УДК 621.391

І.В. Пасько, О.В. Щенякін

*Філія Центрального науково-дослідного інституту озброєння та військової техніки Збройних Сил України, Суми*

# ДОСЛІДЖЕННЯ ЕНЕРГЕТИЧНОЇ ЕФЕКТИВНОСТІ ЛІНІЙНИХ БЛОКОВИХ КОДІВ З ПОКРАЩЕНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ

*В статті досліджується енергетична ефективність передачі дискретних повідомлень М-ми ортогональними сигналами при застосуванні алгеброгеометричних кодів на просторових кривих. Оцінюється енергетичний виграш алгеброгеометричного кодування.*

***Ключові слова:*** *енергетична ефективність, алгеброгеометричні коди, завадостійкість передачі дискретних повідомлень.*

## Вступ

**Постановка проблеми.** Важливим показником ефективності сучасних телекомунікаційних систем і мереж є завадостійкість передачі дискретних повідомлень. Вона характеризує здатність системи забезпечувати передачу дискретних повідомлень із заданою імовірністю помилки в умовах дії перешкод усіх видів [1]. Найбільш ефективними засобами підвищення завадостійкості передачі дискретних повідомлень є методи завадостійкого кодування. Основними вимогами до завадостійкого кодування є висока здатність коду, щодо виявлення та виправлення помилок, низька надлишковість, висока швидкодія і низька складність реалізації процедур кодування-декодування. Головним завданням завадостійкого кодування інформації є підвищення енергетичної ефективності телекомунікаційних систем.

Алгеброгеометричні коди, мають високу виправну здатність при невеликій долі внесеної надлишковості. Асимптотично алгеброгеометричні коди на просторових кривих за своїми параметрами перебувають вище нижньої кодової границі Варшамова-Гілберта [2, 3]. Їх практичне використання дозволяє підвищити енергетичну ефективність передачі дискретних повідомлень, що при фіксованій імовірності помилкового прийому символів повідомлення дозволяє суттєво знизити вимоги до мінімально необхідного співвідношення енергії сигналу до спектральної щільності шуму, тобто підвищити завадостійкість передачі дискретних повідомлень [4].

**Метою статті** є оцінка енергетичної ефективності алгеброгеометричних кодів, що задані на просторових кривих

## Основна частина

Зафіксуємо гладку проектну алгебраїчну криву X в проектному просторі $P^3$ над полем $GF(q)$ як сукупність рішень двох однорідних незвідних алгебраїчних рівнянь від 4-х змінних з коефіцієнтами з $GF(q)$ :

$$\begin{cases} f_1(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0 \\ f_2(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0 \end{cases}. \tag{1}$$

Нехай $p_0(x_0,x_1,x_2,x_3)$, $p_1(x_0,x_1,x_2,x_3)$, …, $p_{N-1}(x_0,x_1,x_2,x_3)$ – N сумісних розв'язань системи рівнянь (1) - точок просторової кривої X. Зафіксуємо дивізор D кривої X і множину раціональних функцій, що асоціюються з дивізором D, тобто множину, яка складається з нуля і функцій $f \neq 0$, для яких $(f) + D \geq 0$. Це еквівалентно набору генераторних функцій

$$F_0(x_0,x_1,x_2,x_3),\ F_1(x_0,x_1,x_2,x_3),$$
$$F_2(x_0,x_1,x_2,x_3),\ \ldots,\ F_m(x_0,x_1,x_2,x_3),$$

де $F_0, F_1, \ldots, F_m$ - форми однакового ступеня і $F_0(x_0,x_1,x_2,x_3) \neq 0$.

Нехай $\alpha$ – ступінь класу дивізорів, $\alpha > g-1$, тоді відображення $\varphi: X \to P^m$ задає породжуючи матрицю G алгеброгеометричного коду, з конструктивними характеристиками $(n \leq N, k \geq \alpha - g + 1, d \geq n - \alpha)$.

Нехай $\alpha > 2g-2$, тоді відображення $\varphi: X \to P^m$ задає перевірочну матрицю H алгеброгеометричного коду, з конструктивними характеристиками:

$$(n \leq N, k \geq n - \alpha + g - 1, d \geq \alpha - 2g + 2).$$

Загальним критерієм вибору алгеброгеометричних кривих для побудови ефективних алгеброгеометричних кодів є вираз [5]:

$$\lim_{w\to\infty} \frac{N(X_w)}{g(X_w)} > 0 .$$

Для просторових кривих відома узагальнена конструкція Артін-Шраєра над кінцевим полем $GF(p^2)$, яка задається таким виразом [5]:

$$x_i^{p-1}x_{i+1}^{p} + x_{i+1}x_{i+2}^{2p-2} - x_i^{p}x_{i+2}^{p-1} = 0,\ i = 0, 1, \ldots, w-2 .$$

Для цієї просторової кривої відома оцінка кількості точок $N(X_w) \geq (p^2-1)p^{w-1}$ та значення роду кривої :

$$g(X_w)=\begin{cases} p^w+p^{w-1}-p^{\frac{w+1}{2}}-2p^{\frac{w-1}{2}}+1, \text{якщо } w-\text{непарне} \\ p^w+p^{w-1}-\frac{1}{2}p^{\frac{w+2}{2}}-\frac{3}{2}p^{\frac{w}{2}}-p^{\frac{w-2}{2}}+1, \text{якщо } w-\text{парне} \end{cases}$$

Використовуючи конструкцію Артін-Шраєра для випадку w = 3 (випадок просторових кривих в $P^3$). Отримаємо просторову криву, задану сукупністю рішень двох однорідних алгебраїчних рівнянь від 4-х змінних над $GF(p^2)$:

$$\begin{cases} f_1(x_0,x_1,x_2,x_3)=x_0^{p-1}x_1^p+x_1x_2^{2p-2}-x_0^px_2^{p-1}=0 \\ f_2(x_0,x_1,x_2,x_3)=x_1^{p-1}x_2^p+x_2x_3^{2p-2}-x_1^px_3^{p-1}=0 \end{cases}.$$

Род кривої та кількість точок над $GF(p^2)$ задовольняє виразам:

$$g=p^3-2p+1,\ N\geq p^4-p^2.$$

Відношення кількості точок до роду кривої запишемо у вигляді виразу

$$\frac{N}{g}\geq\frac{p^4-p^2}{p^3-2p+1}.$$

У табл. 1 наведені експериментальні оцінки кодових співвідношень алгеброгеометричних кодів на просторових кривих Артін-Шраєра над GF(4) та GF(16) [5].

Проведемо оцінку енергетичного виграшу алгеброгеометричних кодів, що пропонуються.

Нехай заданий код $(n,k,d)$. Припустимо, що під час передачі кодового слова помилки виникають незалежно з імовірністю $P_o$. Тоді імовірність помилки кратності *i* на довжині блоку *n* складе

$$P(i,n)=C_n^iP_o^i(1-P_o)^{n-i}. \quad (2)$$

Імовірність спотворення кодової комбінації $\geq m$ помилками запишеться у виді

$$P(\geq m,n)=\sum_{i=m}^{n}P(i,n).$$

Для моделі з незалежними помилками значення $P(\geq m,n)$ визначається як

$$P(\geq m,n)=\sum_{i=m}^{n}C_n^iP_o^i(1-P_o)^{n-i}. \quad (3)$$

Якщо декодер виправляє $t=(d-1)/2$ помилок, то імоврність помилкового декодування блоку

$$P_{од}(n)=1-\sum_{i=0}^{t}C_n^iP_o^i(1-P_o)^{n-i}-\sum_{i=t+1}^{n}u(i)P_o^i(1-P_o)^{n-i}$$

де $C_n^i$ - біноміальний коефіцієнт; $u(i)$ - число векторів помилок ваги $i$, які виправляє код.

Якщо код виправляє всі помилки в межах радіусу упаковки коду і не виправляє інші помилки то

$$P_{од}(n)=P(>t,n)=\sum_{i=t+1}^{n}C_n^iP_o^i(1-P_o)^{n-i}. \quad (4)$$

Для перерахунку імовірності помилки декодування на один символ Рпом скористаємося виразом

Таблиця 1

Експериментальна оцінка кодових співвідношень алгеброгеометричних кодів на просторових кривих Артін-Шраєра

| degF | k | d | $k_\perp$ | $d_\perp$ |
|---|---|---|---|---|
| g=5, n=12 над GF (4) | | | | |
| 1 | 4 | 6 | 8 | 2 |
| 2 | 10 | 2 | 2 | 8 |
| g=57, n=240 над GF (16) | | | | |
| 1 | 4 | 216 | 236 | 3 |
| 2 | 10 | 200 | 230 | 4 |
| 3 | 20 | 184 | 220 | 8 |
| 5 | 35 | 172 | 205 | 14 |
| 6 | 56 | 148 | 184 | 32 |
| 7 | 84 | 100 | 156 | 65 |
| 8 | 116 | 68 | 124 | 80 |
| 9 | 150 | 56 | 90 | 96 |
| 10 | 183 | 36 | 57 | 132 |

$$Рпом=\frac{d}{n}P_{од}(n)=\frac{d}{n}\sum_{i=t+1}^{n}C_n^iP_o^i(1-P_o)^{n-i}. \quad (5)$$

Застосування (n, k, d) блокових кодів над $GF(2^m)$, які виявляють і виправляють помилки, призводить до збільшення надлишковості даних, що передаються. Якщо зафіксувати енергію повідомлення, що передається в канал, то енергія, що припадає на один символ, зменшиться пропорційно внесеній надмірності.

Для оцінки завадостійкості передачі дискретних повідомлень розглянемо процес передачі 16-ми символами при когерентному прийомі 16-х ортогональних сигналів. На рис. 1 наведено залежності ймовірності помилки на один символ від співвідношення енергії сигналу до спектральної густини потужності шуму, що припадає на один біт (1 - без кодування (когерентний прийом 16-х ортогональних сигналів); 2 - з використанням алгеброгеометричного (240, 156, 65) коду на просторових кривих Артін - Шраєра над GF(16); 3 - з використанням (240, 156, 47) коду БЧХ над GF(16); 4 - з використанням (17, 11, 7) коду РС над GF(16)).

Як показує аналіз наведених залежностей застосування (240, 156, 65) коду дозволяє отримати енергетичний виграш від кодування (ЕВК) 0,5 - 0,8 дБ, що обумовлює відповідне підвищення завадостійкості передачі дискретних повідомлень.

Розглянемо процес передачі 64-ми символами при когерентному прийомі 64-х ортогональних сигналів. На рис. 2 наведено залежності ймовірності помилки на один символ від співвідношення енергії сигналу до спектральної густини потужності шуму, що припадає на один біт (1 – без кодування (когерентний прийом 64-х ортогональних сигналів); 2 – з використанням алгеброгеометричного (4032, 2667, 869) коду на просторових кривих Артін-Шраєра над GF(64); 3 - з використанням (4032, 2667, 755) коду БЧХ над GF(64); 4 – з використанням (65, 45, 21) коду РС над GF(64).

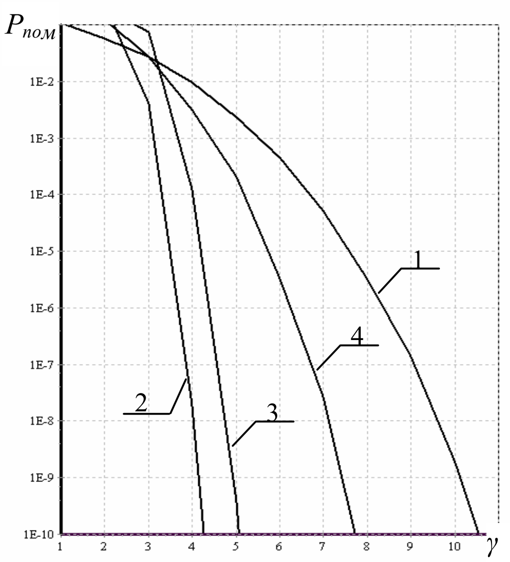


Рис. 1. Залежності ймовірності помилки 16-х символів від співвідношення енергії сигналу до спектральної густини потужності шуму

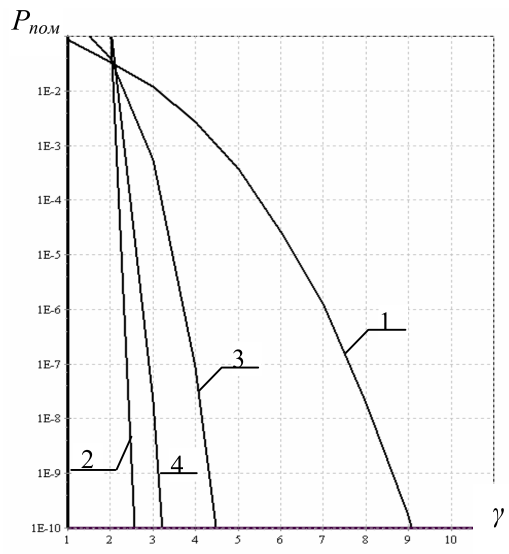


Рис. 2 - Залежності ймовірності помилки 64-ічних символів від співвідношення енергії сигналу до спектральної густини потужності шуму

Як показує аналіз наведених залежностей застосування алгеброгеометричних кодів на просторових кривих дозволяє отримати ЕВК 0,3 - 0,5 дБ, що обумовлює відповідне підвищення завадостійкості передачі дискретних повідомлень. Крім того, очевидно, що подальше збільшення довжини й потужності алфавіту символів приведе до подальшого росту ЕВК і наближення до границі Шеннона ймовірності помилкового прийому.

## Висновок

Таким чином, проведені дослідження показали, що найбільш ефективним засобом підвищення завадостійкості передачі дискретних повідомлень є методи канального (завадостійкого) кодування. Перспективним напрямком у їхньому розвитку є алгеброгеометричні коди на просторових кривих. Практичне використання таких кодів дозволить підвищити енергетичну ефективність передачі повідомлень каналами з випадковими помилками, що при фіксованій імовірності помилкового прийому символу повідомлення дозволяє підвищити завадостійкість передачі дискретних повідомлень.

## Список літератури

*1. Цфасман М.А. Коды Гоппы, лежащие выше границы Варшамова-Гилберта / М.А. Цфасман // Проблемы передачи информации. – 1982. – Т.18, №3. – С. 3-6.*

*2. Гоппа В.Д. Коды на алгебраических кривых / В.Д. Гоппа // Доклады АН СССР. – 1981. – Т. 259, № 6. – С. 1289-1290.*

*3. Влэдуц С.Г. Алгеброгеометрические коды. Основные понятия / С.Г. Влэдуц, Д.Ю. Ногин, М.А.. Цфасман. – М.: МЦИМО, 2003. – 504 с.*

*4. Кузнецов А.А. Методика оценки эффективности помехоустойчивого кодирования в каналах с группирующимися ошибками / А.А. Кузнецов // Электронное моделирование: Международный научно-теоретический журнал. – К.: НАНУ, РАН, 2006. – № 3. – С. 49-60.*

*5. Кузнецов А.А. Исследование помехоустойчивости передачи дискретных сообщений с использованием алгеброгеометрических кодов на пространственных кривых / А.А. Кузнецов, В.И. Грабчак, И.В. Пасько // Системи обробки інформації: Збірник наукових праць. – Х.: ХУПС, 2007. – Вип. 8 (66). – С. 134-138.*

*Поступила в редколлегию 10.02.2014*

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. Ю.В. Стасєв, Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків.

### ИССЛЕДОВАНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ БЛОЧНЫХ КОДОВ С УЛУЧШЕННЫМИ СВОЙСТВАМИ

И.В. Пасько, О.В. Щенякин

*В статье исследуется энергетическая эффективность передачи дискретных сообщений М-ми ортогональными сигналами при применении алгеброгеометрических кодов на пространственных кривых. Оценивается энергетический выигрыш алгеброгеометрического кодирования.*

***Ключевые слова:*** *энергетическая эффективность, алгеброгеометрические коды, помехоустойчивость передачи дискретных сообщений.*

### RESEARCH OF POWER EFFICIENCY LINEAR SECTIONAL KODAS WITH THE IMPROVED PROPERTIES

I.V. Pasko, O.V. Shcheniakin

*In the article power efficiency of passing of discrete messages M-mi is investigated by ortogonal signals at application of algebrogeonetrical kodas on spatial curves. The power winning of the algebrogeonetrical encoding is estimated.*

***Keywords:*** *power efficiency, algebrogeonetrical kodas, antijammingness of passing of discrete messages.*