

УДК 531.0

Т.В. Барашкова

Вирумааский Колледж Таллиннского Технического Университета, Кохтла-Ярве, Эстония

## ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ УЛУЧШЕННОГО МЕТОДА СЕТОК

Предложен оригинальный метод численного дифференцирования интерполяционной функции. В качестве основы метода выбран улучшенный метод сеток. Доказано, что точность метода сеток зависит от степени полинома и от использования интервала перекрытия. Получены численные результаты с оценкой относительной неопределённости. В работе представлены результаты, которые позволяют оценить точность улучшенного метода сеток, так как дан практический приём оценки точности решения краевой задачи.

**Ключевые слова:** оценка точности метода сеток, метод неопределённых коэффициентов, матрица Вандермонда, неопределённость измерения.

### 1. Постановка проблемы

Точность метода сеток зависит от точности замены дифференциальных уравнений разностными уравнениями, от граничных условий, от точности приближённых вычислений. Для получения решений с заданной точностью, задачу решают с шагом крупной сетки, а затем с шагом мелкой сетки. Для оценки точности пользуются приближёнными вычислениями, абсолютная достоверность которых не доказана. Во многих примерах показано, что метод сеток является сходящимся, но не доказано, с какой точностью можно получить решение краевой задачи.

Для оценки точности улучшенного метода сеток рассмотрим элементарный пример, задачу Эйлера об устойчивости продольно сжатых стержней. Дифференциальное уравнение изогнутой оси кривой прогиба балки (рис.1), нагруженной продольной силой  $F$ , с введением безразмерной координаты  $\xi$  может быть записано в виде:

$$[g(\xi)]y'' + [r(\xi)]y' + \lambda[s(\xi)]y = \{f(\xi)\}. \quad (1)$$

При условии, что  $y(0) = 0$  и  $y(n) = 0$ . Где  $[g(\xi)]$ ,  $[r(\xi)]$  и  $[s(\xi)]$  – диагональные матрицы из соответствующих собственных значений функций  $g(\xi)$ ,  $r(\xi)$  и  $s(\xi)$  в узлах интерполяции,  $f(\xi)$  – значения функции в правой части дифференциального уравнения в тех же узлах интерполяции.

Есть возможность с помощью формул [2-4] рассчитать значения производных от интерполяци-

онной функции  $P_n^*(\xi)$  в некоторой точке конечного интервала. Например, при  $\xi = 1$  значение производной третьего порядка равно

$$\left. \frac{d^3 P_n^*(\xi)}{d\xi^3} \right|_{\xi=1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 & 24 & 120 & \dots \\ n & (n-1) & (n-2) & & & & \end{bmatrix}^T \cdot [W_n]^{-1} \{y\}. \quad (2)$$

Значения производной в узлах интерполяции легко получить из формулы (2), если предположить, что  $\xi$  последовательно принимает значения:  $\xi = 0, 1, 2, \dots, n$ . Тогда ряд  $m$ -й производной  $[d\xi^m]^T$  представлен квадратной матрицей. При  $n = 4$  матрица-столбец или вектор-столбец, образованный из значений производной второго порядка от интерполяционной функции  $P_n^*(\xi)$ , может быть записан как

$$P_4^{*''}(\xi) = \frac{d^2 P_4^*(\xi)}{d\xi^2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 12 & 48 \\ 0 & 0 & 2 & 18 & 108 \\ 0 & 0 & 2 & 24 & 192 \end{bmatrix} \times \quad (3)$$

$$\times [-W_4]^{-1} \{y\} = [-]_4'' [-W_4]^{-1} \{y\},$$

где  $[-]_4''$  матрица, которая получается в результате данной операции. Нижний индекс матрицы указывает на порядок полинома, а верхний индекс указывает на порядок производной. Матрица Вандермон-

да –  $[W_n]$ , элементами которой являются последовательные натуральные степени элементов образующего вектора. Выше исследованные формулы дифференцирования функций, которые определены в дискретных точках, являются обобщением классических формул численного дифференцирования.

## 2. Оценка точности улучшенного метода сеток

Оценим точность улучшенного метода сеток. Оценка точности может быть выполнена классическими методами [5, 6]. Введём матрицу  $[O_n^{(m)}]$ , которая одновременно выполняет как операции интерполяции, так и дифференцирования функции, заданной вектором  $\{y\}$

$$[O_n^{(m)}] = [-]_n^{(m)} [W_n]^{-1}. \quad (4)$$

С учётом (3) и (4) система линейных алгебраических уравнений в матричной форме может быть записана, как

$$[g(\xi)][O_n^r]\{y\} + [r(\xi)][O_n^r]\{y\} + \lambda[s(\xi)]\{y\} = \{f(\xi)\}. \quad (5)$$

Система уравнений (5) в соответствии с дистрибутивной операцией может быть записана в следующем виде

$$([g(\xi)][O_n^r] + [r(\xi)][O_n^r] + \lambda[s(\xi)])\{y\} = \{f(\xi)\} \quad (6)$$

или  $[D]\{y\} = \{f(\xi)\}, \quad (7)$

где  $[D] = [g(\xi)][O_n^r] + [r(\xi)][O_n^r] + \lambda[s(\xi)]$  – это матричный оператор данного дифференциального уравнения. В случае постоянных коэффициентов матричный оператор становится более простым. Так как все  $m$  матриц, включённых в уравнение (7), могут быть рассчитаны заранее, составление уравнений становится проще. Решение системы алгебраических уравнений (7) может быть осуществлено с помощью обратной матрицы

$$\{y\} = [D]^{-1} \{f(\xi)\}. \quad (8)$$

Такое условие особенно удобно в случае большого числа элементов в правой части системы уравнений  $\{f(\xi)\}$ . В данном случае обратная матрица

$[D]^{-1}$  будет играть роль решения уравнения.

## 3. Задача Эйлера

Для иллюстрации примера оценки точности метода сеток представим конкретный результат, опираясь на рис. 1 и уравнения 9-11.

$$x = \frac{1}{4}\xi; \xi = \frac{4x}{1}; \quad (9)$$

$$\frac{d^2v}{d\xi^2} + \lambda v = 0, \quad (10)$$

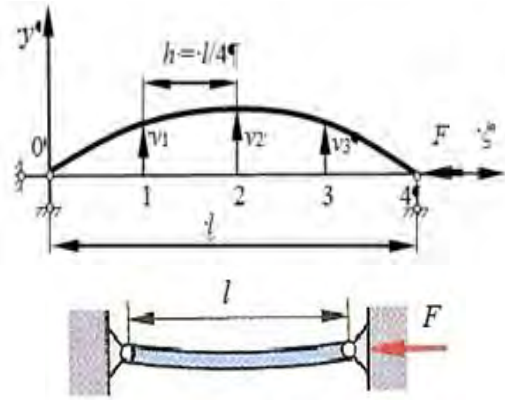


Рис. 1. Задача Эйлера

где  $\lambda = \frac{Fl^2}{16EI}, \quad (11)$

с граничными условиями  $v(0) = v(l) = 0$ .

С помощью соотношения (4) переход от данного дифференциального уравнения к соответствующей системе линейных дифференциальных уравнений упрощается.

Матричные операторы  $[O_2^r]$  и  $[O_4^r]$  будут равны соответственно

$$[O_2^r] = [-]_2^r [W_2]^{-1} = \begin{bmatrix} 002 \\ 002 \\ 002 \end{bmatrix} \times \quad (12)$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1,5 & 2 & -0,5 \\ 0,5 & -1 & 0,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[O_4^r] = [-]_4^r [W_4]^{-1} = \frac{1}{24} \times \begin{bmatrix} 70 & -208 & 228 & -112 & 22 \\ 22 & -40 & 12 & 8 & -2 \\ -2 & 32 & -60 & 32 & -2 \\ -2 & 8 & 12 & -40 & 22 \\ 22 & -112 & 228 & -208 & 70 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Используя соотношение (7) и матричный оператор  $[O_2^r]$  (12), получим из уравнения (10) с учётом интервалов перекрытия характеристическую систему алгебраических уравнений

$$\left. \begin{aligned} 2v_1 - v_2 &= \lambda v_1 \\ -v_1 + 2v_2 - v_3 &= \lambda v_2 \\ -v_2 + 2v_3 &= \lambda v_3 \end{aligned} \right\}. \quad (14)$$

С помощью этой системы определяется величина критической силы (рис.1)

$$F_{кр} = \frac{9,38EI}{l^2}. \quad (15)$$

Рассматриваем основной случай закрепления концов стержня, поэтому число полуволин синусои-

ды, располагающихся на длине изогнутого стержня, равно единице. Критическая сила в таком случае определяется выражением

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}. \quad (16)$$

Относительная неопределённость гибкости стержня, которая может служить оценкой точности улучшенного метода сеток, равна 0,052.

Применяя матричный оператор  $[O_4^n]$  (13), характеристическая система алгебраических уравнений получается из уравнения (10) без использования интервалов перекрытия и с тем же числом неизвестных

$$\left. \begin{aligned} 40v_1 - 12v_2 - 8v_3 &= \Theta v_1 \\ -32v_1 + 60v_2 - 32v_3 &= \Theta v_2 \\ -8v_1 - 12v_2 + 40v_3 &= \Theta v_3 \end{aligned} \right\}, \quad (17)$$

где  $\Theta = 4! \cdot l$ , с величиной критической силы

$$F_{кр} = \frac{9,395EI}{l^2}. \quad (18)$$

Относительная неопределённость гибкости стержня, которая может служить оценкой точности улучшенного метода сеток, равна 0,050.

Увеличивая число узлов интерполяции (рис. 2), используя матричный оператор  $[O_2^n]$ , получим

$$F_{кр} = \frac{9,79EI}{l^2}. \quad (19)$$

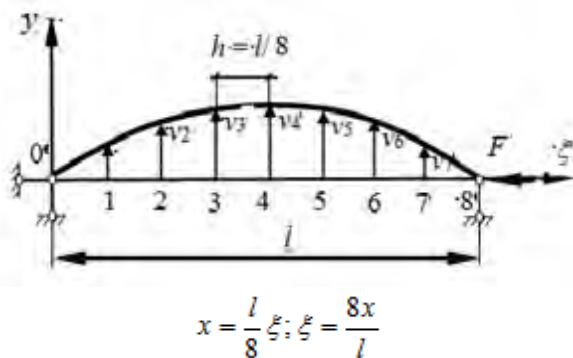


Рис. 2. Численный пример

Относительная неопределённость гибкости стержня, которая может служить оценкой точности улучшенного метода сеток, равна 0,0081.

Применяя матричный оператор  $[O_4^n]$  в случае двукратного числа узлов (см. рис. 2) и используя интервал перекрытия так, что границы интервала  $[a, b]$  соответственно состоят из узлов расширенного интервала  $[A, B]$ , один за другим, т.е. 0, 0, 1, 2, 3, 4, характеристическая система уравнений получается в виде (21), где

$$\lambda = \frac{F \cdot l^2}{64EI}. \quad (20)$$

$$\left. \begin{aligned} 40v_1 - 12v_2 - 8v_3 + 2v_4 &= 4! \cdot lv_1 \\ -32v_1 + 60v_2 - 32v_3 + 2v_4 &= 4! \cdot lv_2 \\ 2v_1 - 32v_2 + 60v_3 - 32v_4 + 2v_5 &= 4! \cdot lv_3 \\ 2v_2 - 32v_3 + 60v_4 - 32v_5 + 2v_6 &= 4! \cdot lv_4 \\ 2v_3 - 32v_4 + 60v_5 - 32v_6 + 2v_7 &= 4! \cdot lv_5 \\ 2v_4 - 32v_5 + 60v_6 - 32v_7 &= 4! \cdot lv_6 \\ 2v_4 - 8v_5 - 12v_6 + 40v_7 &= 4! \cdot lv_7 \end{aligned} \right\}, \quad (21)$$

Значение критической силы равно

$$F_{кр} = 9,87544EI/l^2. \quad (22)$$

Относительная неопределённость гибкости стержня, которая может служить оценкой точности улучшенного метода сеток, равна 0,00059.

### Заключение

Рассмотренная техника вычислений обычных производных может быть расширена для случая вычисления частных производных. Полученные формулы позволяют вычислить интерполяционную функцию и её производные, не прибегая к их различию, как это выполняется в классическом методе сеток. Использование интервалов перекрытия позволяет увеличить точность вычислений. Полученные результаты указывают на то, что можно регулировать точность результатов либо изменением степени интерполяционного полинома, либо с помощью интервала перекрытия. Это главное отличие не только от обычного метода сеток, но и от улучшенного метода сеток. Получено существенное упрощение расчетных формул; в частных случаях они совпадают с расчётными формулами L. Kollats'. Такое упрощение связано с применением символьных операций с матрицами. Полученные результаты могут быть применены для решения краевых задач разного класса, для разрешения проблемы собственных значений. В частности, такой подход может быть использован для расчётов напряжённых состояний в резьбовых соединениях [7]. Последнее особенно актуально в вибрационной диагностике конструкций машин, механических узлов и деталей, промышленных зданий [8 – 12].

Исследование поддержано проектом SF0140113Bs08 (Mechatronic and Production Systems Proactivity and Behavioural Models)

### Список литературы

1. L.Kollats, *Numerical methods of the decision of the differential equations*. M., 1969.
2. Aryassov, G.; Barashkova, T.; Gornostaiev, D.; Petritsenko, A. (2011). *Development of the Improved Method of Grids*. In: *Annals of DAAAM for 2011 & Proceedings of the 22nd International DAAAM Symposium "Intelligent Manufacturing & Automation: Power of Knowledge and Creativity"*: 22 nd International DAAAM Symposium, University of Vienna, Vienna, Austria, 23-26th November 2011. (Eds.)B.Katalinic. Vienna, Austria: DAAAM International Vienna, 2011, 0565 – 0566.

3. Aryassov, G. ; Barashkova, T. ; Gornostajev, D.; Petritshenko, A. (2010). Generalization of the method of finite differences, Proceedings of the 21st DAAAM World Symposium, (Oct. 2010), pp. 0547-0548, ISSN 1726-9679.

4. Aryassov, G. & Barashkova, T. (2009). Mathematical methods for vibrations and their measurement. Materials, Methods & Technologies, pp. 272 – 280, ISSN 1313-2539.

5. V.Miln, Numerical analysis. M., 1951.

6. Mathematical Handbook edited by Granino A. Korn, Theresa M.Korn, McCrew- Company New York, 831 p.

7. S.Timoshenko strength of Materials Third edition 1996, Robert E Krieger Publishing Company, Malabar, Florida, USA.

8. G.Aryassov, V.Strizhak To the Topic of Determination of Stress Concentration in Threaded Joints, 17th International Conference BEM/FEM99 Boundary&Finite Elements Methods in Mechanics of Solids&Structures, St. Petersburg, 1999.

9. Shock and Vibration Handbook edited by Cyril H.Haris, McCrew- Hill Book Company, New York, 1992, 1312.

10. K. Yosida. Operational Calculus. Springer, 1984. ISBN 0-387-96047-3.

11. Aryassov, G; Petritshenko, A. (2009). Study of Free Vibration of Ladder Frames Reinforced with Plate. J. Solid State Phenomena, pp. 368-373, ISSN 1662-9779.

12. Aryassov, G; Petritshenko, A. (2008). Analysis of Stress Distribution in Roots of Bolt Threads. Pr. of the 19th International DAAM Symposium, pp. 0035-0036, ISSN 1726-9679.

Поступила в редколлегию 28.03.2014

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. И.П. Захаров, Харьковский национальный университет радиоэлектроники.

## ОЦІНКА ТОЧНОСТІ ПОЛІПШЕНОГО МЕТОДУ СІТОК

Т.В. Барашкова

Запропоновано оригінальний метод чисельного диференціювання інтерполяційної функції. В якості основи методу обраний покращений метод сіток. Доведено, що точність методу сіток залежить від ступеня полінома і від використання інтервалу перекриття. Отримано чисельні результати з оцінкою відносної невизначеності. У роботі представлені результати, які дозволяють оцінити точність поліпшеного методу сіток, так як дано практичний прийом оцінки точності рішення крайової задачі.

**Ключові слова:** оцінка точності методу сіток, метод невизначених коефіцієнтів, матриця Вандермонда, невизначеність вимірювання.

## ACCURACY ESTIMATION OF THE IMPROVED METHOD OF GRIDS

T.V. Barashkova

The original method of digital differentiation of the approximation of function is synthesized. The method is based on generalize the improved method of grids. The question of accuracy of the obtained solution is examined. The numerical results are presented. The use of overlapping of interpolation intervals allows increasing an accuracy of the solution. The calculation results show that it is possible to adjust the accuracy of the solution either by changing the degree of the interpolation polynomial or with the help of overlapping of intervals.

**Key words:** Matrix Equations, Method of Grids, Method of Uncertain Coefficients, measuring uncertainty.