
УДК 681.391

Р.С. Новиков, А.А. Астраханцев

Харьковский национальный университет радиотехники, Харьков

ВЫБОР ПАРАМЕТРОВ LDPC КОДОВ ДЛЯ КАНАЛОВ С АБГШ

Проанализирована модель помехоустойчивого кодирования с малой плотностью проверок на четность. Получены результаты характеристик кода при различных методах формирования порождающей матрицы, при изменении количества итераций декодирования и для входных данных переменной длины.

Ключевые слова: помехоустойчивое кодирование, вероятность декодирования, проверочная матрица.

Введение

В настоящее время получили широкое распространение и продолжают быстро развиваться области, связанные с обработкой и передачей данных – локальные проводные сети, мобильная связь, беспроводные сети, устройства хранения данных. Важной задачей является повышение эффективности существующих методов передачи, в том числе, разработка алгоритмов, позволяющих повысить надежность передаваемой информации.

Обработка информации с помощью процедур помехоустойчивого кодирования позволяет обеспечить требуемую вероятность ошибки, однако использование кодирования требует устройств кодера, декодера, перемежителя, а следовательно, дополнительных затрат на обработку. В условиях, когда требуется сохранить высокую скорость передачи при обеспечении заданной помехоустойчивости, необходимо наличие кодов, позволяющих эффективно бороться с происходящими ошибками, и обладающих быстрыми процедурами кодирования / декодирования [1].

Код с малой плотностью проверок на четность – мощная техника исправления ошибок, которая выигрывает у многих известных схем кодирования. Он может использоваться в любой системе связи, где существенна экономия энергии или отношение сигнал/шум очень низко. Такие коды могут использоваться для увеличения энергетического выигрыша кодирования в случаях, где среда распространения позволяет увеличить полосу пропускания. Напри-

мер, космические коммуникации, микроволновые системы связи, цифровое спутниковое телевидение. Различные варианты кода используются в стандартах DVB-S2, DVB-T2 приходя на смену турбо-кодам, а также в других беспроводных системах связи. При большой длине кодового слова коды LDPC достигают показателей, близких к пределу Шеннона. Отличие от турбо-кодов заключается в том, что турбо-коды имеют тенденцию к низкой сложности кодирования, но высокой сложностью декодирования, в LDPC-кодах возросла сложность кодирования, но вместе с этим упростился процесс декодирования. LDPC-коды, как и турбо-коды используют итеративные методы декодирования, однако декодирование может выполняться параллельно, что упрощает сложность декодера и повышает его быстродействие.

Благодаря своей корректирующей способности LDPC коды стали частью некоторых современных стандартов передачи данных, таких как DVB-S2, Gigabit Ethernet, WiMAX, Wi-Fi. Однако декодеры таких кодов на данный момент имеют множество ограничений, и их проектирование представляет сложную задачу.

Цель работы – исследование комплекса вопросов по выбору, разработке и анализу характеристик помехоустойчивого кодера, для экономии аппаратных ресурсов устройств и обеспечения заданного уровня качества. В работе используются методы теории вероятностей и случайных процессов, алгебраической теории корректирующих кодов и теории информации.

1. Особенности LDPC кодов

Существует мнение, что на сегодняшний день коды с низкой плотностью проверок на чётность (Low Density Parity Code, LDPC, рис. 1) являются лучшими блоковыми кодами [3].

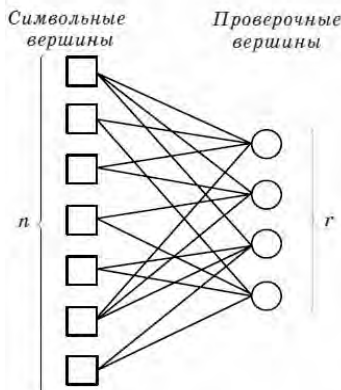


Рис. 1. Проверочный граф LDPC кода

Матрица проверок на четность имеет размерность $M \times N$, в каждом столбце матрицы – j = количеству единиц, в каждой строке – k = количеству единиц. Для практики важны коды с очень низкой плотностью проверок на чётность, для которых $j \ll M$ и $k \ll N$. Очень низкая плотность значительно снижает вычислительные затраты на реализацию алгоритма декодирования при больших размерах матриц. Этим кодам более 40 лет, их изобретателем является Р. Галлагер. Галлагером была предложена итеративная обменная вероятностная процедура декодирования. Применительно к обработке жёстких решений сущность этой процедуры сводится к следующему. На каждой итерации проверяются соотношения на чётность в соответствии с проверочной матрицей кода H . После первой проверки исправляется символ (ноль заменяется на единицу и наоборот), входящий в наибольшее число невыполненных проверочных соотношений на чётность. Интерпретация обменного алгоритма декодирования особенно наглядна на проверочном графе кода. Этот граф также называют графом Таннера. Он имеет две группы проверочных узлов (Bipartite Graph). Первый набор представляет функции правдоподобия принятых N кодовых символов. Второй представляет функции правдоподобия M проверок на чётность. Отметим, что для рассмотренных кодов порождающая матрица G в корне отличается от проверочной матрицы и имеет высокую плотность единиц (High Density) [4]. LDPC-коды описываются низкоплотной проверочной матрицей, содержащей в основном нули и относительно малое количество единиц. В общем случае количество единиц в матрице имеет порядок $O(n)$, то есть растёт линейно с увеличением длины кодового блока (количества столбцов проверочной матрицы).

Обычно рассматриваются матрицы больших размеров. Например, в работе Галлагера в разделе

экспериментальных результатов используются «малые» количества строк $n=124, 252, 504$ и 1008 строк (число столбцов проверочной матрицы немного больше). На практике применяются матрицы с большим количеством элементов – от 10 до 100 тысяч строк. Однако количество единиц в строке или в столбце остаётся достаточно малым, обычно меньшим 10. Замечено, что коды с тем же количеством элементов на строку или столбец, но с большим размером, обладают лучшими характеристиками.

Важной характеристикой матрицы LDPC-кода является отсутствие циклов определённого размера. Под циклом длины 4 понимают образование в проверочной матрице прямоугольника, в углах которого стоят единицы. Отсутствие цикла длины 4 можно также определить через скалярное произведение столбцов (или строк) матрицы. Если каждое попарное скалярное произведение всех столбцов (или строк) матрицы не более 1, это говорит об отсутствии цикла длины 4. Циклы большей длины (6, 8, 10 и т.д.) можно определить, если в проверочной матрице построить граф, вершинами которого являются единицы, а рёбра – все возможные соединения вершин, параллельные сторонам матрицы (то есть вертикальные или горизонтальные линии). Минимальный цикл в этом графе и будет минимальным циклом в проверочной матрице LDPC-кода (рис. 2).

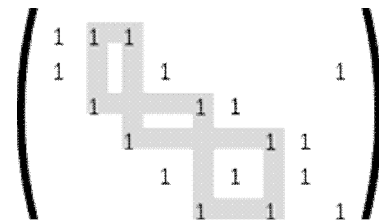


Рис. 2. Проверочная матрица LDPC-кода (9,2,3) с минимальным циклом длины 8

Очевидно, что цикл будет иметь длину как минимум 4, а не 3, так как рёбра графа должны быть параллельны сторонам матрицы. Вообще, любой цикл в этом графе будет иметь чётную длину, минимальный размер 4, а максимальный размер обычно не играет роли (хотя, очевидно, он не более, чем количество узлов в графе, т.е. $n \times k$). Описание LDPC-кода возможно несколькими способами:

- проверочной матрицей;
- двудольным графом;
- другим графическим способом;
- специальными способами.

Последний способ является условным обозначением группы представлений кодов, которые построены по заданным правилам-алгоритмам, таким, что для повторного воспроизведения кода достаточно знать лишь инициализирующие параметры алгоритма, и, разумеется, сам алгоритм построения. Однако данный способ не является универсальным и не может описать все возможные LDPC-коды.

Способ задания кода проверочной матрицей является общепринятым для линейных кодов, когда каждая строка матрицы является элементом некоторого множества кодовых слов. Если все строки линейно-независимы, строки матрицы могут рассматриваться как базис множества всех кодовых векторов кода. Однако использование данного способа создаёт сложности для представления матрицы в памяти кодера – необходимо хранить все строки или столбцы матрицы в виде набора двоичных векторов, из-за чего размер матрицы становится равен $j \times k$ бит.

Распространённым графическим способом является представление кода в виде двудольного графа (рис. 3). Сопоставим все k строк матрицы k нижним вершинам графа, а n столбцов – верхним, и соединим верхние и нижние вершины графа, если на пересечении соответствующих строк и столбцов стоят единицы.

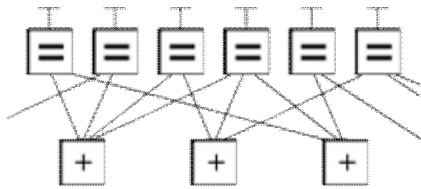


Рис. 3. Представление LDPC-кода в виде двудольного графа

К другим графическим способам относят преобразования двудольного графа, происходящие без фактического изменения самого кода. Например, можно все верхние вершины графа представить в виде треугольников, а все нижние – в виде квадратов, после чего расположить рёбра и вершины графа на двумерной поверхности в порядке, удобном для визуального понимания структуры кода. Например, такое представление используется в качестве иллюстраций в книгах Девида Маккея [2].

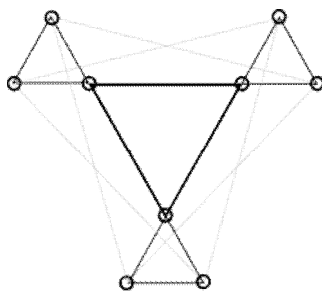


Рис. 4. Представление (9, 2, 3) LDPC-кода в виде графа специального вида (матрица кода приведена на рис. 2)

Вводя дополнительные правила графического отображения и построения LDPC-кода, можно добиться, что в процессе построения код получит определённые свойства. Например, если использовать граф, вершинами которого являются только столбцы проверочной матрицы, а строки изображаются мно-

гогранниками, построенными на вершинах графа, то следование правилу «два многогранника не разделяют одно ребро» позволяет избавиться от циклов длины 4. При использовании специальных процедур построения кода могут использоваться и свои способы представления, хранения и обработки (кодирования и декодирования). Вероятность появления ошибки в декодированном символе определяется по формуле:

$$P = \int_{\frac{1}{\sqrt{2E_c/N_0}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times e^{-x^2/2} dx, \quad (1)$$

где E_c/N_0 – отношение сигнал/шум в канале передачи [5]. Зависимость вероятности ошибки в символе от ОСШ для LDPC кодов, рассмотренная в [6], показана на рис. 5.

2. Описание анализируемой модели

Для анализа характеристик кода была создана программная модель в среде MATLAB, реализующая LDPC код, применяемый к сигналу с BPSK модуляцией.

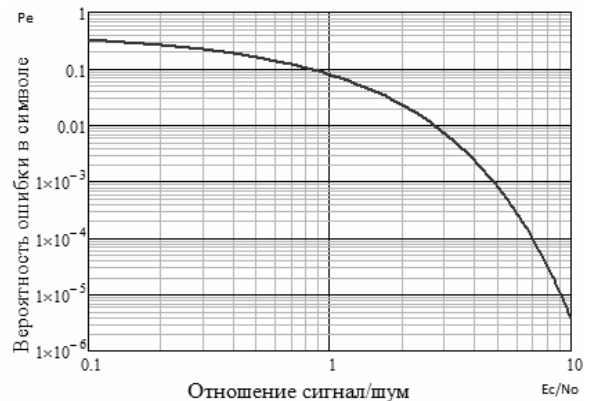


Рис. 5. Зависимость вероятности ошибки в символе от ОСШ для LDPC кодов [6]

Передача информации осуществлялась пакетами по 1024 бита по каналу с аддитивным гауссовым белым шумом (AWGN – Additive White Gaussian Noise). В данной модели код задавался при помощи матрицы контроля четности с количеством рядов M , количеством столбцов N .

В работе оценивалась эффективность нескольких способов создания разреженной матрицы контроля четности (т.н. "Evencol", или "Evenboth"). "Evencol" случайно распределяет определенное количество единиц между столбцами, в "evenboth" единицы распределяются равномерно как для строк, так и для столбцов. Также в модели задавалось обнаружение цикла длиной в четыре единицы с возможным устранением (noCycle) и была реализована возможность устанавливать количество единиц в столбце (onePerCol), была предусмотрена возможность задания количества итераций (iter). На выходе программы получаем матрицу контроля четности $M \times N$ для $R=1/2$. В программной модели было реали-

зовано 3 стратегии для выбора следующего ненулевого элемента для диагонали треугольной матрицы:

First: выбирает первый найденный ненулевой элемент из колонки “i onward” из колонны поиска.

Mincol: выбирает ненулевой элемент из колонки “i onward”, который имеет минимальное количество ненулевых значений в своей колонке.

Minprod: выбирает ненулевой элемент из колонки “i onward”, сводящих к минимуму продукт: первое число ненулевых значений в ее строке минус 1, и второе число ненулевых значений в своей колонке минус 1.

Кратко охарактеризуем исследуемые модели декодирования. Декодирование LDPC кода осуществляется с помощью итерационного распространения доверия или алгоритма суммы-произведения (SPA). В модели предусмотрены четыре версии SPA декодера (BPSK модулированный сигнал и AWGN канал):

– Probability-domain SPA декодер. Основан на работах Галлагера.

– Log-domain SPA декодер. Похож на Probability-domain SPA, но с использованием логарифмической функции правдоподобия вместо функции вероятности. Преимущество заключается в операциях, которые можно совершить с помощью суммирования, вместо умножения.

– Simplified log-domain SPA. Модифицированная версия log-domain SPA. Для дальнейшего упрощения, логарифмическая функция правдоподобия была заменена на входящую волновую диаграмму [7], следовательно simplified log-domain декодеру не требуется информация о дисперсии шума.

Остальным декодерам нужна информация о дисперсии шума ($N_0/2$) для корректной работы. Другие параметры декодеров включают полученный сигнал с шумами, H-матрицы и число итераций декодирования.

3. Результаты исследований

На рис. 6 и 7 представлены результаты моделирования методов создания матрицы “Evencol” и “Evenboth” с измерением стратегии выбора следующего ненулевого элемента: First, Mincol и Minprod. Лучший результат в обоих методах показала стратегия Minprod. Разница между результатами вычислений вероятности декодирования сигнала составляет всего 10^{-5} при соотношении сигнал/шум равным 5 дБ и совпадают на отрезке от 0 до 3 дБ. Также стоит отметить что результаты моделирования улучшают показатели декодера, описанные в работе Галлагера.

Из графиков следует, что метод распределения единиц как для строк, так и для столбцов выигрывает у метода распределения только для столбцов на 10^{-5} при SNR равным 5 дБ. Этот выигрыш может сыграть значительную роль при передаче больших объемов данных. На рис. 8 представлены результаты показанные моделью при выборе метода декодирования (алгоритма суммы-произведения).

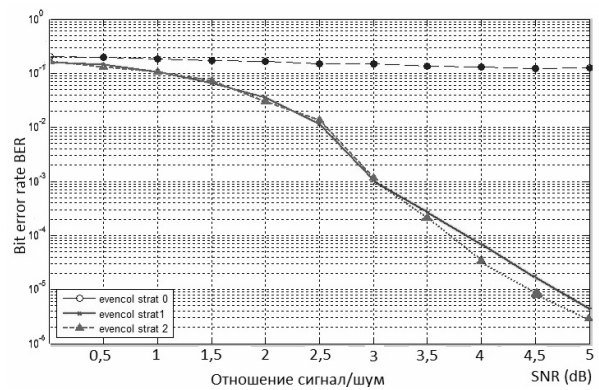


Рис. 6. Зависимость вероятности ошибки в символе (BER) от ОСШ для метода создания матрицы “Evencol” с измерением стратегии выбора следующего ненулевого элемента

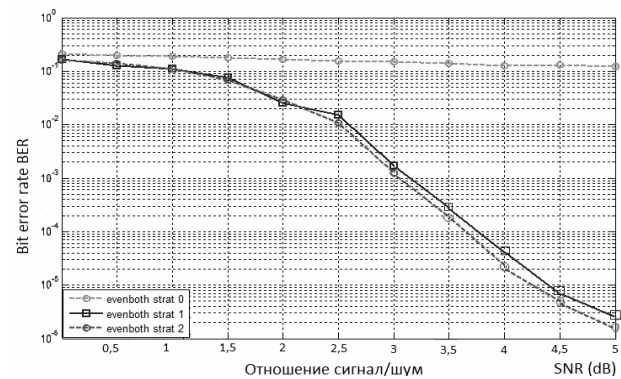


Рис. 7. Зависимость вероятности ошибки в символе (BER) от ОСШ для метода создания матрицы “Evenboth” с измерением стратегии выбора следующего ненулевого элемента

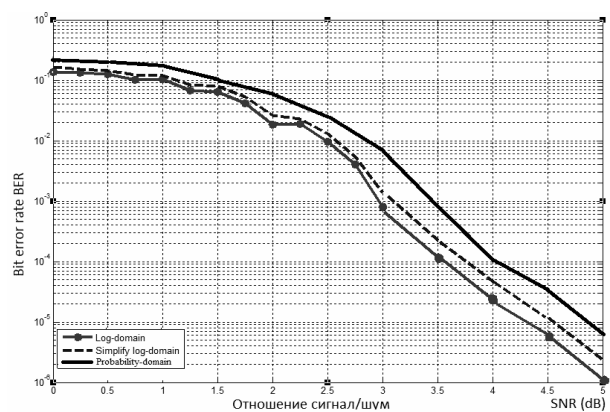


Рис. 8. Зависимость вероятности ошибки в символе (BER) от ОСШ при изменении метода декодирования сигнала

Из всех методов декодирования, реализуемых в данной модели, самый лучший результат показал метод с использованием логарифмической функции правдоподобия. Результаты вычисления для логарифмической функции лучше показателей упрощенной логарифмической функции на 2×10^{-6} при SNR 5 дБ и лучше на 6×10^{-6} , чем у вероятностной функции также при 5 дБ. На рис. 9 представлены результаты изменения значения вероятности ошибки от увеличения количества итераций, проводимых декодером.

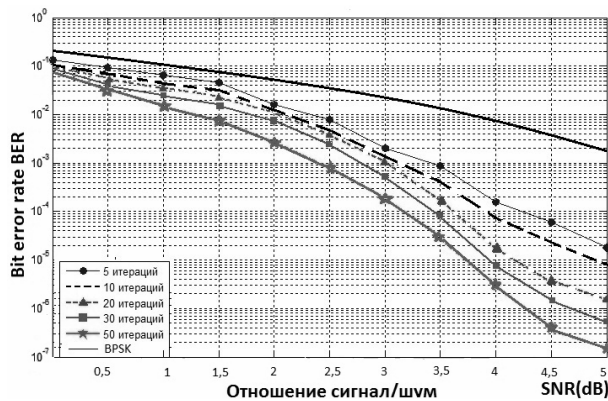


Рис. 9. Зависимость вероятности ошибки в символе (BER) от ОСШ при изменении количества выполняемых итераций

При изменении количества итераций вероятность принятия неверного символа уменьшается. При количестве итераций равным 5 вероятность того что будет неверно принят символ равняется 8×10^{-4} при SNR равным 5 дБ, что при 50 итераций уменьшается до показателя 10^{-7} . Но стоит заметить, что чем больше итераций будет проводить декодер, тем большее времени потребуется для декодирования передаваемого сообщения.

Выводы

Последнее десятилетие создало условия для достижения в реальной каналообразующей аппаратуре систем связи уровня энергетики, весьма близкого к теоретическим пределам для каналов космической и спутниковой связи. Высокие характеристики в настоящее время могут обеспечить всего несколько методов коррекции ошибок. Но учет проблемы сложности при сопоставимой корректирующей способности показывает, что в этом случае алгоритмы на базе LDPC кодов сохраняют близость по своей сложности реализации к простейшему декодеру порогового типа и поэтому в большинстве случаев применения кодирования являются наиболее предпочтительными методами декодирования в приемлемых по стоимости высокоскоростных системах связи.

Развитие каналов связи, влекущее за собой уменьшение количества ошибок, а также все увеличивающиеся объемы передаваемой информации открывают широкие перспективы для дальнейшего внедрения и использования LDPC-кодов. Было проведено моделирование работы недвоичных LDPC-ко-

дов. Результаты моделирования показали, что при изменении метода декодирования можно уменьшить вероятность ошибки в символе, при увеличении количества итераций вероятность ошибки также уменьшается, но приводит к большим временным и энергетическим затратам. По результатам, полученным при изменении характеристик для данной модели, можно сделать вывод, что лучшей стратегией является “Minprod” с использованием метода формирования матрицы “Evenboth” и методом декодирования “Log-domain SPA” при использовании 50 итераций.

Современные исследования в основном сосредоточены на создании LDPC-кодов с улучшенными характеристиками, а также методов их декодирования, например, кодов на базе евклидовых геометрий. Для таких кодов также создаются и развиваются специальные методы декодирования и ускоренного декодирования с приемлемыми потерями в вероятности декодирования, и они показывают неплохие результаты. Дальнейшее развитие в рамках данной проблематики заключается в отработке современных алгоритмических решений в области кодирования и декодирования LDPC-кодов, а также в эмпирической проверке результатов современных теоретических исследований в этой области.

Список литературы

1. Овчинников А. Обработка информации при передаче LDPC-кодами по дискретным и полунепрерывным каналам: автор. дис. канд. техн. наук / А. Овчинников—2004. — С. 3-4.
2. D. MacKay. Good codes based on very sparse matrices / D. MacKay, R. Neal // *Information Theory, IEEE Transactions.* — 1999. — Vol. 45. — P. 411- 413.
3. David J.C. MacKay. *Information Theory, Inference, and Learning Algorithms* / David J.C. MacKay. — Cambridge University Press, 2003. — 640 p.
4. Варгаузин В. Вблизи границы Шенона / В. Варгаузин // *Телемультимедиа.* — 2005. — №3. — С. 3-10.
5. Gallager R.G. *Low Density Parity-Check Codes* / R.G. Gallager. — Massach.: MIT Press, Doctoral dissertation. — 1963. — 90 p.
6. Новиков П.С. Анализ характеристик помехоустойчивых кодов / П.С. Новиков, А.А. Астраханцев // *Системы обработки информации.* — Х.: ХУПС, 2013. — Вып. 9 (116). — С. 164-167.
7. Ryan W.E. *An introduction to LDPC codes* / W.E. Ryan. — Department of Electrical and Computer Engineering the University of Arizona, 2003. — P. 13-14.

Поступила в редколлегию 4.12.2013

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.В. Поповский, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

ВИБІР ПАРАМЕТРІВ LDPC КОДІВ ДЛЯ КАНАЛІВ З АБГШ

Р.С. Новиков, А.А. Астраханцев

Проаналізовано модель завадостійкого кодування з малою щільністю перевірок на парність, Отримано результати характеристик коду при різних методах формування породжуючої матриці, при зміні кількості ітерацій декодування і для вхідних даних змінної довжини.

Ключові слова: завадостійке кодування, ймовірність декодування, перевірна матриця.

SELECTION OF PARAMETERS LDPC CODES FOR CHANNELS WITH AWGN

R.S. Novykov, A.A. Astrakhantsev

Analyzed model of error-correcting coding with low-density parity. Obtained the results of characteristics of code for various methods of forming the generating matrix, when we change the number of decoding iteration and for the input data of variable length.

Keywords: error control codes, the probability of decoding, the parity check matrix.