УДК 517.583:50(091)

В.Ю. Дубницкий, Л.Д Филатова

Харьковский институт банковского дела Университета банковского дела НБУ (Киев), Харьков

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ЛЕМНИСКАТИЧЕСКИХ СИНУСОВ И КОСИНУСОВ

Светлой памяти Андрея Митрофановича Журавского
и многих известных и безвестных,
разделивших его судьбу.
Имена их Ты, Господи, веси …

Предложена процедура расчёта значений лемнискатического синуса и лемнискатического косинуса, основанная на представлении значений этих функций в виде отношения степенных рядов, сходящихся при всех значениях эллиптического интеграла первого рода. Приведены краткие биографические сведения о создателях методов вычисления эллиптических функций.

Ключевые слова: *обобщённый синус, эллиптические интегралы, эллиптические функции Якоби, лемниската, лемнискатический синус, лемнискатический косинус, история математики, С.Ю. Сикорский, А.М. Журавский.*

Введение

Разработка методов вычисления значений функций на ЭВМ может быть отнесена к специфическому разделу вычислительной математики. Его цели, задачи и основные методы рассмотрены в работах [1…4]. Там же приведены подробные алгоритмы и программы вычисления практически всех основных элементарных и специальных функций. Появление специализированных программных продуктов таких, как Maple, MATLAB, Derive и им подобных, привело к уменьшению работ по данной тематике. Используемые в этих программных продуктах алгоритмы закрыты для пользователя и оценка их качества становится самостоятельной научной задачей [5].

Анализ литературы. В работе [6] определена операция обращения определённого интеграла следующим образом.

Пусть

$$z=\int_0^w \frac{dw}{\sqrt{1-w^2}}=\arcsin w. \qquad (1)$$

Тогда

$$w=\arcsin z. \qquad (2)$$

В условии (1) и далее будем рассматривать только положительное значение корня. В работе [7] введено понятие обобщённого синуса, определяемого как функция, обратная интегралу:

$$t=\int_0^y \frac{d\eta}{\sqrt{1+m\eta^2+n\eta^4}}. \qquad (3)$$

В этой же работе получена зависимость между ограничениями, накладываемыми на значения параметров m, n и типом получаемого синуса. Зависимость эта приведена в табл. 1.

Таблица 1

Зависимость между ограничениями, накладываемыми на значения параметров m и n, и типом синуса

Ограничения на параметры подынтегрального выражения (3)		Тип синуса
m	n	
-1	0	Круговой
1	0	Гиперболический
0	-1	Лемнискатический
$-1-k^2$	$k^2,\ 0<k<1$	Эллиптический

В работах [1…4] и примыкающих к ним по содержанию изложены методы вычисления значений круговых, гиперболических и эллиптических функций. Вычисление значений лемнискатических функций, которые можно представить как частный случай эллиптических функций Якоби, в них не описано. В данном сообщении изложены методы вычисления значений лемнискатических функций и проведена оценка их точности.

В работе [7], единственной, насколько известно авторам данного сообщения, описаны основные свойства лемнискатических функций и их связь с эллиптическими функциями Якоби. Основные, использованные в данном сообщении, свойства эллиптических функций приведены в том виде, который использован в работах [6, 8].

Интеграл

$$u = F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \qquad (4)$$

называют эллиптическим интегралом первого рода, модуль которого равен величине параметра k, а амплитуда равна величине φ. При $\varphi = \pi/2$ получим полный эллиптический интеграл первого рода:

$$K(k) = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}. \qquad (5)$$

Из последней строки табл. 1 следует справедливость равенства:

$$1 - k^2 = (k')^2. \qquad (6)$$

Величину k' называют дополнительным модулем, полный эллиптический интеграл первого рода, ему соответствующий, примет вид:

$$K(k') = K'(k) = F\left(\frac{\pi}{2}, k'\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-(k')^2 \sin^2 \varphi}}. \qquad (7)$$

Обращая интеграл (4) относительно величины φ, получим, что:

$$\varphi = f(u, k). \qquad (8)$$

По определению, эллиптическим синусом называют величину:

$$sn(u, k) = \sin\varphi = \sin am(u, k); \qquad (9)$$

эллиптическим косинусом называют величину:

$$cn(u, k) = \cos(\varphi = \cos am(u, k); \qquad (10)$$

и величину, называемую «дельтой амплитуды»:

$$dn(u, k) = \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}. \qquad (11)$$

В работе [7] показано, что лемнискатический синус slu и лемнискатический косинус clu связаны со своими эллиптическими аналогами следующими условиями:

$$slu = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{sn\left(u\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{dn\left(u\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}, \qquad (12)$$

$$clu = cn\left(u\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right). \qquad (13)$$

Из условий (12) и (13) следует, что задача вычисления значений лемнискатических синусов и косинусов сводится к вычислению значений эллиптических синусов и косинусов при значениях u и k, указанных в выражениях (12), (13).

Авторам данного сообщения не удалось обнаружить существование специальных таблиц лемнискатических функций. При использовании таблиц эллиптических функций необходимо, во избежание вычислительных ошибок, обращать внимание на форму представления данных. В работе [9, С. 380] условие (6) представлено в виде:

$$m_1 + m_2 = 1, \qquad (14)$$

таким образом, справедливы равенства

$$m_1 = k^2, \; m_2 = (k')^2. \qquad (15)$$

В этой же работе приведены аппроксимации значений эллиптических функций тригонометрическими и гиперболическими функциями. Область применения этих аппроксимаций ограничена малыми и большими значениями модуля k, то есть, в нашем случае неприменима. В работе [10] описан способ вычисления значений эллиптических функций с использованием тэта-функций Якоби. Этот способ также весьма трудоёмкий.

Обозначения, принятые в [9], и способ вычисления эллиптических функций, аналогичный принятому в работе [10], использованы в работах [11, 12]. Анализ современной литературы [2, 3, 4, 9…12] позволяет сделать вывод о том, что наилучшим средством определения больших массивов численных значений эллиптических, а, следовательно, и лемнискатических функций служат программные продукты, указанные во введении. Применение одного из таких продуктов для вычисления значений эллиптических функций в процессе цифровой обработки сигналов описано в работе [13]. Приобретение дорогих лицензионных пакетов требует специального экономического обоснования и для решения разовых задач, пусть даже большого объёма, целесообразно использовать приближённые методы «докомпьютерной эпохи», допускающие несложную реализацию в табличных процессорах.

Постановка задачи. Разработка интерактивной методики вычисления значений лемнискатического синуса и косинуса.

Полученные результаты

Основой предлагаемой методики послужили работы [8, 14]. Неотъемлемая составляющая этих методик – вычисление неполного и полного эллиптического интеграла видов (4, 5, 7). Для этой цели была применена система компьютерной алгебры Derive [15]. Численное значение эллиптического интеграла первого рода возвращает процедура:

(ELLIPTIC_F(phi,m) :=
:=INT(1/SQRT(1-mSIN(t)_^2),t_,0,phi)).

Процесс вычисления происходит по команде (**ELLIPTIC_F(phi,m).**

Особенности её применения рассмотрим на примере, заимствованном из работ [8, С. 32] и [14, С. 13].

Необходимо вычислить значение неполного эллиптического интеграла:

$$u = \int_0^{\pi/6} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 \varphi}}. \qquad (16)$$

С учётом (5) и (15) представим его в виде:

$$u = F(\varphi, k) = F\left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right). \qquad (17)$$

Используя градусную меру углов, представим команду для вычисления интеграла (16) в виде, заключённом во внешние скобки, рядом с которыми указано полученное численное значение:

(ELLIPTIC_F(30°, SIN(45°)^2))= 0.5356227328.

При использовании радианной меры углов получим:

(ELLIPTIC_F(π/6, SIN(ASIN(1/√2))^2))= =0.5356227328.

Для дальнейшего изложения результатов данной работы потребуется полный эллиптический интеграл первого вида, соответствующий условию (16), а именно:

$$u = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}}. \qquad (18)$$

При использовании градусной меры модификация команда Elliptic_F(phi, m), предназначеная для вычисления полного эллиптического интеграла первого вида, примет вид:

(ELLIPTIC_F(90°, SIN(45°)^2))= 1.854074677.

Та же команда при использовании радианной меры угла примет вид:

(ELLIPTIC_F(π/2, SIN(ASIN(1/√**2))^2)) =** =1.854074677.

В том случае, когда есть возможность использовать программные продукты, позволяющие вычислять эллиптические функции Якоби, задача сводится в выполнению вычислений по формулам (12), (13). Процедура усложняется, если в распоряжении исследователя есть только программа вычисления эллиптического интеграла. Именно этот случай и будет рассмотрен далее. В работах [6] и [8] для вычисления эллиптических синуса и косинуса предложена следующая постановка задачи. Предполагается, что численное значение эллиптического интеграла $u = F(\varphi, k)$ и величина k известны. Тогда из таблиц значений эллиптических интегралов, решая обратную табличную задачу, по терминологии, принятой в работе [6], определяют величину φ, соответствующую заданным u и k. После этого значения эллиптических функций Якоби определяют по условию:

$$sn(u) = \sin\varphi, cn(u) = \cos\varphi, dn(u) = \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}. \qquad (19)$$

В работе [14] предложено более удобное для программирования решение этой задачи. Значения эллиптических функций Якоби, указанные в условии (19), предложено вычислять в виде отношения сходящихся рядов:

$$sn(u) = \frac{\alpha_0 u - \alpha_1 u^3 + \alpha_2 u^5 - \alpha_3 u^7 + \alpha_4 u^9}{\delta_0 - \delta_1 u^2 + \delta_2 u^4 - \delta_3 u^6 + \delta_4 u^8}; \qquad (20)$$

$$cn(u) = \frac{\beta_0 - \beta_1 u^2 + \beta_2 u^4 - \beta_3 u^6 + \beta_4 u^8}{\delta_0 - \delta_1 u^2 + \delta_2 u^4 - \delta_3 u^6 + \delta_4 u^8}; \qquad (21)$$

$$dn(u) = \frac{\gamma_0 - \gamma_1 u^2 + \gamma_2 u^4 - \gamma_3 u^6 + \gamma_4 u^8}{\delta_0 - \delta_1 u^2 + \delta_2 u^4 - \delta_3 u^6 + \delta_4 u^8}. \qquad (22)$$

В равенствах (20)…(22) коэффициенты соответствующих рядов представлены в виде функции модуля k эллиптического интеграла (4). Выражения для этих коэффициентов показаны в табл. 2.

С учётом этих результатов и условий (12), (13) и (20)…(22) получим выражения для вычисления лемнискатического синуса:

$$slu = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1,41421u - 0,70711u^3 + 0,15319u^5 - 0,01765u^7 + 0,00059u^9}{1 - 0,5u^2 + 0,20832u^4 - 0,06248u^6 + 0,01296u^8}. \qquad (23)$$

Для вычисления лемнискатического косинуса получим выражение:

$$clu = \frac{1 - u^2 + 0,33332u^4 - 0,06664u^6 + 0,01024u^8}{1 - 0,08332u^2 + 0.03332u^4 - 0,015284u^6 + 0,00111u^8}. \qquad (24)$$

Таблица 2

Коэффициенты рядов для расчёта эллиптических функций Якоби

Коэффициенты рядов для расчёта эллиптических функций Якоби как функция модуля k							
коэффициенты α		коэффициенты β		коэффициенты γ		коэффициенты δ	
α_0	1	β_0	1	γ_0	1	δ_0	1
α_1	$\frac{1}{3!}(1+k^2)$	β_1	$\frac{1}{2!}$	γ_1	$\frac{1}{2!}k^2$	δ_1	$\frac{2k^2}{4!}$
α_2	$\frac{1}{5!}(1+4k^2+k^4)$	β_2	$\frac{1}{4!}(1+2k^2)$	γ_2	$\frac{1}{4!}(2k^2+k^4)$	δ_2	$\frac{8k^2}{6!}(k^2+1)$
α_3	$\frac{1}{7!}\left(1+9k^2+ +9k^4+k^6\right)$	β_3	$\frac{1}{6!}\left(1+6k^2+ +8k^4\right)$	γ_3	$\frac{1}{6!}\left(8k^2+6k^4+ +k^6\right)$	δ_3	$\frac{4k^2}{8!}\left(8+17k^2+ +8k^4\right)=$
α_4	$\frac{1}{9!}\left(1+16k^2-6k^4+ +16k^6+k^8\right)$	β_4	$\frac{1}{8!}\left(1+12k^2+ +60k^4+32k^6\right)$	γ_4	$\frac{1}{8!}\left(32k^2+60k^4+ +12k^6+k^8\right)$	δ_4	$\frac{32k^2}{10!}\left(4+15k^2+ +15k^4+4k^6\right)$

Проверка предлагаемого метода проведена путём сравнения вычисленных значений со значениями, приведенными в таблицах [11]. Относительная ошибка данного метода менее 1,5 %, что вполне достаточно для проведения расчетов конструкций наземных стартовых комплексов, например, подобных описанному в работе [16].

Историко-библиографическое дополнение. При работе над данным сообщением наиболее важными оказались работы [8, 14]. При детальном знакомстве с ними внимание авторов было обращено на следующие обстоятельства. В работе [8, С. 32] к примеру (16), использованному нами, приведена библиографическая ссылка, выполненная в стиле, характерном для русской (до 1917 г.) и советской научной литературы тридцатых годов, показанная на рис. 1:

$$u = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}}.$$

[*Bertrand*, Calcul intégral, стр. 662.]

Рис. 1. Образец библиографической ссылки в работе [8]

В самой же работе [8] вообще список использованной литературы отсутствует. В выходных данных к книге указано, что данное издание второе, первое вышло в 1936 г. [17]. В редакционной аннотации ко второму изданию, то есть к работе [8], сказано, что её автор «известный отечественный математик, профессор». При обращении к работе [17] оказалось, что в ней, как и следовало ожидать, список использованной литературы присутствует. Сведения об авторе работ [8, 17] оказались весьма скудными. В работе [18, С. 629] приведена ссылка на работу [17], сведения о работах С.Ю. Сикорского, выполненных в последующем отсутствуют. Отсутствуют также и биографические сведения об этом человеке. Случайно авторам данного сообщения удалось на сайте Одесской национальной академии связи им. А.С. Попова (http://onat.edu.ua/?set_lang=ru) в разделе, посвящённом кафедре высшей математики, встретить упоминание о Ю.С. Сикорском. Юрий Станиславович Сикорский (1879 г. – 1953 г.), профессор математики с 1925 г., с 1930 г. по 1948 г. заведовал кафедрой высшей математики Одесского электротехнического института связи. Мистическим образом годы его жизни совпали с годами жизни другого человека, названного в работе [19] «кремлёвским горцем» и оказавшем большое влияние на судьбы многих людей, в том числе и судьбу автора работы [14]. Сведения об Андрее Митрофановиче Журавском, помещённые в работе [18, С. 260] дают представление о математике, родившемся в 1892г. и здравствовавшем на момент подготовки работы [18] к печати , то есть в 1959 г., только вот почему-то после 1941 г. ни одной из его работ в списке не приведено. А.М. Журавский оставил свой след не только в математике, но и, косвенно, в русской литературе. В романе А.И. Солженицина «В круге первом» он стал прообразом профессора Владимира Эрастовича Челнова [20] и сразу многое стало ясным. Он оказался одним из тех, на которых, по словам поэта: «пятьдесят восьмая крест свой поставила статья». Подробные сведения об А.М. Журавском приведены в работах [21, 22]. А.М. Журавский поступил в Императорский Санкт-Петербургский университет и в 1915 г. окончил физико-математический факультет Императорского Петроградского университета. С 1916 г. и до 1941 г. его деятельность связана с Петроградским, впоследствии Ленинградским, ныне Санкт-Петербургским Горным институтом. С 1920 г., по другим данным, с 1937 г., профессор этого института. Его интерес к решению задач прикладной математики приводит к тому, что А.М. Журавский становится в 1926 г. первым директором Бюро технических расчетов и производственных вычислений при физико-математическом факультете Ленинградского государственного университета (ЛГУ). В 1941 г. он руководит ленинградским отделением Математического института АН СССР и проводит исследования тепловых процессов в стволах артиллерийских орудий.

В 1942 г., 17 февраля, арестован по делу «Старой русской интеллигенции» и 25 апреля этого же года приговорен военным трибуналом Ленинградского фронта к расстрелу (ст. 58, пункты 3, 10, часть 2, 11). Постановлением Верховного Суда СССР от 28 мая 1942 расстрел заменён на 10 лет исправительных лагерей. Этапирован в Усольлаг. И всё это происходило в блокадном Ленинграде.

С 1942 г. по 1952 г. пребывает в ведении 4-го Спецотдела МВД СССР, где и знакомится с А.И. Солженицыным. За это время выполнил 30 научных работ по теории тепловых процессов в стволах артиллерийских орудий.

В 1949 и 1951 годах з/к Журавский А.М., 1892 г.р., русский , ст. 58, п. 3, 10, часть 2, 11, срок 10 лет, с 17.02.1942, был откомандирован в г. Москва, в Артиллерийскую академию для сообщений и доклада. По окончании срока отбытия наказания выслан в г. Сыктывкар, Коми АССР.

С 1953 по 1955 год работает в Особом конструкторском бюро (ОКБ)-43 и решает ряд задач в интересах артиллерии и зарождающейся ракетной техники.

В 1955 г. после реабилитации возвращается в Ленинградский горный институт, заведует кафедрой высшей математики, с 1958 г. – доктор технических наук. В этот период его работы связаны с решением задач поиска нефтяных месторождений. В 1969 г. земной путь А.М. Журавского прервался.

Выводы

1.Описана процедура расчёта значений лемнискатического синуса и лемнискатического косинуса, основанная на представлении значений этих функций в виде отношения степенных рядов, сходящихся при всех значениях эллиптического интеграла первого рода.

2. Проверка качества предложенной процедуры показала, что её точность достаточна для выполнения расчётов инженерных сооружений.

Список литературы

1. *Алексеев Г.И. Воспроизведение функций средствами цифроаналоговой вычислительной техники / Г.И. Алексеев. – Минск: Наука и техника, 1976. – 224 с.*
2. *Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации / Ю. Люк. – М.: Мир, 1980. – 608 с.*
3. *Справочник по специальным функциям с формулами и таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стигана. – М.: Наука, 1979. – 832 с.*
4. *Цимринг Ш.Е. Специальные функции и определённые интегралы. Алгоритмы. Программы для микрокалькуляторов / Ш.Е. Цимринг. – М.: Радио и связь, 1988. – 272 с.*
5. *Ніконов О.Я. Оцінка точності обчислень спеціальних функцій при розробці комп'ютерних програм математичного моделювання / О.Я. Ніконов, О.В. Мнушка, В.М. Савченко //Вісник НТУ «ХПІ». Тематичний випуск: Інформатика і моделювання. – Х.: НТУ «ХПІ». – 2011. – №17. – С. 115-121.*
6. *Фильчаков П.Ф. Справочник по высшей математике / П.Ф. Фильчаков. – К.: Наукова Думка, 1974. – 743 с.*
7. *Маркушевич А.И. Замечательные синусы. Введение в теорию эллиптических функций / А.И. Маркушевич. – М.: Наука, 1974. – 94 с.*
8. *Сикорский С.Ю. Элементы теории эллиптических функций: С приложениями к механике / С.Ю. Сикорский. – М.: КомКнига, 2006. – 368 с.*
9. *Милн-Томсон Л. Эллиптические функции Якоби и тэта-функции / Л. Милн-Томсон // Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами; Под ред. М. Абрамовица и И. Стигана. – М.: Наука, 1979. – 832 с.*
10. *Янке Е. Специальные функции (Формулы, графики, таблицы) / Е. Янке, Эмде, Ф. Лёш. – М.: Наука, 1964. – 344 с.*
11. *Шулер М. Таблицы эллиптических функций / М. Шулер, Х. Гебелейн. – М.: ВЦ АН СССР, 1961. – 297 с.*
12. *Беляков М.В. Таблицы эллиптических интегралов. Т. 1 / М.В. Беляков, Р.И. Кравцова, М.Г. Раппопорт. – М.: Изд-во АНЕ СССР, 1962. – 656 с.*
13. *Хандрос М.Ю. Аппроксимация экспериментальных данных эллиптическими полиномами [Электронный ресурс] / М.Ю. Хандрос. – Режим доступа к ресурсу: http://www.twirpx.com/file/913852/-20.12.2004. – Загл. с экрана.*
14. *Журавский А.М. Справочник по эллиптическим функциям / А.М. Журавский. – Изд. Академии Наук Союза ССР, 1941. – 235 с.*
15. *Дьяконов В.П. Системы компьютерной алгебры Derive: Самоучитель и руководство пользователя / П.В. Дьяконов. – М.: СОЛОН-Р, 2002. – 320 с.*
16. *Бармин И.В. Кабель-заправочная башня с функциями агрегата обслуживания / И.В. Бармин, В.Н. Климов, Ю.В. Рубцов. – Заявка: 2005121287/11, 08.07.2005.*
17. *Сикорский Ю.С. Элементы теории эллиптических функций. С приложениями к механике / Ю.С. Сикорский. – М.-Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1936. – 367 с.*
18. *Математика в СССР за сорок лет: в 2т. – Т.2, Библиография / Гл. ред. А.Г. Курош. – М.: ФМЛ, 1959. – 819 с.*
19. *Мандельштам О.Э. Мы живем, под собою не чуя страны [Электронный ресурс] / О.Э. Мандельштам. Стихи. – Режим доступа к ресурсу: http: // www.stihi-rus.ru/1/Mandelshtam/58.htm-06.01.2014г. – Загл. с экрана.*
20. *В круге первом. [Электронный ресурс]. – Режим доступа к ресурсу: http://ru.wikipedia.org/wiki/%C2_%EA%F0%F3%E3%E5_%EF%E5%F0%E2%EE%EC-06.01.2014г. – Загл. с экрана.*
21. *Виленкин Н.Я. Формулы фанере / Я.Н. Виленкин // Природа. – 1991. – №3. – С. 95-104.*
22. *Климова Д.Н. Андрей Митрофанович Журавский / Д.Н. Климова, В.И. Жук, В.Д. Чебанов. – М.: Наука, 2007. – 164 с.*

Поступила в редколлегию 30.10.2013

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. М.В. Новожилова, Харьковский национальный университет строительства и архитектуры, Харьков.

ОБЧИСЛЕННЯ ЗНАЧЕНЬ ЛЕМНІСКАТИЧНИХ СИНУСІВ І КОСИНУСІВ

В.Ю. Дубницький, Л.Д. Філатова

Запропоновано процедуру обчислення значень лемнискатичного синуса і лемнискатичного косинуса, засновану на поданні значень цих функцій у вигляді відношення степеневих рядів, що збігаються при всіх значеннях еліптичного інтегралу першого роду. Наведено короткі біографічні відомості про творців методів обчислень еліптичних функцій.

Ключові слова: *узагальнений синус, еліптичні інтеграли, еліптичні функції Якобі, лемніската, лемніскатичний синус, лемніскатичний косинус, історія математики, С.Ю. Сикорський, А.М. Журавський.*

CALCULATION OF LEMNISCATE SINE AND COSINE VALUES

V.Iu. Dubnytskyi, L.D. Filatova

A procedure was proposed for calculation of lemniscate sine and lemniscate cosine values based on presentation of values of those functions in the form of relation of power series of those functions converging under all values of first-type elliptic integral. Brief biographic data specified on developers of elliptic function calculation methods.

Keywords: *generalized sine, elliptic integrals, Jacobian elliptic functions, lemniscata, lemniscate sine, lemniscate cosine, history of mathematics, S.Yu. Sikorsky, A.M. Zhuravsky.*