УДК 623.021: 005

В.Б. Кононов

Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ДИНАМІКИ БОЮ І ОПЕРАЦІЇ ДВОХ УГРУПУВАНЬ В УМОВАХ ПОВНОЇ І НЕПОВНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

У статті викладені математичні моделі ведення бою і операції між різнорідними бойовими засобами протиборчих угрупувань в умовах повної і неповної інформації, що дозволяють оцінити стан угрупування супротивника, а також дати рекомендації по розподілу кількості своїх сил і засобів при плануванні і веденні військових дій.

математична модель, протиборче угрупування, умови повної і неповної інформації

Вступ

Постановка завдання. При плануванні розподілу кількості сил і засобів кожного типу озброєння необхідно враховувати вогняну потужність і кількісний склад вживаних бойових засобів, темпи нарощування сил для у відповідь удару, співвідношення сил і засобів, темпи відновлення бойових засобів і т.д. Отримані рекомендації по плануванню операцій повинні використовуватися командуванням при ухваленні рішення на ведення військових дій. Оцінка стану супротивника в умовах повної і неповної інформації при плануванні і подальшому веденні бойових дій є важливим військово-науковим завданням, актуальність якого визначається необхідністю створення в Озброєних Силах України автоматизованої системи управління військами і зброєю.

Аналіз літератури. У відомій літературі, присвяченій дослідженню операцій у військовій справі [1 – 5] розглядаються питання застосування дослідження операцій до рішення задач управління військами. При цьому основна увага приділена імовірнісним оцінкам, за допомогою яких визначається вірогідність виконанні бойових завдань конфліктуючими угрупуваннями. Проте в цих роботах не розглядаються математичні моделі ведення бою і операції між різнорідними бойовими засобами протиборчих угрупувань в умовах повної і неповної інформації про супротивника, що дозволяють оцінити стан його угрупування, а також дати рекомендації при розподілі кількості своїх сил і засобів при плануванні і веденні військових дій.

Метою статті є розробка моделей бою і операції з повною і не інформацією, що запізнюється, а так само не повною інформацією про стан протистоячого угрупування з миттєвим обліком цієї інформації відповідно до планів розподілу доль кількостей бойових засобів кожного типу.

Основний матеріал

На початку розглянемо бій і операцію з повною інформацією, що не запізнюється, про стан протистоячого угрупування (у розпорядженні кожного угрупування є точна інформація про те, які цілі уражені) з миттєвим обліком цієї інформації (перенесення вогню на неуражені цілі здійснюється миттєво) відповідно до планів розподілу доль кількостей бойових засобів кожного типа і $\beta(t)=\left\|\beta_{ji}(t)\right\|_{m,n}$ угрупувань А і В відповідно.

При складанні моделі такого бою і операції приймаємо наступні допущення:

– m – кількість типів різнорідних бойових засобів угрупування A;

– n – кількість типів різнорідних бойових засобів угрупування B;

– $x_i(t)\left(i=\overline{1,m}\right)$ – математичне очікування кількості бойових засобів i – го типу угрупування A, що збереглися до моменту часу t;

– $y_j(t)\left(j=\overline{1,n}\right)$ – математичне очікування кількості бойових засобів j – го типу угрупування B, що збереглися до моменту часу t;

– $a_{ji}=\lambda_i P_{ji}\left(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}\right)$ – ефективна скорострільність бойового засобу i – го типу угрупування A по бойовому засобу j – го типу угрупування B;

– $\lambda_i\left(i=\overline{1,m}\right)$ – середня скорострільність бойового засобу i – го типу угрупування A;

– $P_{ji}\left(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}\right)$ – вірогідність поразки одним пострілом бойовим засобом i – го типу угрупування A А бойового засобу j – го типу угрупування B;

– $b_{ij}=\mu_j Q_{ij}\left(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}\right)$ – ефективна скорострільність бойового засобу j – го типу угрупування B по бойовому засобу i – го типу угрупування A;

– $\mu_j\left(\ j=\overline{1,n}\right)$ – середня скорострільність бойового засобу j – го типу угрупування B;

– $Q_{ij}\left(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}\right)$ – вірогідність поразки одним пострілом бойовим засобом j – го типу угрупування B по бойовому засобу i – го типу угрупування A;

– $\alpha_{ji}(t)\left(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}\right)$ – частка бойових засобів i – го типу угрупування A, протидіючих бойовим засобам j – го типу угрупування B В у момент часу t;

– $\beta_{ij}(t)\left(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}\right)$ – частка бойових засобів j – го типу угрупування B, протидіючих бойовим засобам i – го типу угрупування A А у момент часу t;

– $c_i\left(i=\overline{1,m}\right), d_j\left(j=\overline{1,n}\right), A_i\left(i=\overline{1,m}\right), B_j\left(j=\overline{1,n}\right)$ – задані позитивні числа, визначувані обмеженнями на темпи надходження резерву і загальну кількість наявних бойових засобів угрупувань В А і В відповідно;

– $u_i(t)\left(i=\overline{1,m}\right)$ – інтенсивність надходження бойових засобів i – го типу угрупування A;

– $v_j(t)\left(j=\overline{1,n}\right)$ – інтенсивність надходження бойових засобів j – го типу угрупування B;

– $x_i^0\left(i=\overline{1,m}\right)$ – кількість бойових засобів i – го типу угрупування A до початку бою;

– $y_j^0\left(j=\overline{1,n}\right)$ – кількість бойових засобів j – го типу угрупування B до початку бою і операції;

– T – час ведення бойових дій.

В цьому випадку маємо: $P_B\left(x_i\right)=1, i=\overline{1,m}$; $P_A\left(y_j\right)=1, j=\overline{1,n}$, і при прийнятих позначеннях отримаємо математичну модель динаміки бою і операції між різнорідними бойовими засобами двох угрупувань в умовах повної інформації і миттєвим перенесенням вогню на неуражені цілі:

$$\begin{cases}\dfrac{dx_i(t)}{dt}=-\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_{ij}(t)b_{ij}y_j(t)+u_i(t);\ i=\overline{1,m};\\ \dfrac{dy_j(t)}{dt}=-\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_{ji}(t)a_{ji}x_i(t)+v_j(t);\ j=\overline{1,n};\end{cases}$$

$$x_{i(0)}=x_i^0;\ \left(i=\overline{1,m}\right);\ y_{j(0)}=y_j^0;\ \left(j=\overline{1,n}\right);$$

$$\sum_{i=1}^{m}\beta_{ij}(t)=1;\ j=\overline{1,n};\ \beta_{ij}(t)\ge 0;\ i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n};$$

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ji}(t)=1;\ i=\overline{1,m};\ \alpha_{ji}(t)\ge 0;\ j=\overline{1,n};\ i=\overline{1,m};\quad (1)$$

$$0\le u_i(t)\le c_i;\ i=\overline{1,m};\quad 0\le v_j(t)\le d_j;\ j=\overline{1,n};$$

$$\int_0^T u_i(t)dt\le A_i;\ i=\overline{1,m};\ \int_0^T v_j(t)dt\le B_j;\ j=\overline{1,n}.$$

Якщо в модель (1) ввести допущення про ведення вогню кожним бойовим засобом по будь-якому бойовому засобу кожному з угрупувань і відсутності обмежень на темпи надходження і загальну кількість бойових засобів резервів, то необхідність в параметрах $\alpha_{ji}(t)$ і $\beta_{ij}(t)$ і обмеженнях (2) відпадає, а модель (1) спрощується до вигляду:

$$\begin{cases}\dfrac{dx_i(t)}{dt}=-\sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij}y_j(t)+u_i(t);\ i=\overline{1,m};\\ \dfrac{dy_j(t)}{dt}=-\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ji}x_i(t)+v_j(t);\ j=\overline{1,n};\end{cases}\quad (3)$$

$$x_{i(0)}=x_i^0;\ \left(i=\overline{1,m}\right);\ y_{j(0)}=y_j^0;\ \left(j=\overline{1,n}\right)$$

і стає узагальненням моделі Ланчестера для випадку, коли кожне з угрупувань А і В складається з кінцевого числа різнорідних груп бойових засобів.

Нарешті, проста модель – модель Ланчестера, витікає з моделі (3) при додатковому допущенні про те, що кожне з угрупувань складається з однорідних бойових засобів, тобто $m=n=1$, $b_{11}=b$, $a_{11}=a$, $y_1(t)\equiv y(t)$, $u_1(t)\equiv u(t)$, $x_1^0(t)=x^0$, $y_1^0(t)=y^0$, або маємо

$$\begin{cases}\dfrac{dx_i(t)}{dt}=-by(t)+u(t);\\ \dfrac{dy_j(t)}{dt}=-ax(t)+v(t);\end{cases}\quad (4)$$

$$x_{(0)}=x^0,\quad y_{(0)}=y^0.$$

Відзначимо два важливі окремі випадки моделі (1): бій і операція між однорідним угрупуванням А проти різнорідних бойових засобів угрупування В і бій і операція різнорідних бойових засобів угрупування А проти однорідних бойових засобів угрупування В.

У першому випадку маємо:

1) $m=1$;

2) $\beta_{1j}(t)\equiv\beta_j(t), j=\overline{1,n};\ \alpha_{j1}(t)\equiv\alpha_j(t), j=\overline{1,n};$ (5)

3) $u_1(t)\equiv u(t)$; $x_1(t)\equiv x(t)$;

4) $A_1=A;\ x_1^0=x^0;\ c_1=c;\ b_{1j}=b_j;\ j=\overline{1,n};\ a_{j1}=a_j,\ j=\overline{1,n},$

причому, модель (1) прийме вид:

$$\begin{cases}\dfrac{dx(t)}{dt}=-\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_j(t)b_jy_j(t)+u(t);\\ \dfrac{dy_j(t)}{dt}=-\alpha_j(t)a_jx(t)+v_j(t);\ j=\overline{1,n};\end{cases}$$

$$x_{(0)}=x^0;\ y_{j(0)}=y_j^0;\ j=\overline{1,n};$$

$$\sum_{j=1}^{n}\beta_j(t)=1;\ \beta_j(t)\ge 0;\ j=\overline{1,n};$$

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(t)=1;\ \alpha_j(t)\ge 0;\ j=\overline{1,n};\quad (6)$$

$$0\le u(t)\le c;$$

$$0\le v_j(t)\le d_j;\ j=\overline{1,n};$$

$$\int_0^T u(t)dt\le A;\ \int_0^T v_j(t)dt\le B_j;\ j=\overline{1,n}.$$

У другому випадку маємо:

1) $n = 1$;

2) $\alpha_{1i}(t) \equiv \alpha_i(t), i = \overline{1, m}; \ \beta_{i1}(t) \equiv \beta_i(t), i = \overline{1, m};$ (7)

3) $v_1(t) \equiv v(t)$; $y_1(t) \equiv y(t)$;

4) $B_1 = B;\ y_1^0 = y^0;\ d_1 = d;$
$b_{1i} = b_i;\ i = \overline{1, m};\ a_{1i} = a_i,\ \ i = \overline{1, n},$

причому модель (1) трансформується в модель наступного вигляду:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i(t)}{dt} = -\beta_i(t)\, b_i\, y(t) + u_i(t);\ i = \overline{1, m}; \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = -\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i(t)\, a_i\, x_i(t) + v(t); \end{cases}$$

$$x_{i(0)} = x_i^0;\ i = \overline{1, m};\qquad y_{(0)} = y^0;$$

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i(t) = 1;\ \beta_i(t) \ge 0;\ i = \overline{1, m};$$

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i(t) = 1;\ \alpha_i(t) \ge 0;\ i = \overline{1, m}; \tag{8}$$

$$0 \le u_i(t) \le c_i;\ i = \overline{1, m};$$

$$0 \le v(t) \le d;$$

$$\int_0^T u_i(t)\, dt \le A_i;\ i = \overline{1, m};$$

$$\int_0^T v(t)\, dt \le B.$$

Для варіанту бою і операції, в якій інформація про стан протистоячої сторони не поступає вважатимемо, що перерозподіл вогню не проводиться, потік пострілів бойових засобів угрупування А розподіляється рівномірно по всіх бойових засобах угрупування В відповідно до планів розподілу доль кількостей бойових засобів кожного типа і $\beta(t) = \left\| \beta_{ji}(t) \right\|_{m,n}$ угрупувань А і В відповідно і навпаки.

У цьому випадку при складанні математичної моделі використовуємо рівняння (1), враховуючи при цьому, що:

$P_B(x_i) = \dfrac{x_i(t)}{x_i^0},\ i = \overline{1, m}$ – вірогідність наявності до моменту часу t $x_i(t)$ неуражених бойових засобів угрупування А, тобто вірогідність того, «успішний постріл» бойових засобів угрупування В припаде на неуражені бойові засоби i -го типа угрупування А;

$P_A(y_j) = \dfrac{y_j(t)}{y_j^0},\ j = \overline{1, n}$ – вірогідність наявності до моменту часу t $y_j(t)$ неуражених бойових засобів угрупування В, тобто вірогідність того, «успішний постріл» бойових засобів угрупування А припаде на неуражені бойові засоби j -го типа угрупування В. при ухваленні вищезгаданих допущень отримаємо математичну модель динаміки бою і операції між різнорідними бойовими засобами двох угрупувань в умовах неповної інформації:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i(t)}{dt} = -\dfrac{x_i(t)}{x_i^0} \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_{ij}(t) b_{ij} y_j(t) + u_i(t);\ i = \overline{1, m}; \\ \dfrac{dy_j(t)}{dt} = -\dfrac{y_j(t)}{y_j^0} \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_{ji}(t) a_{ji} x_i(t) + v_j(t);\ j = \overline{1, n}; \end{cases}$$

$$x_{i(0)} = x_i^0;\ i = \overline{1, m};\quad y_{j(0)} = y_j^0;\ j = \overline{1, n};$$

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_{ij}(t) = 1;\ \ j = \overline{1, n};\ \beta_{ij}(t) \ge 0;\ \ i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n};$$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji}(t) = 1;\ \ i = \overline{1, m};\ \alpha_{ji}(t) \ge 0;\ \ j = \overline{1, n};\ i = \overline{1, m}; \tag{9}$$

$$0 \le u_i(t) \le c_i;\ i = \overline{1, m};$$

$$0 \le v_j(t) \le d_j;\ \ j = \overline{1, n};$$

$$\int_0^T u_i(t) dt \le A_i;\ i = \overline{1, m};$$

$$\int_0^T v_j(t) dt \le B_j;\ \ j = \overline{1, n}.$$

Якщо в моделі (9) припустити, що має місце допущення об рівномірний розподіл потоку пострілів для кожного бойового засобу по всіх бойових засобах кожному з угрупувань і відсутні обмеження на темпи надходження і загальну кількість бойових засобів резервів, то ця модель спрощується до вигляду:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i(t)}{dt} = -\dfrac{x_i(t)}{x_i^0} \sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij} y_j(t) + u_i(t);\ i = \overline{1, m}; \\ \dfrac{dy_j(t)}{dt} = -\dfrac{y_j(t)}{y_j^0} \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ji} x_i(t) + v_j(t);\ \ j = \overline{1, n}; \end{cases} \tag{10}$$

$$x_{i(0)} = x_i^0;\ i = \overline{1, m};\ \ y_{j(0)} = y_j^0;\ j = \overline{1, n},$$

і стає узагальненням моделі Дінера для випадку, коли кожне з угрупувань А і В складається з кінцевого числа різнорідних груп бойових засобів.

Проста модель – модель Дінера, витікає з моделі (10) при додатковому допущенні про те, що кожне з угрупувань складається з однорідних бойових засобів, тобто $m = n = 1$, $b_{11} = b$, $a_{11} = a$, $x_1(t) \equiv x(t)$, $y_1(t) \equiv y(t)$, $u_1(t) \equiv u(t)$, $x_1^0 = x^0$, $y_1^0 = y^0$, або маємо

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = -\dfrac{b}{x_0} x(t)\, y(t) + u(t);\ \ i = \overline{1, m}; \\ \dfrac{dy_j(t)}{dt} = -\dfrac{a}{y_0} x(t)\, y(t) + v(t);\ \ j = \overline{1, n}; \end{cases} \tag{11}$$

$$x_{(0)} = x^0;\quad y_{(0)} = y^0.$$

Аналогічно виконаному вище виділимо два окремі випадки моделі (9): бою і операції між однорідним угрупуванням **А** проти різнорідних бойових засобів угрупування В і бою і операції різнорідних бойових засобів угрупування А проти однорідних бойових засобів угрупування В.

У першому випадку маємо умови (5), причому модель (9) прийме вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = -\dfrac{x(t)}{x^0}\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_j(t)\, b_j\, y_j(t) + u(t); \; i = \overline{1,m}; \\ \dfrac{dy_j(t)}{dt} = -\dfrac{a_j}{y^0}\alpha_j(t)\, y_j(t)\, x(t) + v_j(t); \; j = \overline{1,n}; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & x_{(0)} = x^0; \;\; y_{j(0)} = y_j^0; \; j = \overline{1,n}; \\ & \sum_{j=1}^{n}\beta_j(t) = 1; \; \beta_j(t) \ge 0; \; j = \overline{1,n}; \\ & \sum_{j=1}^{n}\alpha_j(t) = 1; \; \alpha_j(t) \ge 0; \; j = \overline{1,n}; \\ & 0 \le u(t) \le c; \\ & 0 \le v_j(t) \le d_j; \; j = \overline{1,n}; \\ & \int_0^T u(t)dt \le A; \\ & \int_0^T v_j(t)dt \le B_j; \; j = \overline{1,n}. \end{aligned} \tag{12}$$

Для другого випадку мають місце умови (7), причому модель (9) прийме наступний вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i(t)}{dt} = -\dfrac{b_i}{x^0}\beta_i(t)\, x_i(t)\, y(t) + u_i(t); \; i = \overline{1,m}; \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = -\dfrac{y(t)}{y^0}\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i(t)\, a_i\, x_i(t) + v(t); \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & x_{i(0)} = x_i^0; \; i = \overline{1,m}; \;\; y_{(0)} = y^0; \\ & \sum_{i=1}^{m}\beta_i(t) = 1; \; \beta_i(t) \ge 0; \; i = \overline{1,m}; \\ & \sum_{i=1}^{m}\alpha_i(t) = 1; \; \alpha_i(t) \ge 0; \; i = \overline{1,m}; \\ & 0 \le u_i(t) \le c_i; \; i = \overline{1,m}; \\ & 0 \le v(t) \le d; \\ & \int_0^T u_i(t)\,dt \le A_i; \; i = \overline{1,m}; \;\; \int_0^T v(t)\,dt \le B. \end{aligned} \tag{13}$$

Відмітимо, що якщо в моделях (1), (6), (8), (12) і (13) плани розподілу доль кількостей бойових засобів визначені до початку бою і операції і не міняються в ході бою, тобто

$$\alpha_{ji}(t) \equiv \alpha_{ji} \equiv \text{const}, \;\; \beta_{ij}(t) \equiv \beta_{ij} \equiv \text{const},$$

$$\alpha_i(t) \equiv \alpha_i \equiv \text{const}, \;\; \beta_j(t) \equiv \beta_j \equiv \text{const}.$$

Висновки

1. У статті викладений опис моделі бою і операції з повною інформацією, що не запізнюється, про стан протистоячого угрупування, коли кожне з угрупувань А і В складається з кінцевого числа різнорідних груп бойових засобів. Отримана модель є узагальненням моделі Ланчестера.

2. Запропонована математична модель дозволяє отримати дві приватні моделі: бою і операції між однорідним угрупуванням А проти різнорідних бойових засобів угрупування В і бою і операція різнорідних бойових засобів угрупування А проти однорідних бойових засобів угрупування В.

3. Викладений опис моделі модель бою і операції, в якій інформація про стан протистоячої сторони не поступає, перерозподіл вогню не проводиться, потік пострілів бойових засобів протидіючих угрупувань А і В розподіляється рівномірно по всіх бойових засобах угрупувань. Отримана модель є узагальненням моделі Дінера для випадку, коли кожне з угрупувань А і В складається з кінцевого числа різнорідних груп бойових засобів.

4. Запропоновані математичні співвідношення для двох приватних випадку узагальненої моделі Дінера: бою і операції між однорідним угрупуванням А проти різнорідних бойових засобів угрупування В і бій і операція різнорідних бойових засобів угрупування А проти однорідних бойових засобів угрупування В.

5. Якщо в моделях (1), (6), (8), (12) і (13) плани розподілу доль кількостей бойових засобів визначені до початку бою і операції і не міняються в ході бою, то долі бойових засобів $i-x$ і $j-x$ типів протидіючих угруповань В А у момент часу t є постійними.

6. Запропоновані математичні моделі можна використовувати при рішенні задач, пов'язаних із створенням автоматизованої системи управління військами і зброєю ВС України.

Список літератури

1. *Lanchester F. Aireraft in warfare. –London, 1916 – 120 p.*

2. *Основы исследования операций в военной технике / Под ред. Ю.В. Чуева. – М.: Сов. радио, 1965. – 383 с.*

3. *Осинский Л.М. Элементы исследования операций и оценка эффективности сил и средств противовоздушой обороны. – К.: КВИРТУ, 1968. – 444 с.*

4. *Чуев Ю.В. Исследование операций в военном деле. – М.: Воениздат, 1970. – 256 с.*

5. *Справочник по исследованию операций / Под общ. ред. Ф. А. Матвейчука. – М.: Воениздат, 1979. – 368 с.*

Надійшла до редколегії 17.09.2007

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.М. Більчук, Харківський університет Повітряних сил, ім. І. Кожедуба, Харків.