *mathematical model, predicting the trajectory of the aircraft, filtering and extrapolation, stochastic process.*