УДК 53.083.92-53.088.23

Ю.С. Курской

Украинская инженерно-педагогическая академия, Харьков

ЭНТРОПИЙНАЯ ШКАЛА ОЦЕНКИ РЕЗУЛЬТАТА ИЗМЕРЕНИЙ

В статье рассмотрены нелинейные динамические системы и их характеристики как объекты измерений. Особенностью изучаемых систем является возможность перехода в различные динамические режимы: детерминированный, хаотичный, случайный. Проанализированы метрологические подходы и модели измерения характеристик таких систем. Рассмотрена энтропия Шеннона как эффективный инструмент оценки динамики системы и неопределенности результатов измерения. Предложена нормированная энтропийная шкала, позволяющая количественно оценить степень организации изучаемой системы.

Ключевые слова: *открытая нелинейная динамическая система, динамическая переменная, неопределенность измерения, энтропия Шеннона, энтропийная шкала.*

Вступление

Энтропия является одним из самых интересных, универсальных и фундаментальных понятий современной науки. Впервые введенная в термодинамике как функция состояния замкнутой системы, энтропия получила распространение и в других областях физики, химии, биологии [1]. Энтропия стала незаменимым инструментом оценки состояния сложных реальных систем. С развитием теории информации энтропии была связана с количеством информации об объекте или процессе: количество информации рассматривается как разность энтропий до и после получения данных [2]. Через теорию информации вошла энтропия и в теорию вероятностей как мера степени неопределенности физической системы [3]. Применение элементов теории информации в метрологии позволило использовать энтропию для оценки неопределенности результатов измерения [4].

Известен ряд определений энтропии. Широкое распространение получили:

– энтропия Больцмана как мера беспорядка, хаотичности, молекулярных систем;

– энтропия Колмогорова-Синая или метрическая энтропия как мера экспоненциальной расходимости фазовых траекторий системы и мера скорости потери информации о системе;

– энтропия Шеннона H как мера неопределенности значения состояния системы.

Энтропии посвящен внушительный ряд исследований и публикаций. Однако распространение научных интересов на новые и все более сложные сферы окружающего мира приводит к необходимости продолжения работ в этом направлении [5].

К актуальным научным задачам последних десятилетий относится исследование реальных нелинейных динамических систем (НДС) различной природы, а также создание их моделей и методов для обеспечения измерений в НДС и прогноза их динамики. Сопоставление свойств реальных НДС с существующим теоретическим базисом классической теории измерения [6] и методик оценки неопределенности [7] привело к необходимости разработки принципиально новых метрологических подходов для измерения и оценки точности измерений для НДС. Решение этой задачи привело к созданию модели измерения [8] и модели анализа результатов измерений [9, 10] динамических переменных (ДП) НДС.

Модель измерения [8] построена на основных положениях и методах теории динамического хаоса, методах фрактального анализа временных рядов, концепции неопределенности измерений. В рамках модели предложен способ оценки минимального и достаточного количества измерительных экспериментов, основанный на представлениях о фрактальной структуре временного ряда результатов наблюдения за ДП НДС. Модель содержит порядок оценки неопределенности измерения как отдельных состояний ДП системы в различные моменты времени $u_i(X_i)$, так и неопределенности измерения всех возможных состояний ДП $U(X)$.

Модель анализа результатов измерений [9] позволяет отказаться от составления уравнения измерения, что в случае НДС является практически невыполнимой задачей, но требует реконструкции фазового портрета и анализа ключевых характеристик НДС: фрактальной размерности и размерности вложения, показателей Ляпунова и энтропии Колмогорова-Синая. Модель содержит выражения для характеристик НДС с учетом неопределенности измерения.

Одним из эффективных методов оценки результатов измерительного эксперимента является энтропийный анализ. В работе [10] изучены преимущества применения информационной теории для оценки результатов измерения. Рассмотрены ее ключевые элементы – количество информации I и энтропия Шеннона H, как величины, характеризующие неопределенность измерения. Предложены выражения связи неопределенности измерения $U(X)$ и энтропии H для случая НДС.

Реальные НДС могут переходить в различные режимы (от регулярного до случайного и хаотичного), отличающиеся характером поведения ДП и, как следствие, законам распределения и значением энтропии. Создание единой энтропийной шкалы, позволяющей количественно оценить результаты измерения и степень организации НДС, представляет собой интересную метрологическую задачу. Исследование особенностей НДС, факторов, влияющих на результ измерений, а также создание энтропийной шкалы оценки результата измерений ДП НДС является целью работы.

1. Нелинейные динамические системы

Повышенный интерес к НДС специалистов различных научных направлений объясняется тем, что к системам такого рода можно отнести большинство реальных систем окружающего мира — физических, биологических, социальных, экономических. Разделяют замкнутые и открытые, консервативные и диссипативные, рассеивающие энергию, системы [11]. Замкнутые – это системы, находящиеся в условиях, исключающих обмен с внешней средой веществом, энергией и информацией, не подверженные влиянию извне. К консервативным относятся классические и квантовые системы. Диссипативные системы характеризуются бифуркациями, перемежаемостью и другими характерными свойствами. Большинство реальных систем это открытые диссипативные системы, характеристики которых меняются во времени по нелинейным законам. Состояние таких НДС характеризуются группой $[X_1(t),...,X_n(t)]$ ДП, значения которых в любой момент времени t_i связаны с начальными значениями $[X_1(t_0),...,X_n(t_0)]$ функцией эволюции F [11]:

$$F[X_1(t_0),...,X_n(t_0)] \to [X_1(t_i),...,X_n(t_i)] . \quad (1)$$

Реальным НДС свойственен хаотичный режим поведения. В состоянии хаоса их ДП обладают чрезвычайно сильной, экспоненциальной зависимостью от начальных условий, и взаимодействуют с шумами. Фазовый портрет такой системы представляет собой странный аттрактор [12]. Связь с начальными условиями является основным отличием хаотичных процессов. При этом хаотичный режим может быть как переходным состоянием к регулярному режиму, так и длительным. В линейных или аффинных случаях хаотическое поведение не наблюдается [13].

Хаос возможен во всех НДС с числом степеней свободы больше двух. Примеры хаотичных режимов НДС можно найти в химии, метеорологии, электротехнике, физике лазеров, акустике. В 1983 г. профессор Калифорнийского университета Л. Чуа впервые продемонстрировал режим хаотичных колебаний в электрической цепи, состоящей из двух конденсаторов, катушки индуктивности, линейного и нелинейного резисторов с отрицательным сопротивлением. Эксперимент подтвердил предположение о том, что даже самые простые электрические цепи могут вести себя хаотичным образом. В 2005 г. группе ученых из Института квантовой оптики им. М. Планка удалось получить хаотичные колебания при ионизации атомов. Был проведен эксперимент, основанный на классической демонстрации фотоэффекта, в ходе которого при помощи лазерного луча заставили рубидий испускать электроны в сильное электромагнитное поле. В результате электроны, поведение которых должно быть случайным, вели себя хаотично. Эксперимент доказал существование связи между хаосом и колебаниями фотопотока [14]. В 1990-х годах специалисты по акустике океана описали явление лучевого хаоса в неоднородных волноводах. Было показано, что на больших дистанциях параметры акустических лучей ведут себя хаотичных образом. Примерами хаотичного поведения могут служить реакция Белоусова-Жаботинского, ячейки Бернара, метеорологическая модель погоды Лоренца.

Исследование НДС является одной из самых популярных научных задач. При этом, перед наукой стоит не просто задача изучения реальных НДС, но задача их моделирования и возможность управления ими. В этом направлении решаются вопросы: поиска сценариев перехода от регулярного состояния к хаотическому и наоборот; возбуждение динамического хаоса; взаимодействие хаотических и регулярных систем; правление параметрами НДС, в первую очередь энтропией, и другие [15]. Эти задачи требуют создания принципиально новых метрологических подходов.

Общепринятые метрологические модели основаны на положениях о возможности представления измеряемой физической величины единственным значением и об эргодичности характеристик систем и, как следствие, эргодичности и случайности разброса результатов измерений [6]. Единственность значения измеряемой величины и эргодичность – это модельные представления, применение которых, как правило, ограничено системами, параметры которых считаются неизменными во времени, или меняющимися по линейному закону. При этом, неизменность параметров относительна, а линеаризация процессов – определенное упрощение их поведения. Многочисленные эксперименты свидетельствуют, что поведение ДП реальных НДС носит недетерминированный характер, а их оценка не является случайной с определенным законом распределения. Гипотеза о статистической устойчивости физических величин оказалась ограниченно пригодной.

Практически нереализуемой для НДС является и задача построения уравнений измерения. В метрологии они применяются для проверки результатов измерения и прогноза дальнейшего поведения ДП. Составить уравнение, которое бы достоверно описывало сложное поведение ДП НДС, удается только для консервативных систем. Хаотичное поведение ДП НДС не позволяет строить долгосрочные прогнозы.

Критерием возможности составления уравнения измерения является устойчивость системы по Ляпунову, которая требует, чтобы две произвольно выбранные близкие траектории фазового пространства оставались близки в любой момент времени. Очевидно, что экспоненциальная расходимость траекторий ДП в хаотичном режиме приводит к неустойчивости системы по Ляпунову. Но, с другой стороны, если фазовый портрет ДП располагается в ограниченной области пространства, то система устойчива по Лагранжу. В случае хаотичной диссипативной НДС ее фазовый портрет представляет собой странный аттрактор – множество, к которому притягиваются траектории из его окрестности. Поэтому странные аттракторы, отображающие динамику НДС, в большинстве случаев, не могут быть описаны аналитически, лишь численно [12].

Противоречия между реальными НДС и моделями, принятыми в метрологии, привели к необходимости создания принципиально новых моделей измерения и анализа результатов измерения для таких систем [8 – 10].

2. Энтропия как характеристика результатов измерений

Энтропия Шеннона H является ключевым элементом информационного подхода к оценке результата измерения. С точки зрения метрологии она характеризует качество измерительного эксперимента, являясь мерой неопределенности результатов измерения $H = H(u)$. Причиной ее введения в теорию измерений было желание повысить достоверность результатов измерений. Важной характеристикой оценки результатов измерения является доверительная вероятность, значение которой выбирают исходя из закона распределения результатов измерения: чем более сложным образом ведет себя измеряемая величина, тем меньшее значение назначается для доверительной вероятности. Такое волевое назначение является в определенном смысле произволом, неприемлемым в случае измерений в НДС. Обойти эту ситуацию позволяет использование энтропии [4]. Выбор энтропии Шеннона в качестве характеристики неопределенности измерения обусловлен ее свойствами:

– энтропия равна нулю в случае достоверности одного состояния системы и невозможности других;

– энтропия принимает максимальное значение при равной вероятности всех состояний системы и возрастает при увеличении их числа;

– энтропия обладает свойством аддитивности: в случае объединения нескольких независимых систем в одну, энтропии суммируются [3].

При условии, что измеряемая физическая величина X неизменна при измерении, а разброс результатов измерения носит случайный характер, энтропия Шеннона H, действительно, характеризует неопределенность измерения, разброс результатов измерения и может быть выражена формулой:

$$H = -\sum_{i} p(x_i) \ln p(x_i)\,, \qquad (2)$$

где x_i – результат i-го измерения величины X, $p(x_i)$ – плотность распределения вероятности x_i.

Согласно (2) энтропия Шеннона зависит от закона распределения $p(x_i)$. Максимальная энтропия соответствует равномерному закону распределения, минимальная – распределению Гаусса, в случае ограниченного интервала значений x [3]. Если значение плотности распределения $p(x_i)$ определенного значения x_i стремится к единице $p(x_i) \to 1$, то энтропия стремится к нулю $H \to 0$.

Учитывая, что энтропия служит мерой неопределенности, мерой незнания о значении измеряемой величины, задача измерительного эксперимента заключается в сведении ее значения к минимуму, Если энтропия величины X до измерения H_{before} определяется диапазоном измерения средства измерительной техники $[x_{min}, x_{max}]$, $H_{before} = \ln(x_{max} - x_{min})$, то после измерения ее значение H_{after} определяется энтропийным интервалом неопределенности $u_H = \exp H$, связанным с неопределенностью u энтропийным коэффициентом k, различным для разных законов распределения [4]:

$$u_H = 2ku\,. \qquad (3)$$

Значение u_H может быть вычислено строго математически, без необходимости назначения доверительной вероятности, что повышает доверие к результатам измерения. Неопределенность результата измерения случайной величины по типу «А» с учетом (2), (3) может быть описана выражением [10]:

$$u = \frac{\exp H}{2k} = \frac{1}{2k} \exp\left[-\sum_{i} p(x_i) \ln p(x_i)\right]. \qquad (4)$$

Согласно (4), если плотность вероятности результата измерения стремится к единице, то значение энтропии и неопределенности стремится к нулю. На практике достижение такого результата невозможно по причине невозможности получения при измерении истинного значения физической величины. Точность измерения ограничивают ряд факторов, связанных как с возможностями средств и методов измерения, так и с природой объекта измерения. Даже неизменные во времени физические величины можно считать таковыми лишь условно [5]. В случае НДС вклад поведения ДП в значение энтропии и неопределенности возрастает.

При измерении ДП НДС необходимо определить, какие значения может принимать ДП X. При хаотичном режиме все возможные значения X (1) с различной плотностью будут заполнять интервал значений $\left[X_{min}, X_{max}\right]$, ограниченный размером аттрактора системы. Энтропия Шеннона в этом случае является мерой неопределенности принятия ДП X значения X_i. Если отдельные состояния X_i ДП X не связаны между собой (марковский процесс), то выражение для энтропии Шеннона примет вид (2). В случае немарковского процесса, согласно теореме об энтропии сложной системы, вводится понятие условной энтропии Шеннона, которая учитывает связь между отдельными состояниями X_i [3]:

$$H(X_1,...,X_n) = H(X_1) + ... + H(X_n \left| X_1, X_2, ..., X_{n-1}\right.), \quad (5)$$

где $H(X_i \left| X_{i-1}\right.)$ – условная энтропия Шеннона.

Энтропия каждого последующего состояния системы $H(X_i)$ вычисляется исходя из энтропии предыдущего состояния $H(X_{i-1})$ или

$$H(X_1,...,X_n) = = -\sum_i p_{i-1} p(X_i \left| X_{i-1},...,X_{i-n}\right.) \ln p(X_i \left| X_{i-1},...,X_{i-n}\right.), \quad (6)$$

где p_{i-1} – плотность вероятности состояния X_{i-1}; $p(X_i \left| X_{i-1},...,X_{i-n}\right.)$ – плотность вероятности состояния X_i при условии известной плотности вероятности предыдущих состояний/

Выражение (5) отображает энтропию НДС, характеризующую исключительно ДП НДС. При проведении измерительного эксперимента вклад в энтропию, помимо динамики ДП X, вносит и неопределенность измерения каждого отдельного состояния X_i. Учитывая это, выражение для энтропии Шеннона (5) следует дополнить условиями неопределенности: вместо точечной величины X_i следует ввести интервальную величину $[x_i - u_i, x_i + u_i]$, охватывающую истинное значение состояния X_i ДП и неопределенность его измерения.

3. Энтропийная шкала

Каждый из динамических режимов НДС характеризуется своим значением энтропии (5). Для наблюдения за НДС, способной менять характер своей динамики, удобно ввести инструмент количественной оценки состояния. Таким инструментом может стать нормированная энтропийная шкала результатов измерения, содержащая значения энтропии от нуля до единицы. Нулевое значение энтропии соответствует регулярному, детерминированному процессу, при котором значение ДП НДС определено однозначно, а неопределенность равна нулю. Энтропия равная единице соответствует случайному разбросу значений ДП НДС при условии равномерного распределения. Как первое, так и второе состояние НДС является идеальным. Значение энтропии реальных НДС находится между крайними значениями.

Для расчета энтропийной шкалы применяется выражение (6). Однако, согласно выражению для условной энтропии объединенной системы (5), значение энтропии Шеннона может превышать единицу. В качестве нормировочного коэффициента введем величину обратную максимальному значению энтропии системы $1/H_{max}$. Так как максимальное значение энтропии соответствует случаю равномерного распределения значений ДП НДС, то оно может быть отображено выражением вида:

$$H_{max} = \ln\left[(x_{max} + u_{max}) - (x_{min} - u_{min})\right], \quad (7)$$

где x_{max}, u_{max} – максимальное значение результата измерения и ее неопределенность ДП X; x_{min}, u_{min} – минимальное значение результата измерения и ее неопределенность ДП X; $(x_{max} + u_{max}) \le X \le (x_{min} - u_{min})$.

Выражение для нормированной энтропии с учетом (6) и (7) примет вид:

$$\left\|H\right\| = \frac{-\sum_i p_{i-1} p(X_i \left| X_{i-1},...,X_{i-n}\right.) \ln p(X_i \left| X_{i-1},...,X_{i-n}\right.)}{\ln\left[(x_{max} + u_{max}) - (x_{min} - u_{min})\right]}. \quad (8)$$

Согласно (8), значение энтропии определяется степенью связи состояний X_i ДП друг с другом и интервалом всех возможных значений X. В детерминированном случае все состояния X_i ДП НДС последовательно связаны друг с другом. Такая система «помнит» все свои состояния и обладает минимальной энтропией, $\left\|H\right\| \to 0$. Условная энтропия нескольких состояний $H(X_i \left| X_{i-1}\right.)$ не может превосходить безусловную энтропию $H(X_i)$ $H(X_i \left| X_{i-1}\right.) \le H(X_i)$, а при условии $H(X_{i-1} \left| X_i\right.) \ne 0$ выполняется строгое неравенство $H(X_i \left| X_{i-1}\right.) < H(X_i)$ [3]. Из этого следует, что энтропия (6) тем больше, чем меньше ряд связанных между собой состояний X_i. В случае динамического хаоса система сохраняет связь состояний только в течении краткого промежутка времени. Если за это время удалось провести измерения двух последующих состояний X_{i-1} и X_i, то выражение для энтропии (6) примет вид:

$$H(X_i \left| X_{i-1}\right.) = -\sum_i p_{i-1} p(X_i \left| X_{i-1}\right.) \ln p(X_i \left| X_{i-1}\right.).$$

Энтропия возрастает с потерей связи между состояниями X_i. В случае марковских процессов выражение для энтропии примет вид (2). При равномерном распределении значений ДП нормированная энтропия достигнет максимального значения (7), $\|H\| \to 1$.

Предложенная шкала нормированной энтропии результатов измерения (8) может быть использована для количественной оценки состояния нелинейной динамической системы.

Выводы

Рассмотрены нелинейные динамические системы и динамические переменные систем как объекты измерений. Особенностью изучаемых систем является возможность перехода в различные динамические режимы: детерминированный, хаотичный, случайный.

Проанализированы метрологические подходы и моделей измерения характеристик таких систем. рассмотрена энтропия Шеннона как эффективный инструмент оценки динамики измеряемой переменной и неопределенности измерения.

Предложена нормированная энтропийная шкала результатов измерения. В качестве нормировочного коэффициента предложена величина, обратная максимальному значению энтропии конкретной системы. Шкала может быть использована для количественной оценки состояния нелинейной динамической системы.

Список литературы

1. *Волькенштейн М.В. Энтропия и информация / М.В. Волькенштейн. – М.: Наука, 1986. – 192 с.*
2. *Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике / К. Шеннон. – М.: Изд. иностр. лит., 1963. – 830 с.*
3. *Вентцель Е.С. Теория вероятностей: Учеб. для вузов. – 7-е изд. стер. / Е.С. Вентцель. – М.: Высш. шк., 2001. – 575 с.*
4. *Новицкий П.В. Оценка погрешностей результатов измерений. – 2-е изд., перераб. и доп. / П.В. Новицкий, И.А. Зограф. – Л.: Изд-во Энергоатомиздат. Ленингр. отд., 1991. – 304 с.*
5. *Горбань И.И. Теория гиперслучайных явлений: физические и математические основы / И.И. Горбань. – К.: Наук. думка, 2011. – 318 с.*
6. *Machekhin Yu. Physical models for analysis of measurement results / Yu. Machekhin // Measurement Techniques, Springer New York. – 2005. – Vol. 48. – №6. – P. 555-561.*
7. *РМГ 43-2001. Рекомендации по межгосударственной стандартизации. Государственная система обеспечения единства измерений. применение "Руководства по выражению неопределенности измерений". Дата введения 2003-07-01.*
8. *Мачехин Ю. Модель измерения параметров нелинейных динамических систем / Ю. Мачехин, Ю. Курской // Системи обробки інформації. – Х.: ХУ ПС, 2012. – Вип. 1 (99). – С. 169-175.*
9. *Мачехин Ю. Анализ результатов измерений в нелинейных динамических системах / Ю. Мачехин, Ю. Курской // Системи обробки інформації. – Х.: ХУ ПС, 2012. – Вип. 4 (102). – С. 169-175.*
10. *Мачехин Ю. Энтропийный анализ динамических переменных / Ю. Мачехин, Ю. Курской // Системи обробки інформації. – Х.: ХУ ПС, 2013. – Вип. 1 (108). – С. 100-104.*
11. *Schuster H. Deterministic chaos / H. Schuster. – Physik-Verlag Weinheim, 1984. – 240 p.*
12. *Лоскутов А.Ю. Очарование хаоса / А.Ю. Лоскутов // Успехи физических наук. – 2010. – Том 180, №12. – С. 1304-1329.*
13. *Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории: пер. с англ. / Р.М. Кроновер. – М.: Постмаркер, 2000. – 352 с.*
14. *Stania G. Quantum Chaotic Scattering in Atomic Physics / G. Stania, H. Walther // Ericson Fluctuations in Photoionization Physical Review Letters. – 4 November 2005.*
15. *Владимиров С.Н. Управление энтропией динамических систем с дискретным и непрерывным временем / С.Н. Владимиров, А.А. Штраух // Журнал технической физики. – 2004. – Том 74, вып. 7.*

Поступила в редколлегию 1.11.2013

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Р.М. Трищ, Украинская инженерно-педагогическая академия, Харьков.

ЕНТРОПІЙНА ШКАЛА ОЦІНЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАННЯ

Ю.С. Курський

У статті розглянуті нелінійні динамічні системи та їх характеристики як об'єкти вимірювань. Особливістю досліджуваних систем є можливість переходу в різні динамічні режими: детермінований, хаотичний, випадковий. Проаналізовано метрологічні підходи і моделей вимірювання характеристик таких систем. Розглянута ентропія Шеннона як ефективний інструмент оцінки динаміки вимірюваної змінної і невизначеності вимірювання. Запропоновано нормована ентропійна шкала, що дозволяє кількісно оцінити ступінь організації системи, що вивчається.

Ключові слова: *відкрита нелінійна динамічна система, динамічна змінна, невизначеність вимірювання, ентропія Шеннона, ентропійна шкала.*

ENTROPIC SCALE FOR DETERMINATION OF MEASUREMENT RESULTS

Yu.S. Kurskoy

The nonlinear dynamic systems and their dynamic variables as the objects of measurement are considered in the article. The peculiarity of such systems is their ability to change dynamic modes: deterministic, chaotic, random. Metrological approaches and measurement models for characteristics of such systems are researched here. The Shannon entropy is considered as an effective tool for assessing a mode of the measured dynamic variables and a measurement uncertainty. The normalized entropy scale that allows to quantify the degree of organization for researched system is proposed.

Keywords: *open non-linear dynamic system, a dynamic variable, measurement uncertainty, Shannon entropy, entropy scale.*