
УДК 519.85

Т.Е. Романова, А.А. Коваленко

Институт проблем машиностроения НАН Украины, Харьков

PHI-ФУНКЦИИ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ОГРАНИЧЕНИЙ ВКЛЮЧЕНИЯ В ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ БАЛАНСНОЙ КОМПОНОВКИ

Строится полный класс ϕ -функций для моделирования отношения включения объектов, имеющих форму цилиндра, параллелепипеда, правильной призмы и шара в цилиндрический, параболоидный контейнер, а также контейнер, имеющий форму усеченного конуса.

Ключевые слова: 3D-объекты, компоновка, математическое моделирование, ϕ -функция, отношение включения.

Введение

Оптимизационные задачи компоновки представляют большой интерес в области космической инженерии [1] при размещении оборудования в модульных отсеках космических кораблей и спутников. Задачи оптимальной компоновки относятся к классу NP-сложных задач, для решения которых используются эвристические алгоритмы.

Для разработки эффективных методов решения с привлечением методов локальной и глобальной

оптимизации необходимо построение адекватных математических моделей задач рассматриваемого класса.

В основе построения математической модели – аналитическое описание ограничений на непересечение объектов, размещение объектов в области с учетом ограничений механического поведения и ограничений на минимально допустимые расстояния. Как известно [2], наиболее мощным средством аналитического описания отношений геометрических объектов является метод ϕ -функций Стояна [3].

В статьях [4 – 6] предлагаются *phi*-функции для некоторых базовых 3D-объектов. В данной работе строится полный класс *phi*-функций для моделирования отношения включения объектов, имеющих форму цилиндра, параллелепипеда, правильной призмы и шара в цилиндрический, параболоидный контейнер, а также контейнер, имеющий форму усеченного конуса. Рассматриваемые формы объектов и контейнеров выделены, исходя из особенностей задач компоновки оборудования в модульных отсеках космических кораблей и спутников.

Контейнеры

В качестве моделей контейнеров рассматриваются цилиндры, параболоиды и усеченные конусы. (рис. 1)

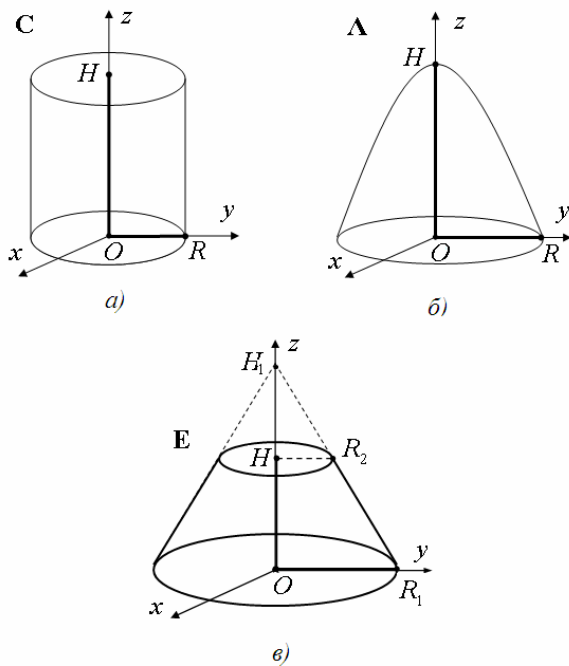


Рис. 1. Модели контейнеров

Пусть \tilde{N} – контейнер цилиндрической формы с метрическими характеристиками (R, H) (рис. 1, а), где R – радиус основания, H – высота цилиндра; Λ – контейнер параболоидной формы с метрическими характеристиками (R, H) (рис. 1, б), где R – радиус основания, H – высота параболоидного контейнера, при этом

$$\Lambda = Q \cap G,$$

$$Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -z - x^2 - y^2 + H \geq 0\},$$

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0\};$$

E – контейнер, имеющий форму усеченного конуса с метрическими характеристиками (R_1, R_2, H) (рис. 1, в), где R_1, R_2 – радиусы нижнего и верхнего оснований, H – высота усеченного конуса, при этом

$$E = E_1 \cap G_1 \cap G_2, \quad G_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0\},$$

$$G_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -z + H \geq 0\},$$

$$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -z - \frac{H_1}{R_1} \sqrt{x^2 + y^2} + H_1 \geq 0\},$$

где
$$H_1 = \frac{R_1 H}{R_1 - R_2}.$$
 (1)

Пусть

$$C^* = \mathbb{R}^3 \setminus \text{int } \tilde{N}, \quad \Lambda^* = \mathbb{R}^3 \setminus \text{int } \Lambda, \quad E^* = \mathbb{R}^3 \setminus \text{int } E.$$

Каждый из объектов C^*, Λ^*, E^* задан в неподвижной системе координат $\hat{I} \text{ хуz}$, поскольку контейнеры C, Λ, E считаются неподвижными. Полос \hat{I} объектов совпадает с началом их собственной системой координат.

Размещаемые объекты

В качестве размещаемых объектов рассматриваются прямые круговые цилиндры, прямые прямоугольные параллелепипеды, прямые правильные призмы и шары.

Пусть C – цилиндр с метрическими характеристиками (r, h) , где r – радиус основания, h – полувысота; P – параллелепипед с метрическими характеристиками (w, l, h) , где w – полудлина, l – полуширина, h – полувысота; K – прямая правильная призма с метрическими характеристиками (m, r, h) , где r – радиус описанной окружности около правильного m -угольника, h – полувысота; а S – шар радиуса r (рис. 2).

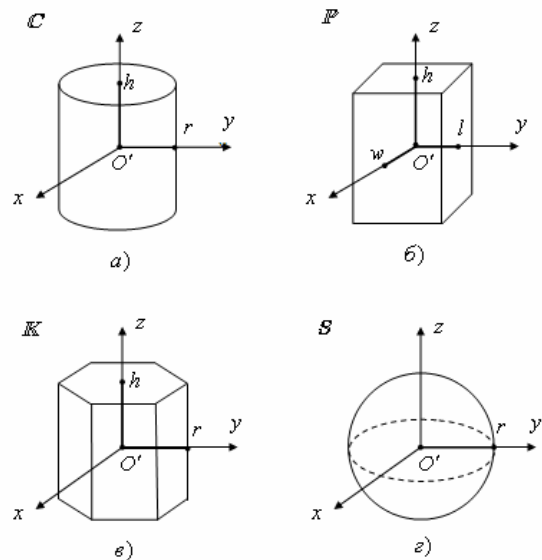


Рис. 2. Размещаемые объекты

Координаты полюса $\hat{I}' = (x, y, z)$ размещаемых объектов C, P, K, S являются переменными параметрами размещения относительно неподвижной системы $\hat{I} \text{ хуz}$. Полагаем, что полюс \hat{I}' находится в центре симметрии рассматриваемой фигуры (рис. 2).

Phi-функции

Пусть $A(u_1)$ и $B(u_2)$ – два произвольных 3D-объекта, где $u_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $u_2 = (x_2, y_2, z_2)$ – переменные вектора трансляции (параметры размещения), соответственно.

Как известно [3], всюду определенная непрерывная функция называется *phi*-функцией, если выполняются следующие условия:

- $\Phi(u_1, u_2) > 0$, если $A(u_1) \cap B(u_2) = \emptyset$;
- $\Phi(u_1, u_2) = 0$, если

$$\begin{cases} \text{fr}A(u_1) \cap \text{fr}B(u_2) \neq \emptyset \\ \text{int}A(u_1) \cap \text{int}B(u_2) = \emptyset \end{cases}$$
- $\Phi(u_1, u_2) < 0$, если $\text{int}A(u_1) \cap \text{int}B(u_2) \neq \emptyset$.

В терминах *phi*-функции ограничение включения объекта A в контейнер B описывается следующим образом: $\Phi^{AB^*} \geq 0$, где $B^* = \mathbb{R}^3 \setminus \text{int}B$.

Проекция нулевого уровня γ_{12} *phi*-функции Φ^{AB^*} определяется как $\gamma_{12} = \text{fr}(B^*(0) \oplus A(0))$.

Phi-функция для объектов C^* и S определяется так [4]:

$$\Phi^{C^*S} = \min\{\Phi^{C_z^*N}, \xi_1, \xi_2\}, \quad (2)$$

где $\xi_1 = z - r, \quad (3)$

$$\xi_2 = H - z - r, \quad (4)$$

$$\Phi^{N_z^*N} = -x^2 - y^2 + (R - r)^2. \quad (5)$$

Phi-функция для объектов C^* и C может быть представлена в виде (1) [4], полагая

$$\xi_1 = z - h, \quad (6)$$

$$\xi_2 = H - z - h. \quad (7)$$

Аналогично предыдущему случаю можно построить *phi*-функцию для объектов C^* и \mathbb{K} , если описать прямой круговой цилиндр C около правильной призмы \mathbb{K} . Тогда *phi*-функция $\Phi^{C^*\mathbb{K}}$ может быть определена в виде (2) с учетом равенств (5)-(7).

Phi-функцию для объектов C^* и \mathbb{P} можно определить следующим образом [4]:

$$\Phi^{C^*\mathbb{P}} = \min\{\xi_1, \xi_2, f_i, i = 1, \dots, 4\}, \quad (8)$$

где ξ_1 и ξ_2 определяются равенствами (6) и (7), а f_i – функции вида

$$f_1 = -(x + w)^2 - (y + l)^2 + R^2,$$

$$f_2 = -(x - w)^2 - (y + l)^2 + R^2,$$

$$f_3 = -(x + w)^2 - (y - l)^2 + R^2,$$

$$f_4 = -(x - w)^2 - (y - l)^2 + R^2.$$

Phi-функцию для объектов Λ^* и \mathbb{P} можно определить так:

$$\Phi^{\Lambda^*\mathbb{P}} = \min\{\xi_1, f_i, i = 1, \dots, 4\}, \quad (9)$$

где ξ_1 определяется отношением (6), а f_i – функции:

$$f_1 = -z - (x + w)^2 - (y + l)^2 + H - h;$$

$$f_2 = -z - (x + w)^2 - (y - l)^2 + H - h;$$

$$f_3 = -z - (x - w)^2 - (y + l)^2 + H - h;$$

$$f_4 = -z - (x - w)^2 - (y - l)^2 + H - h.$$

Проекция нулевого уровня для $\Phi^{\Lambda^*\mathbb{P}}$ приведена на рис. 3, а.

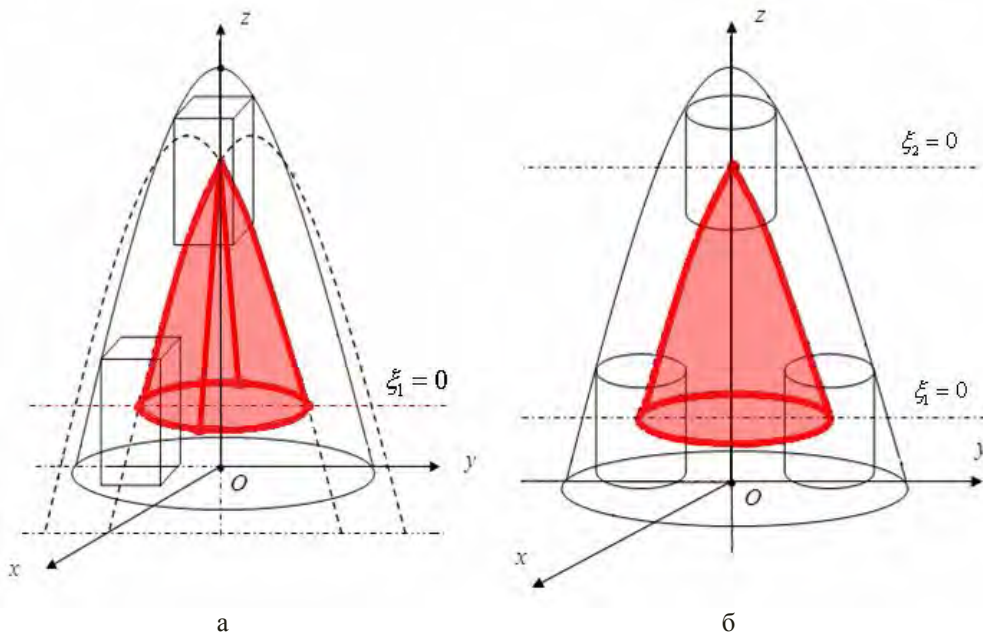


Рис. 3. Проекция нулевого уровня γ_{12} *phi*-функции для объектов: а – Λ^* и \mathbb{K} б – Λ^* и \mathbb{C}

Phi-функция для объектов Λ^* и C определяется отношением (2), где ξ_1 имеет вид (6), $\xi_2 = H - r^2 - h - z$ (рис. 3, б),

$$\Phi^{\tilde{N}_z^* C} = -x^2 - y^2 + (R_{z^*} - r)^2, \quad (10)$$

$$R_{z^*} = \sqrt{\max\{0, H - z - h\}}. \quad (11)$$

Phi-функция для объектов Λ^* и \mathcal{K} , как и для случая с phi-функцией $\Phi^{\Lambda^* C}$, может быть описана соотношением (2) с учетом равенств (10), (11), если описать

цилиндр C около призмы \mathcal{K} . Проекция нулевого уровня γ_{12} phi-функции $\Phi^{\Lambda^* \mathcal{K}}$ изображена на рис. 4, а.

Phi-функцию для объектов Λ^* и S можно определить аналогично, как и phi-функцию для объектов Λ^* и C соотношением (2), полагая

$$\Phi^{\tilde{N}_z^* \tilde{N}} = -x^2 - y^2 + (R_{z^*} - r)^2,$$

$$R_{z^*} = \sqrt{\max\{0, H - z - r\}},$$

ξ_1 определено в (3), $\xi_2 = -z + H - r^2 - 0.25$ (рис. 4, б)

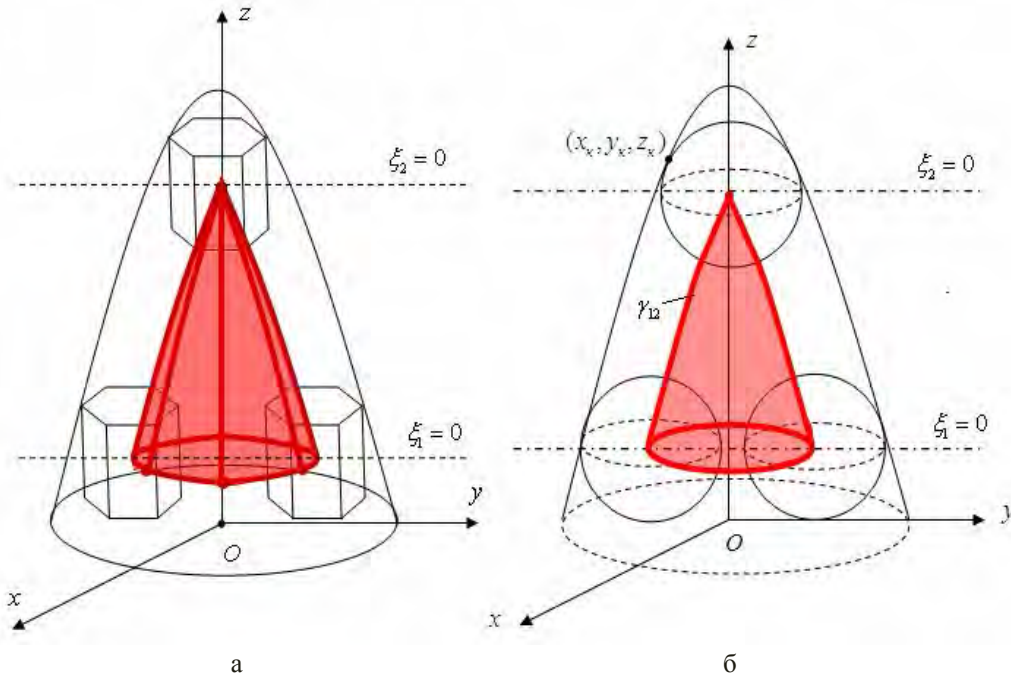


Рис. 4. Проекция нулевого уровня γ_{12} phi-функции для объектов: а – Λ^* и \mathcal{K} ; б – Λ^* и S

Phi-функция для объектов E^* и \mathcal{P} описывается соотношением (8), где ξ_1 и ξ_2 определяются равенствами (6) и (7), а функции f_i имеют вид

$$f_1 = -z - \frac{H_1}{R_1} \sqrt{(x+w)^2 + (y+l)^2} + H_1 - h;$$

$$f_2 = -z - \frac{H_1}{R_1} \sqrt{(x+w)^2 + (y-l)^2} + H_1 - h,$$

$$f_3 = -z - \frac{H_1}{R_1} \sqrt{(x-w)^2 + (y+l)^2} + H_1 - h,$$

$$f_4 = -z - \frac{H_1}{R_1} \sqrt{(x-w)^2 + (y-l)^2} + H_1 - h,$$

H_1 определено равенством (1).

Проекция нулевого уровня для phi-функции $\Phi^{E^* \mathcal{P}}$ представлена на рис. 5.

Phi-функцию для объектов E^* и C можно определить соотношением (2), где ξ_1 и ξ_2 соответствуют равенствам (6) и (7),

$$\Phi^{\tilde{N}_z^* C} = -x^2 - y^2 + (R_z - r)^2, \quad (12)$$

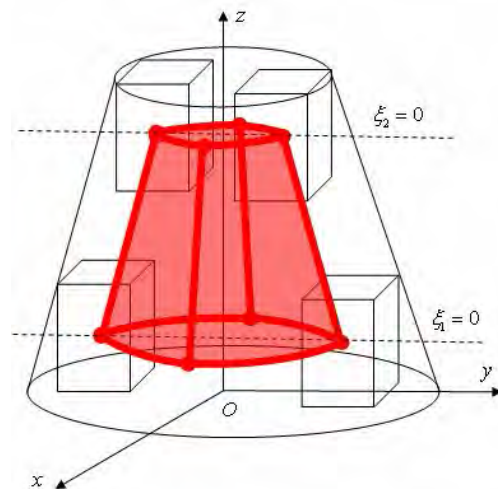


Рис. 5. Проекция нулевого уровня γ_{12} phi-функции для объектов E^* и \mathcal{P}

$$R_z = \frac{R_1(H_1 - z)}{H_1}, \quad (13)$$

а H_1 определено в равенстве (1).

Аналогично, при помощи соотношений (1)-(4), (12), (13) строится ϕ -функция для объектов E^* и K .

Проекции нулевого уровня для ϕ -функций Φ_{E^*C} и Φ_{E^*K} изображены на рис. 6, а и б соответственно.

ϕ -функция для объектов E^* и S может быть определена равенствами (1) – (4), (12) – (13). Проекция ее нулевого уровня приведена на рис. 7.

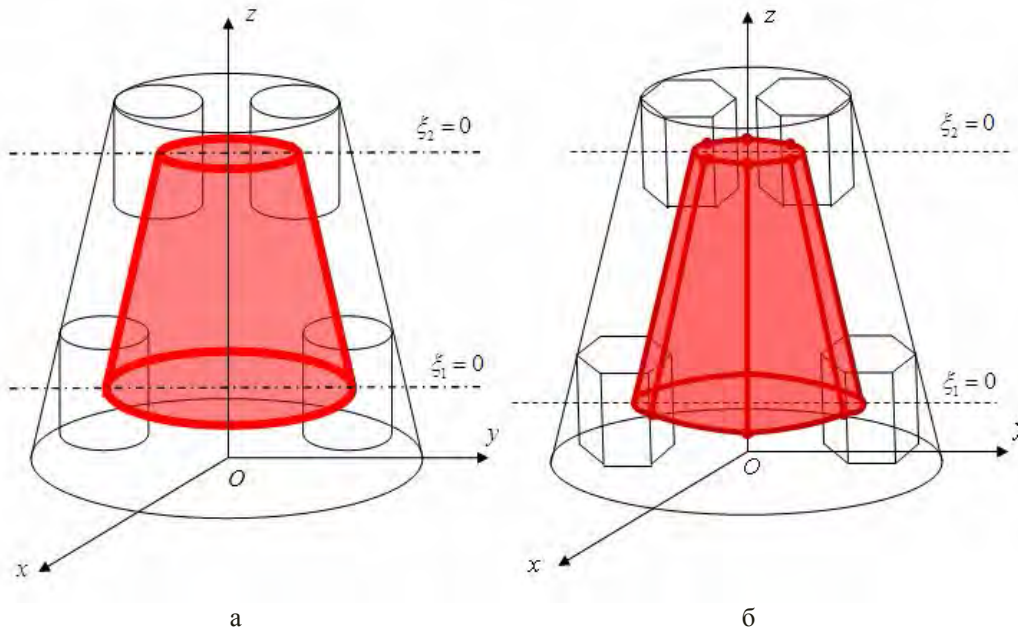


Рис. 6. Проекция нулевого уровня γ_{12} ϕ -функции для объектов: а – E^* и C ; б – E^* и K

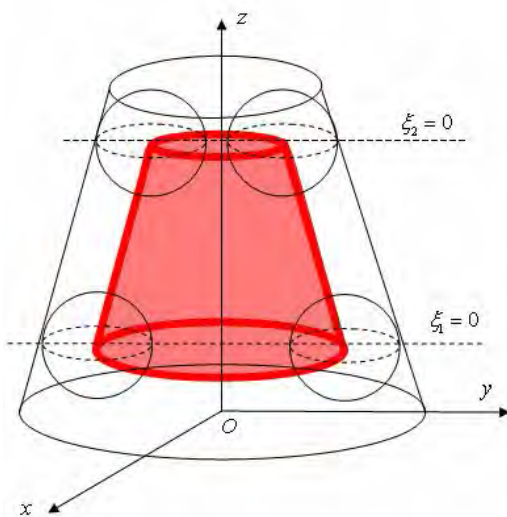


Рис. 7. Проекция нулевого уровня γ_{12} ϕ -функции для объектов: E^* и S

Выводы

Построенные ϕ -функции вида (2), (8), (9) позволяют описывать ограничения включения в аналитическом виде при построении математических моделей оптимизационных задач компоновки 3D-объектов, для реализации которых можно использовать современные методы математиче-

ского программирования и негладкой оптимизации.

Список литературы

1. Fasano G., Pintér J. (2012) *Modeling and Optimization in Space Engineering Springer Optimization and Its Applications. Publisher Springer New York.* – 404 p.
2. Bennell J.A., Oliveira J.F. (2008) *The geometry of nesting problems: A tutorial. European Journal of Operational Research* 184: - P. 397–415.
3. Chernov N., Stoyan Y., Romanova T. (2010) *Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem. Computational Geometry: Theory and Applications* 43(5). – P. 535-553.
4. Scheithauer G., Stoyan Y., Romanova T. (2005) *Mathematical modeling of interactions of primary geometric 3D objects. Cybernet. Systems Anal* 41. – P. 332-342.
5. Semkin V, Chugay A. *Phi-function for a sphere segment with a parallelepiped, a cylinder, a sphere and a spherocylinder// Vestnik of Khark. Nat. Univ., - 2012. - No. 4. Series "Mathematical Modeling. Information Technology", 21. - P. 17-22.*
6. *Phi-functions for oriented composed 3D-objects / T. Romanova, B. Rublev, A. Bashuk, V. Sinyavin // Системи обробки інформації. – X.: ХУПІС, 2013. – Вип. 1(108). – С. 175-181.*

Поступила в редколлегию 15.11.2013

Рецензент: д-р техн. наук, доц. В.В. Шляхов, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

**PHI-ФУНКЦІЇ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ОБМЕЖЕНЬ ВКЛЮЧЕННЯ
В ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧАХ БАЛАНШОЇ КОМПОНОВКИ**

Т.Е. Романова, А.А. Коваленко

Будується повний клас ϕ -функцій для моделювання відношень включення об'єктів, що мають форму циліндра, паралелепіпеда, правильної призми та шара у циліндричній, параболоїдній контейнер, а також контейнер, що має форму зрізаного конуса.

Ключові слова: 3D-об'єкти, компоновка, математичне моделювання, ϕ -функція, відношення включення.

**PHI-FUNCTIONS FOR MODELING OF CONTAINMENT CONSTRAINTS
IN OPTIMIZATION BALANCE LAYOUT PROBLEMS**

T.E. Romanova, A.A. Kovalenko

In order to model containment constraints for layout of cylinders, parallelepipeds, right prisms and spheres into a cylindrical, a parabolic container as well as into a truncated cone in an analytical form we derive a complete class of ϕ -functions.

Key words: 3D-objects, layout problem, mathematical modeling, ϕ -function, containment constraints.