

УДК 623.021: 005

В.Б. Кононов

Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ДИНАМІКИ БОЮ І ОПЕРАЦІЇ ДВОХ УГРУПУВАНЬ В УМОВАХ ПОВНОЇ І НЕПОВНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

У статті викладені математичні моделі ведення бою і операції між різномірними бойовими засобами протидіючих угруповань в умовах повної і неповної інформації, що дозволяють оцінити стан угруповання супротивника, а також дати рекомендації по розподілу кількості своїх сил і засобів при плануванні і веденні військових дій.

математична модель, протидіюче угруповання, умови повної і неповної інформації

Вступ

Постановка завдання. При плануванні розподілу кількості сил і засобів кожного типу озброєння необхідно враховувати вогняну потужність і кількісний склад вживаних бойових засобів, темпи нарощування сил для у відповідь удару, співвідношення сил і засобів, темпи відновлення бойових засобів і т.д. Отримані рекомендації по плануванню операцій повинні використовуватися командуванням при ухваленні рішення на ведення військових дій. Оцінка стану супротивника в умовах повної і неповної інформації при плануванні і подальшому веденні бойових дій є важливим військово-науковим завданням, актуальність якого визначається необхідністю створення в Озброєних Силах України автоматизованої системи управління військами і зброєю.

Аналіз літератури. У відомій літературі, присвяченій дослідженню операцій у військовій справі [1 – 5] розглядаються питання застосування дослідження операцій до рішення задач управління військами. При цьому основна увага приділена імовірнісним оцінкам, за допомогою яких визначається вірогідність виконання бойових завдань конфліктуючими угрупованнями. Проте в цих роботах не розглядаються математичні моделі ведення бою і операції між різномірними бойовими засобами протидіючих угруповань в умовах повної і неповної інформації про супротивника, що дозволяють оцінити стан його угруповання, а також дати рекомендації при розподілі кількості своїх сил і засобів при плануванні і веденні військових дій.

Метою статті є розробка моделей бою і операції з повною і не інформацією, що запізнюється, а так само не повною інформацією про стан протидіючого угруповання з миттєвим обліком цієї інформації відповідно до планів розподілу долей кількостей бойових засобів кожного типу.

Основний матеріал

На початку розглянемо бій і операцію з повною інформацією, що не запізнюється, про стан протидіючого угруповання (у розпорядженні кожного угруповання є точна інформація про те, які цілі уражені) з миттєвим обліком цієї інформації (перенесення вогню на неурражені цілі здійснюється мит-

тєво) відповідно до планів розподілу долей кількостей бойових засобів кожного типу і $\beta(t) = \left\| \beta_{ji}(t) \right\|_{m,n}$

угруповань А і В відповідно.

При складанні моделі такого бою і операції приймемо наступні допущення:

– m – кількість типів різномірних бойових засобів угруповання А;

– n – кількість типів різномірних бойових засобів угруповання В;

– $x_i(t) (i = \overline{1, m})$ – математичне очікування кількості бойових засобів i -го типу угруповання А, що збереглися до моменту часу t ;

– $y_j(t) (j = \overline{1, n})$ – математичне очікування кількості бойових засобів j -го типу угруповання В, що збереглися до моменту часу t ;

– $a_{ji} = \lambda_i P_{ji} (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$ – ефективна скорострільність бойового засобу i -го типу угруповання А по бойовому засобу j -го типу угруповання В;

– $\lambda_i (i = \overline{1, m})$ – середня скорострільність бойового засобу i -го типу угруповання А;

– $P_{ji} (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$ – вірогідність поразки

одним пострілом бойовим засобом i -го типу угруповання А бойового засобу j -го типу угруповання В;

– $b_{ij} = \mu_j Q_{ij} (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$ – ефективна скорострільність бойового засобу j -го типу угруповання В по бойовому засобу i -го типу угруповання А;

– $\mu_j (j = \overline{1, n})$ – середня скорострільність бойового засобу j -го типу угруповання В;

– $Q_{ij} (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$ – вірогідність поразки

одним пострілом бойовим засобом j -го типу угруповання В по бойовому засобу i -го типу угруповання А;

– $\alpha_{ji}(t) (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$ – частка бойових засобів i -го типу угруповання А, протидіючих бойовим засобам j -го типу угруповання В у момент часу t ;

– $\beta_{ij}(t) (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$ – частка бойових засобів j -го типу угруповання В, протидіючих бойовим засобам i -го типу угруповання А у момент часу t ;

– $c_i (i = \overline{1, m}), d_j (j = \overline{1, n}), A_i (i = \overline{1, m}), B_j (j = \overline{1, n})$

– задані позитивні числа, визначувані обмеженнями на темпи надходження резерву і загальну кількість наявних бойових засобів угруповань В А і В відповідно;

– $u_i(t) (i = \overline{1, m})$ – інтенсивність надходження бойових засобів i -го типу угруповання А;

– $v_j(t) (j = \overline{1, n})$ – інтенсивність надходження бойових засобів j -го типу угруповання В;

– $x_i^0 (i = \overline{1, m})$ – кількість бойових засобів i -го типу угруповання А до початку бою;

– $y_j^0 (j = \overline{1, n})$ – кількість бойових засобів j -го типу угруповання В до початку бою і операції;

– T – час ведення бойових дій.

В цьому випадку маємо:
 $P_B(x_i) = 1, i = \overline{1, m}; P_A(y_j) = 1, j = \overline{1, n}$, і при прийнятих позначеннях отримаємо математичну модель динаміки бою і операції між різнорідними бойовими засобами двох угруповань в умовах повної інформації і миттєвим перенесенням вогню на неуразені цілі:

$$\begin{cases} \frac{dx_i(t)}{dt} = -\sum_{j=1}^n \beta_{ij}(t) b_{ij} y_j(t) + u_i(t); & i = \overline{1, m}; \\ \frac{dy_j(t)}{dt} = -\sum_{i=1}^m \alpha_{ji}(t) a_{ji} x_i(t) + v_j(t); & j = \overline{1, n}; \end{cases}$$

$$x_i(0) = x_i^0; (i = \overline{1, m}); y_j(0) = y_j^0; (j = \overline{1, n});$$

$$\sum_{i=1}^m \beta_{ij}(t) = 1; j = \overline{1, n}; \beta_{ij}(t) \geq 0; i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n};$$

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{ji}(t) = 1; i = \overline{1, m}; \alpha_{ji}(t) \geq 0; j = \overline{1, n}; i = \overline{1, m}; (1)$$

$$0 \leq u_i(t) \leq c_i; i = \overline{1, m}; 0 \leq v_j(t) \leq d_j; j = \overline{1, n};$$

$$\int_0^T u_i(t) dt \leq A_i; i = \overline{1, m}; \int_0^T v_j(t) dt \leq B_j; j = \overline{1, n}.$$

Якщо в модель (1) ввести допущення про ведення вогню кожним бойовим засобом по будь-якому бойовому засобу кожному з угруповань і відсутності обмежень на темпи надходження і загальну кількість бойових засобів резервів, то необхідність в параметрах $\alpha_{ji}(t)$ і $\beta_{ij}(t)$ і обмеженнях (2) відпа-

дає, а модель (1) спрощується до вигляду:

$$\begin{cases} \frac{dx_i(t)}{dt} = -\sum_{j=1}^n b_{ij} y_j(t) + u_i(t); & i = \overline{1, m}; \\ \frac{dy_j(t)}{dt} = -\sum_{i=1}^m a_{ji} x_i(t) + v_j(t); & j = \overline{1, n}; \end{cases} \quad (3)$$

$$x_i(0) = x_i^0; (i = \overline{1, m}); y_j(0) = y_j^0; (j = \overline{1, n})$$

і стає узагальненням моделі Ланчестера для випадку, коли кожне з угруповань А і В складається з кінцевого числа різнорідних груп бойових засобів.

Нарешті, проста модель – модель Ланчестера, витікає з моделі (3) при додатковому допущенні про те, що кожне з угруповань складається з однорідних бойових засобів, тобто $m = n = 1, b_{11} = b, a_{11} = a,$

$$y_1(t) \equiv y(t), u_1(t) \equiv u(t), x_1^0(t) = x^0, y_1^0(t) = y^0,$$

або маємо

$$\begin{cases} \frac{dx_i(t)}{dt} = -by(t) + u(t); \\ \frac{dy_j(t)}{dt} = -ax(t) + v(t); \end{cases} \quad (4)$$

$$x(0) = x^0, y(0) = y^0.$$

Відзначимо два важливі окремі випадки моделі (1): бій і операція між однорідним угрупованням А проти різнорідних бойових засобів угруповання В і бій і операція різнорідних бойових засобів угруповання А проти однорідних бойових засобів угруповання В.

У першому випадку маємо:

1) $m = 1$;

$$2) \beta_{1j}(t) \equiv \beta_j(t), j = \overline{1, n}; \alpha_{ji}(t) \equiv \alpha_j(t), j = \overline{1, n}; \quad (5)$$

3) $u_1(t) \equiv u(t); x_1(t) \equiv x(t);$

$$4) A_1 = A; x_1^0 = x^0; c_1 = c; b_{1j} = b_j; j = \overline{1, n}; a_{j1} = a_j, j = \overline{1, n},$$

причому, модель (1) прийме вид:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = -\sum_{j=1}^n \beta_j(t) b_j y_j(t) + u(t); \\ \frac{dy_j(t)}{dt} = -\alpha_j(t) a_j x(t) + v_j(t); & j = \overline{1, n}; \end{cases}$$

$$x(0) = x^0; y_j(0) = y_j^0; j = \overline{1, n};$$

$$\sum_{j=1}^n \beta_j(t) = 1; \beta_j(t) \geq 0; j = \overline{1, n};$$

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j(t) = 1; \alpha_j(t) \geq 0; j = \overline{1, n}; \quad (6)$$

$$0 \leq u(t) \leq c;$$

$$0 \leq v_j(t) \leq d_j; j = \overline{1, n};$$

$$\int_0^T u(t) dt \leq A; \int_0^T v_j(t) dt \leq B_j; j = \overline{1, n}.$$

У другому випадку маємо:

- 1) $n = 1$;
- 2) $\alpha_{ii}(t) \equiv \alpha_i(t), i = \overline{1, m}; \beta_{ii}(t) \equiv \beta_i(t), i = \overline{1, m};$ (7)
- 3) $v_i(t) \equiv v(t); y_i(t) \equiv y(t);$
- 4) $B_1 = B; y_1^0 = y^0; d_1 = d;$
 $b_{ii} = b_i; i = \overline{1, m}; a_{ii} = a_i, i = \overline{1, n},$

причому модель (1) трансформується в модель наступного вигляду:

$$\begin{cases} \frac{dx_i(t)}{dt} = -\beta_i(t)b_i y(t) + u_i(t); i = \overline{1, m}; \\ \frac{dy(t)}{dt} = -\sum_{i=1}^m \alpha_i(t)a_i x_i(t) + v(t); \\ x_i(0) = x_i^0; i = \overline{1, m}; y(0) = y^0; \\ \sum_{i=1}^m \beta_i(t) = 1; \beta_i(t) \geq 0; i = \overline{1, m}; \\ \sum_{i=1}^m \alpha_i(t) = 1; \alpha_i(t) \geq 0; i = \overline{1, m}; \\ 0 \leq u_i(t) \leq c_i; i = \overline{1, m}; \\ 0 \leq v(t) \leq d; \\ \int_0^T u_i(t) dt \leq A_i; i = \overline{1, m}; \\ \int_0^T v(t) dt \leq B. \end{cases} \quad (8)$$

Для варіанту бою і операції, в якій інформація про стан протистоячої сторони не поступає вважаємо, що перерозподіл вогню не проводиться, потік пострілів бойових засобів угруповання А розподіляється рівномірно по всіх бойових засобах угруповання В відповідно до планів розподілу доль кількостей бойових засобів кожного типу і $\beta(t) = \|\beta_{ji}(t)\|_{m,n}$ угруповань А і В відповідно і навпаки.

У цьому випадку при складанні математичної моделі використовуємо рівняння (1), враховуючи при цьому, що:

$$P_B(x_i) = \frac{x_i(t)}{x_i^0}, i = \overline{1, m} \quad \text{– вірогідність наявності}$$

сті до моменту часу t $x_i(t)$ неуражених бойових засобів угруповання А, тобто вірогідність того, «успішний постріл» бойових засобів угруповання В припаде на неуражені бойові засоби i -го типу угруповання А;

$$P_A(y_j) = \frac{y_j(t)}{y_j^0}, j = \overline{1, n} \quad \text{– вірогідність наявності}$$

до моменту часу t $y_j(t)$ неуражених бойових засобів угруповання В, тобто вірогідність того, «успішний постріл» бойових засобів угруповання А припа-

де на неуражені бойові засоби j -го типу угруповання В. при ухваленні вищезгаданих допущень отримаємо математичну модель динаміки бою і операції між різнорідними бойовими засобами двох угруповань в умовах неповної інформації:

$$\begin{cases} \frac{dx_i(t)}{dt} = -\frac{x_i(t)}{x_i^0} \sum_{j=1}^n \beta_{ij}(t)b_{ij} y_j(t) + u_i(t); i = \overline{1, m}; \\ \frac{dy_j(t)}{dt} = -\frac{y_j(t)}{y_j^0} \sum_{i=1}^m \alpha_{ji}(t)a_{ji} x_i(t) + v_j(t); j = \overline{1, n}; \\ x_i(0) = x_i^0; i = \overline{1, m}; y_j(0) = y_j^0; j = \overline{1, n}; \\ \sum_{i=1}^m \beta_{ij}(t) = 1; j = \overline{1, n}; \beta_{ij}(t) \geq 0; i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}; \\ \sum_{j=1}^n \alpha_{ji}(t) = 1; i = \overline{1, m}; \alpha_{ji}(t) \geq 0; j = \overline{1, n}; i = \overline{1, m}; \\ 0 \leq u_i(t) \leq c_i; i = \overline{1, m}; \\ 0 \leq v_j(t) \leq d_j; j = \overline{1, n}; \\ \int_0^T u_i(t) dt \leq A_i; i = \overline{1, m}; \\ \int_0^T v_j(t) dt \leq B_j; j = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (9)$$

Якщо в моделі (9) припустити, що має місце допущення об рівномірний розподіл потоку пострілів для кожного бойового засобу по всіх бойових засобах кожному з угруповань і відсутні обмеження на темпи надходження і загальну кількість бойових засобів резервів, то ця модель спрощується до вигляду:

$$\begin{cases} \frac{dx_i(t)}{dt} = -\frac{x_i(t)}{x_i^0} \sum_{j=1}^n b_{ij} y_j(t) + u_i(t); i = \overline{1, m}; \\ \frac{dy_j(t)}{dt} = -\frac{y_j(t)}{y_j^0} \sum_{i=1}^m a_{ji} x_i(t) + v_j(t); j = \overline{1, n}; \\ x_i(0) = x_i^0; i = \overline{1, m}; y_j(0) = y_j^0; j = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (10)$$

і стає узагальненням моделі Дінера для випадку, коли кожне з угруповань А і В складається з кінцевого числа різнорідних груп бойових засобів.

Проста модель – модель Дінера, витікає з моделі (10) при додатковому допущенні про те, що кожне з угруповань складається з однорідних бойових засобів, тобто $m = n = 1$, $b_{11} = b$, $a_{11} = a$, $x_1(t) \equiv x(t)$, $y_1(t) \equiv y(t)$, $u_1(t) \equiv u(t)$, $x_1^0 = x^0$, $y_1^0 = y^0$, або маємо

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = -\frac{b}{x_0} x(t) y(t) + u(t); i = \overline{1, m}; \\ \frac{dy_j(t)}{dt} = -\frac{a}{y_0} x(t) y(t) + v(t); j = \overline{1, n}; \\ x(0) = x^0; y(0) = y^0. \end{cases} \quad (11)$$

Аналогічно виконаному вище виділимо два окремі випадки моделі (9): бою і операції між однорідним угрупованням А проти різнорідних бойових засобів угруповання В і бою і операції різнорідних бойових засобів угруповання А проти однорідних бойових засобів угруповання В.

У першому випадку маємо умови (5), причому модель (9) прийме вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = -\frac{x(t)}{x^0} \sum_{j=1}^n \beta_j(t) b_j y_j(t) + u(t); & i = \overline{1, n}; \\ \frac{dy_j(t)}{dt} = -\frac{a_j}{y^0} \alpha_j(t) y_j(t) x(t) + v_j(t); & j = \overline{1, n}; \end{cases}$$

$$x(0) = x^0; \quad y_j(0) = y_j^0; \quad j = \overline{1, n};$$

$$\sum_{j=1}^n \beta_j(t) = 1; \quad \beta_j(t) \geq 0; \quad j = \overline{1, n};$$

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j(t) = 1; \quad \alpha_j(t) \geq 0; \quad j = \overline{1, n}; \quad (12)$$

$$0 \leq u(t) \leq c;$$

$$0 \leq v_j(t) \leq d_j; \quad j = \overline{1, n};$$

$$\int_0^T u(t) dt \leq A;$$

$$\int_0^T v_j(t) dt \leq B_j; \quad j = \overline{1, n}.$$

Для другого випадку мають місце умови (7), причому модель (9) прийме наступний вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dx_i(t)}{dt} = -\frac{b_i}{x^0} \beta_i(t) x_i(t) y(t) + u_i(t); & i = \overline{1, m}; \\ \frac{dy(t)}{dt} = -\frac{y(t)}{y^0} \sum_{i=1}^m \alpha_i(t) a_i x_i(t) + v(t); \end{cases}$$

$$x_i(0) = x_i^0; \quad i = \overline{1, m}; \quad y(0) = y^0;$$

$$\sum_{i=1}^m \beta_i(t) = 1; \quad \beta_i(t) \geq 0; \quad i = \overline{1, m};$$

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i(t) = 1; \quad \alpha_i(t) \geq 0; \quad i = \overline{1, m}; \quad (13)$$

$$0 \leq u_i(t) \leq c_i; \quad i = \overline{1, m};$$

$$0 \leq v(t) \leq d;$$

$$\int_0^T u_i(t) dt \leq A_i; \quad i = \overline{1, m}; \quad \int_0^T v(t) dt \leq B.$$

Відмітимо, що якщо в моделях (1), (6), (8), (12) і (13) плани розподілу доль кількостей бойових засобів визначені до початку бою і операції і не міняються в ході бою, тобто

$$\alpha_{ji}(t) \equiv \alpha_{ji} \equiv \text{const}, \quad \beta_{ij}(t) \equiv \beta_{ij} \equiv \text{const},$$

$$\alpha_i(t) \equiv \alpha_i \equiv \text{const}, \quad \beta_j(t) \equiv \beta_j \equiv \text{const}.$$

Висновки

1. У статті викладений опис моделі бою і операції з повною інформацією, що не запізнюється, про стан протистоячого угруповання, коли кожне з угруповань А і В складається з кінцевого числа різнорідних груп бойових засобів. Отримана модель є узагальненням моделі Ланчестера.

2. Запропонована математична модель дозволяє отримати дві приватні моделі: бою і операції між однорідним угрупованням А проти різнорідних бойових засобів угруповання В і бою і операція різнорідних бойових засобів угруповання А проти однорідних бойових засобів угруповання В.

3. Викладений опис моделі бою і операції, в якій інформація про стан протистоячої сторони не поступає, перерозподіл вогню не проводиться, потік пострілів бойових засобів протидіючих угруповань А і В розподіляється рівномірно по всіх бойових засобах угруповань. Отримана модель є узагальненням моделі Дінера для випадку, коли кожне з угруповань А і В складається з кінцевого числа різнорідних груп бойових засобів.

4. Запропоновані математичні співвідношення для двох приватних випадку узагальненої моделі Дінера: бою і операції між однорідним угрупованням А проти різнорідних бойових засобів угруповання В і бій і операція різнорідних бойових засобів угруповання А проти однорідних бойових засобів угруповання В.

5. Якщо в моделях (1), (6), (8), (12) і (13) плани розподілу доль кількостей бойових засобів визначені до початку бою і операції і не міняються в ході бою, то долі бойових засобів і-х і j-х типів протидіючих угруповань В А у момент часу t є постійними.

6. Запропоновані математичні моделі можна використовувати при рішенні задач, пов'язаних із створенням автоматизованої системи управління військами і зброєю ВС України.

Список літератури

1. Lanchester F. *Aircraft in warfare*. – London, 1916 – 120 p.
2. *Основы исследования операций в военной технике* / Под ред. Ю.В. Чуева. – М.: Сов. радио, 1965. – 383 с.
3. Осинский Л.М. *Элементы исследования операций и оценка эффективности сил и средств противовоздушной обороны*. – К.: КВИРТУ, 1968. – 444 с.
4. Чуев Ю.В. *Исследование операций в военном деле*. – М.: Воениздат, 1970. – 256 с.
5. *Справочник по исследованию операций* / Под общ. ред. Ф. А. Матвейчука. – М.: Воениздат, 1979. – 368 с.

Надійшла до редколегії 17.09.2007

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.М. Більчук, Харківський університет Повітряних сил, ім. І. Кожедуба, Харків.