УДК 51 : 004.7

Д.Э. Ситников[1], П.Э. Ситникова[2], А.И. Коваленко[1]

[1] *Харьковская государственная академия культуры, Харьков*
[2] *Харьковский гуманитарный университет «Народная украинская академия», Харьков*

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ БИНАРНЫХ ПРЕДИКАТОВ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ С ПОМОЩЬЮ СВОБОДНОГО ПРЕДИКАТНОГО ПАРАМЕТРА

В данной работе рассмотрены некоторые часто встречающиеся в информационных системах виды отношений, таких, как рефлексивность, симметричность, антирефлексивность, антисимметричность. Поставлена и решена задача представления таких предикатов в параметрической форме с использованием так называемого свободного предикатного параметра, подставляя различные значения которого, можно получить все предикаты некоторого класса, описываемого системой логических правил. Общие виды описываемых классов можно использовать для более детального исследования специфики определенных отношений в информационной системе.

Ключевые слова*: информационная система, бинарный предикат, рефлексивность, симметричность, антирефлексивность, антисимметричность.*

Введение

В информационных системах, которые формально вводятся с использованием отношений и (или) предикатов [1], встречаются определенные классы отношений (предикатов), описываемые набором логических правил. Таким образом, отношения (предикаты) вводятся в рассмотрение аксиоматически. Наиболее популярный случай такого класса отношений – это эквивалентность [2]. Распространено математическое определение информационной системы как пары $S=(U,A)$, где $U=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ – непустое конечное множество объектов, называемое обучающим множеством или универсумом, $A=\{a_1,a_2,...,a_k\}$ – непустое конечное множество атрибутов. Для каждого атрибута известно множество V_a, которое называется множеством значений атрибута a.

Очевидно, большой научный интерес представляют собой бинарные отношения, фигурирующие в определении информационной системы. Такие отношения всегда можно сопоставить с соответствующими предикатами, обращающимися в единицу, если элементы входят в данное отношение, и в нуль в противном случае.

Систему логических правил (аксиом), с помощью которых вводятся определения различных видов отношений (предикатов), можно интерпретировать как систему логических уравнений [3]. В предлагаемой работе приводятся общие решения таких систем уравнений, по аналогии с дифференциальными уравнениями, где в общих решениях фигурируют так называемые свободные параметры. В случае бинарных предикатов рассматриваются свободные предикатные параметры, то есть переменные предикаты, которые могут принимать произвольные значения.

Цель работы: найти общие виды классов рефлексивных, симметричных, антирефлексивных, антисимметричных и ассиметричных предикатов, представленные с использованием свободного предикатного параметра.

Под общим видом здесь понимается формула, из которой можно получить все предикаты данного класса путем подстановки конкретных предикатов вместо свободных параметров, причем такая подстановка не должна выводить за пределы данного класса.

Общие виды некоторых классов бинарных предикатов

Рефлексивным называется любой бинарный предикат $E(x,y)$, определенный на декартовом квадрате множества M, для которого $E(x,x)=1$ при всех $x \in M$.

Верно следующее утверждение.

Утверждение 1. Общий вид класса рефлексивных предикатов можно представить следующим образом:

$$E_R(x,y) = \bar{R}(x,x) \vee R(x,y), \qquad (1)$$

где R – произвольный бинарный предикат, определенный на декартовом квадрате множества M.

Доказательство. Покажем, что предикат $E_R(x,y)$, фигурирующий в (1), рефлексивен при любом R. Действительно, из (1) следует, что для любого x из M верно

$$E_R(x,x) = \bar{R}(x,x) \vee R(x,x) = 1.$$

Теперь остается доказать, что для каждого рефлексивного предиката $E(x,y)$ можно подобрать такой бинарный предикат $R(x,y)$, что для любых x,y из M будет выполняться (1). Рассмотрим произвольный рефлексивный предикат $E(x,y)$. Положим для любых x,y из M $R(x,y)=E(x,y)$. Пусть x,y из M таковы, что $E(x,y)=1$. Тогда и $R(x,y)=1$, откуда следует $\bar{R}(x,x) \vee R(x,y)=1$. Пусть теперь x,y таковы, что $E(x,y)=0$. Тогда, очевидно, $R(x,y)=0$. В силу рефлексивности предиката $E(x,y)$ можно утверждать, что $R(x,x)=1$. Следовательно, $\bar{R}(x,x) \vee R(x,y)=0$. Мы показали, что в данном случае при любых x,y справедливо представление (1). Утверждение доказано.

Симметричным называется любой бинарный предикат $E(x,y)$, определенный на декартовом квадрате множества M, если для любых x,y из M $E(x,y) \to E(y,x)$. Верно следующее утверждение.

Утверждение 2. Общий вид класса симметричных предикатов можно представить следующим образом

$$E_R(x,y) = R(x,y) \vee R(y,x), \qquad (2)$$

где R – произвольный бинарный предикат.

Доказательство. Покажем симметричность предиката $E_R(x,y)$, фигурирующего в (2), при любом R. Из (2) следует, что $E_R(y,x) = R(y,x) \vee R(x,y)$, то есть $E_R(x,y) = E_R(y,x)$. Это означает, что предикат $E_R(x,y)$ симметричен. Теперь покажем, что для любого симметричного предиката $E(x,y)$ из M будет выполняться соотношение (2). Рассмотрим произвольный симметричный предикат $E_R(x,y)$. Положим для любых x,y из M $R(x,y)=E(x,y)$. Пусть x,y таковы, что $E(x,y)=1$. Тогда и $R(x,y)=1$. Значит, $R(x,y) \vee R(y,x)=1$. Пусть теперь x,y из M таковы, что $E(x,y)=0$. Тогда из симметричности предиката $E(x,y)$ и определения предиката $R(x,y)$ следует, что $R(y,x)=0$, откуда $R(x,y) \vee R(y,x)=0$.

Утверждение доказано.

Антирефлексивным называется любой бинарный предикат $E(x,y)$, заданный на декартовом квадрате множества M, для которого $E(x,x)=0$ при всех x из M. Верно следующее утверждение.

Утверждение 3. Общий вид класса антирефлексивных предикатов можно представить следующим образом:

$$E_R(x,y) = \bar{R}(x,x) \wedge R(x,y), \qquad (3)$$

где R – произвольный бинарный предикат.

Доказательство. Покажем, что предикат $E_R(x,y)$, фигурирующий в (3), антирефлексивен при любом R. Действительно, из (3) следует, что $E_R(x,x) = \bar{R}(x,x) \wedge R(x,x)$ для любого R. Теперь остается показать, что для каждого антирефлексивного предиката $E(x,y)$ можно подобрать такой бинарный предикат $R(x,y)$, что для любых x,y из M будет выполняться (3). Рассмотрим произвольный антирефлексивный предикат $E(x,y)$. Положим для любых x,y из M $R(x,y)=E(x,y)$. Пусть x,y таковы, что $E(x,y)=1$. Тогда, очевидно, $R(x,y)=1$. Кроме того, в силу антирефлексивности предиката $E(x,y)$ можно утверждать, что $R(x,x)=0$, следовательно, $\bar{R}(x,x)=1$. Поэтому $\bar{R}(x,x) \wedge R(x,y)=1$. Пусть теперь x,y из M таковы, что $E(x,y)=0$. Тогда $R(x,y) \vee R(y,x)=1$. Пусть теперь x,y из M

таковы, что $E(x,y)=0$. Тогда $R(x,y)=0$ и $\overline{R}(x,x)\wedge R(x,y)=0$. Утверждение доказано.

Асимметричным называется любой бинарный предикат $E(x,y)$, определенный на декартовом квадрате множества M, для которого $E(x,y)\to\overline{E}(y,x)$ для любых x,y из M. Верно следующее утверждение.

Утверждение 4. Общий вид класса асимметричных предикатов можно представить следующим образом

$$E_R(x,y)=R(x,y)\wedge\overline{R}(y,x), \qquad (4)$$

где R – произвольный бинарный предикат.

Доказательство. Покажем асимметричность предиката $E_R(x,y)$, фигурирующего в (4). Для этого достаточно доказать, что для любых x,y из M $E_R(x,y)=1$ влечет $\overline{E}_R(x,y)=0$. Действительно, если $E_R(x,y)=1$, то в силу $R(x,y)=1$, $R(y,x)=0$. Так как $E_R(y,x)=R(y,x)\wedge\overline{R}(x,y)$, то $E_R(y,x)=0$. Покажем теперь, что для каждого асимметричного предиката $E(x,y)$ можно подобрать такой бинарный предикат $R(x,y)$, что для любых x,y из M будет выполняться (4). Рассмотрим произвольный асимметричный предикат $E(x,y)$. Положим для любых x,y из M $R(x,y)=E(x,y)$. Пусть x,y таковы, что $E(x,y)=1$. Кроме того, в силу асимметричности предиката $E(x,y)$ и определения предиката $R(x,y)$ можно утверждать, что $R(y,x)=0$. То есть $\overline{R}(y,x)=1$. Следовательно, $R(x,y)\wedge\overline{R}(y,x)=1$. Пусть теперь x,y из M таковы, что $E(x,y)=0$. Тогда $R(x,y)=0$ и $R(x,y)\wedge\overline{R}(y,x)=0$. Утверждение доказано.

Антисимметричным называется любой бинарный предикат $E(x,y)$, определенный на декартовом квадрате множества M, для которого $E(x,y)\wedge E(y,x)\to(x=y)$ при всех x,y из M.

Утверждение 5. Общий вид класса антисимметричных предикатов можно представить следующим образом

$$E_R(x,y)=R(x,y)\wedge(\overline{R}(y,x)\vee D(x,y)), \qquad (5)$$

где $D(x,y)$ – предикат равенства на множестве M, $R(x,y)$ – произвольный бинарный предикат.

Доказательство. Покажем, что при любом R предикат $E_R(x,y)$, фигурирующий в (5), является антисимметричным. Из (5) следует, что

$$E_R(x,y)\wedge E_R(y,x)=R(x,y)\wedge(\overline{R}(y,x)\vee$$
$$\vee D(x,y))\wedge R(y,x)\wedge(\overline{R}(x,y)\vee D(y,x)).$$

Раскрывая скобки, получим

$$E_R(x,y)\wedge E_R(y,x)=$$
$$=(R(x,y)\overline{R}(y,x)\vee R(x,y)D(x,y))\wedge$$
$$\wedge(R(x,y)\overline{R}(x,y)\vee R(y,x)D(y,x))=$$
$$=R(x,y)D(x,y)R(y,x)D(y,x).$$

Здесь учитывался тот факт, что $D(x,y)=D(y,x)$. Очевидно, что если $R(x,y)R(y,x)D(x,y)=1$, то $D(x,y)=1$. Таким образом, антисимметричность предиката $E_R(x,y)$ доказана. Остается показать, что для каждого антисимметричного предиката $E(x,y)$ можно подобрать такой бинарный предикат $R(x,y)$, что для любых x,y из M выполнится (5). Рассмотрим произвольный антисимметричный предикат $E(x,y)$. Положим для любых x,y из M $R(x,y)=E(x,y)$. Пусть x,y из M таковы, что $E(x,y)=1$. Тогда возможны два случая.

1) $x=y$. В этом случае $D(x,y)=1$. Так как из $E(x,y)=1$ следует $R(x,y)=1$, можно утверждать, что $R(x,y)\wedge(\overline{R}(y,x)\vee D(x,y))=1$.

2) $x\neq y$. Тогда из $E(x,y)=1$ следует $E(y,x)=0$, значит, $R(y,x)=0$ и $\overline{R}(y,x)=1$. Это значит, что и во втором случае правая часть равенства (5) равна единице. Пусть теперь x,y из M таковы, что $E(x,y)=0$. Тогда, очевидно, $R(x,y)=0$. Следовательно, $R(x,y)\wedge(\overline{R}(y,x)\vee D(x,y))=0$.

Утверждение доказано.

Общие виды классов рефлексивных и антирефлексивных предикатов можно найти, используя булевы уравнения.

Класс рефлексивных предикатов описывается уравнением

$$\forall x E(x,x)=1.$$

Это же уравнение можно записать и в таком виде:

$$\forall x\forall y(D(x,y)\to E(x,y))=1,$$

где D – предикат равенства.

Рассматривая $D(x,y)$ в качестве параметра, а $E(x,y)$ в качестве переменной, приходим к уравнению $\overline{D}\vee E=1$, решение которого будет выглядеть так:

$$E=P\vee D.$$

Таким образом, класс рефлексивных предикатов можно описать формулой:

$$E_P(x,y)=P(x,y)\vee D(x,y),$$

где P – произвольный бинарный предикат.

Класс антирефлексивных предикатов описывается уравнением

$$\forall x \overline{E}(x, x) = 1 .$$

Это уравнение можно записать в виде

$$\forall x \forall y (D(x, y) \to \overline{E}(x, y)) = 1 ,$$

а затем в следующем виде:

$$\overline{D} \vee \overline{E} = 1 .$$

Решение такого уравнения

$$E = \overline{D}P .$$

Таким образом, класс антирефлексивных предикатов описывается формулой:

$$E_P(x, y) = P(x, y) \vee \overline{D}(x, y) .$$

Выводы

В данной работе были исследованы некоторые часто встречающиеся в информационных системах классы бинарных предикатов. Такие классы обычно описываются с помощью одного или нескольких логических условий, которые можно интерпретировать как логические уравнения с неизвестным предикатом.

Так как такой способ описания не дает логической формулы, с помощью которой можно получить любой интересующий нас предикат рассматриваемого типа, то определенный интерес представляет нахождение такой формулы. Для приведенных классов предикатов такие общие формулы (общие решения логических уравнений) были найдены. В работе приведены доказательства того факта, что найденные формулы описывают рассматриваемые предикатные классы, причем любые изменения свободного предикатного параметра не выводят за пределы описываемого класса. Подобный подход к нахождению явных общих решений логических уравнений с бинарными предикатами аналогичен классическому подходу к получению общих решений дифференциальных уравнений, где также фигурируют так называемые свободные параметры. Так же, как и в случае дифференциальных уравнений, для рассмотренных логических уравнений с неизвестным бинарным предикатом можно рассматривать также частные решения, подставляя конкретные значения свободных параметров.

Список литературы

1. *Pawlak Z. Rough sets and intelligent data analysis / Z. Pawlak // Information Sciences. – November 2002. – Vol. 147 (Issues 1–4). – P. 1-13.*
2. *Pawlak Z. Vagueness and uncertainty: a Rough set perspective / Z. Pawlak // Computational Intelligence. – May 1995. – Vol. 11 (Issue 2). – P. 227-232.*
3. *Шабанов-Кушнаренко Ю.П. Теория интеллекта. Математические средства / Ю.П. Шабанов-Кушнаренко. – Х.: Вища шк., 1984. – 143 с.*

Поступила в редколлегию 6.01.2014

Рецензент: д-р техн. наук, проф. И.В. Гребенник, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

ПОДАННЯ БІНАРНИХ ПРЕДИКАТІВ ІНФОРМАЦІЙНОЇ СИСТЕМИ ЗА ДОПОМОГОЮ ВІЛЬНОГО ПРЕДИКАТНОГО ПАРАМЕТРА

Д.Е. Ситніков, П.Е. Ситнікова, А.І. Коваленко

У даній роботі розглянуті деякі види відносин, що часто зустрічаються в інформаційних системах. Ними є рефлексивність, симетричність, антирефлексивність, антисиметричність. Поставлена і вирішена задача подання таких предикатів в параметричної формі з використанням так званого вільного предикатного параметра, підставляючи різні значення якого, можна отримати всі предикати деякого класу, що описується системою логічних правил. Загальні види класів, що описуються, можна використовувати для більш детального дослідження специфіки певних відношень в інформаційній системі.

***Ключові слова**: інформаційна система, бінарний предикат, рефлексивність, симетричність, антирефлексивність, антисиметричність.*

REPRESENTING BINARY PREDICATES IN AN INFORMATION SYSTEM WITH THE HELP OF A FREE PREDICATE PARAMETER

D.E. Sitnikov, P.E. Sitnikova, A.I. Kovalenko

In the given paper we have considered some relation types often encountered in information systems, such as reflexivity, symmetry, anti-reflexivity, anti-symmetry. A task has been defined and solved as to the possibility of representing such predicates in a parametric form with the help of so called free predicate parameter. When substituting various predicates for this parameter we can obtain all predicates from a certain class described by a system of logic rules. The general forms of the classes being described can be used for more detailed investigating some relations in the information system.

***Keywords**: information system, binary predicate, reflexivity, symmetry, anti-reflexivity, antisymmetry.*