

УДК 621.396.96

В.І. Грабчак, Є.Г. Іваник, С.А. Цибуля

Академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного, Львів

## УЗАГАЛЬНЕННЯ ЗАДАЧІ ПРО ШВИДКОДІЮ ЩОДО ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ РУХОМ ЛІТАЛЬНОГО АПАРАТУ

Викладено постановку задачі в термінах фазового простору про оптимальне керування літальним апаратом (ЛА), як нестационарним рухомих об'єктом. Запропоновано підхід до визначення шляху найменшого часу польоту ЛА, який рухається в просторі за відповідних початкових і кінцевих умов. Побудовано фазові траєкторії на ділянках, де фазове керування є сталим. Отримано формули для оптимального керування зовнішніми силовими факторами, які діють на рухомих об'єкт.

**Ключові слова:** літальний апарат, оптимізаційні методи, критерій оптимального керування, фазовий простір, функція мети, математична модель.

### Вступ

**Постановка проблеми в загальному вигляді та аналіз літератури.** Розвиток теорії оптимального керування обумовив стрімке просування методів синтезу керувань ЛА, заснованих на використанні положень теорії оптимальних систем [1 – 3]; історично постановка задач оптимального управління зародилась із намагання врахувати два визначальних фактори:

1) наявність випадкових перешкод і шумів, які діють на ЛА, тобто у невизначеності деяких параметрів об'єктів керування;

2) різного роду обмежувальних умов, накладених на управляючі впливи і внутрішні параметри керованого об'єкта [4 – 6].

З появою ЛА різного призначення виникли нові задачі, найскладніша з яких полягає в розрахунку траєкторії ракети з працюючими двигунами в земній атмосфері з урахуванням програми керування. Слід зауважити, що для процесу керування треба переробляти вхідну інформацію в режимі реального, часу, що можливе лише із залученням потужних обчислювальних комплексів.

Крім того, постановка задачі оптимального управління корелюється намаганням врахувати різного роду обмежувальних умов, накладених на управляючі впливи і внутрішні параметри ЛА.

При управлінні ЛА виникає необхідність швидкої зміни напрямку руху, тобто виникає певна задача швидкодії. Справді, момент сил, який розвертає ЛА, як правило, завжди обмежений, і треба так розпорядитись переключенням рулів (які міняють розвертаючий момент сил), щоб мінімізувати час переходу ЛА з одного напрямку руху на інший [1 – 3].

Більшість задач, які можна звести до задач лінійного або нелінійного програмування, до яких в переважній більшості зводяться проблеми, що постають перед фахівцями зовнішньої балістики,

передбачає залежність протікання розглядуваних явищ і процесів за часом (певної кількості періодів або етапів часу). Тому в процесі розв'язування такого роду задач, які можна назвати багатоетапними, слід брати до уваги поетапний розвиток процесу.

У більшості праць [1 – 8] постановка задач оптимального керування зводиться до наступного: нехай певна фізична керована система  $S$  знаходиться в початковому стані  $S_0 \in \hat{S}_0$ , протягом деякого часу її стан змінюється і вона переходить в деякий кінцевий стан  $S_k \in \hat{S}_k$ . Процес зміни стану системи пов'язаний певним чином з обумовленим критерієм  $Z$ , вираженим в числовій формі. Проблема полягає в такій організації процесу, щоб асоційований з ним критерій досяг оптимального (найменшого або найбільшого) значення. Якщо позначити множину можливих зовнішніх впливів (керувань) через  $U$ , то задачу можна звести до вибору з множини можливих керувань  $U$  такого  $U^*$ , яке дозволяє перемістити систему  $S$  з початкового стану в кінцевий таким чином, щоб критерій  $Z(S)$  набув оптимального значення  $Z^*$ .

Зрозуміло, що стан довільної фізичної системи описується відповідними параметрами у числовій формі; що стосується ЛА, то такими можуть бути витрати пального, координати точки місцеперебування відносно вибраної системи координат, кінематичні характеристики, тобто компоненти вектора швидкості і прискорення в тривимірному реальному просторі.

**Метою статті** є узагальнення одновимірної задачі про швидкодію щодо керованого руху ЛА як нестационарного рухомого об'єкту, який рухається у просторі, за відповідних заданих початкових і кінцевих умов та можливістю керування зовнішньою силою, яку можна змінювати в заданих межах (керуючий вплив).

## Основна частина

Стан ЛА у кожний момент часу характеризується скінченим набором величин – трьома координатами положення  $x_1, x_2, x_3$  і трьома складовими його вектора швидкості  $v_1, v_2, v_3$ . Складові вектора швидкості  $v_1, v_2, v_3$  будемо позначати для уніфікації  $x_4, x_5, x_6$  відповідно.

Сформулюємо тепер задачу у термінах фазового простору даної системи. У шестивимірному просторі задано дві точки  $x^0$  і  $x^1$ . У початковий момент часу система знаходиться у початковій точці з координатами  $(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0, x_5^0, x_6^0)$  (точка старту). Треба знайти таку програму зміни керування впливів у часі або залежно від фазових координат, щоб зображуюча точка перейшла по деякій траєкторії з початкової точки  $x^0$  у задану точку  $x^1$  з координатами  $(x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_4^1, x_5^1, x_6^1)$ , за умови, що певним чином заданий функціонал досягає свого мінімального значення. На координати стану ЛА накладаються певні обмеження, які не мають бути порушені, так наприклад, на координати швидкості можуть бути накладені обмеження зверху, продиктовані технічними міркуваннями його міцності, термостійкості та ін.

Задача оптимального управління системою полягає в знаходженні такої послідовності розв'язків  $u(t_1), u(t_2), \dots$ , щоб керована система за  $N$  кроків опинилась у найвигіднішому стані. Міра вигоди стану системи може задаватись деякою числовою функцією  $\varphi(x)$ , що в кінцевому стані має досягти свого максимального (або мінімального) значення  $\varphi(x(t_{N+1}))$ . Характерною рисою керуючих систем є їх дискретність, тобто керуючі впливи виробляються в дискретні моменти часу з вибраним кроком роботи  $h$ , який визначається тактом керування [9, 10]. Під  $j$ -м тактом керування  $\tau_j$  розуміємо час, який затрачається на перетворення вхідного повідомлення в сукупності сигналів на виході обчислювального пристрою, який працює згідно відповідної програми, покладаємо

$$\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_j < \dots < \tau_k.$$

Надалі такти керування позначатимемо рядом невід'ємних чисел  $0, 1, 2, \dots, n, \dots, k$ . Біжучий такт, який відповідає даному моменту часу, позначатимемо через  $n$ . Послідовність виконання логічних умов керуючого алгоритму в кожному  $j$ -му такті керування має назву траєкторії обрахунку  $j$ -го такту. Стан процесу в кожному такті керування відображається траєкторією підрахунку, еволюція яких має вигляд деякої функції, що відображає хід процесу керування системою в цілому, відображення на площині якої є графіком функції керування.

В подальшому для зручності викладення матеріалу, введемо логічну функцію  $\Omega$ , яку задамо як

$$\Omega = \begin{cases} 0, H[n] = H[n+1]; \\ \pm 1, H[n] \neq H[n+1], \end{cases}$$

причому  $H[n]$  – траєкторія підрахунку  $n$ -го такту керування;  $H[n+1]$  – траєкторія підрахунку наступного  $n+1$  такту керування.

За допомогою введеної логічної функції визначаються рівні керування, зокрема рівнем керування  $L_s$  назвемо сукупність значень функції керування в  $s$  ( $s \geq 1$ ) тактах керування, для яких  $\Omega = 0$ .

Перехід на деякий наступний ( $s \pm p$ ) рівень керування відбувається при  $\Omega = \pm 1$ , причому додатне значення  $\Omega$  означає перехід на верхній  $s+p$  рівень, від'ємне значення  $\Omega$  – перехід на нижній  $s-p$  ( $p \geq 1$ ) рівень.

Зрозуміло, що мають існувати способи фіксації зміни траєкторії підрахунку та її належність до відповідного рівня в даному  $j$ -му такті керування.

Викладена тут система може бути відображена наочною геометричною інтерпретацією процесу керування, якщо по осі абсцис відкладати такти керування ( $n$ ), а по осі ординат – рівні керування  $L_s$  ( $s = 0, 1, 2, \dots, k$ ), причому  $k$  відповідає кінцевому (найвищому) рівню керування  $L_k$ , який визначає досягнення поставленої мети, причому утворену площину можна назвати площиною керування. Початок процесу керування визначається біжучим значенням  $t_p$  ( $n=0$ ), завершення процесу – часом  $t_k$  ( $k = (t_k - t_p)/h$ ). Процес керування тоді має вигляд руху деякої абстрактної точки в площині керування з рівня на рівень, а траєкторія цієї точки є графік функції керування. Кожній траєкторії обрахунку, що стосується певного рівня керування, дається відповідний номер. Найкраще розмістити по осі ординат рівні таким чином, щоб рух точки, з метою більшої наочності, відбувався за зростанням номерів до верхнього рівня  $L_k$ . Досягнення рівня  $L_k$  протягом проміжку часу  $t = t_k - t_p$  означає досягнення заданої мети керування ЛА.

Розрізняють два види процесів керування: ідеальний і нормальний.

Ідеальним процесом керування називають процес, який задовольняє таким умовам.

1. Функція керування  $\psi(n)$  – ступінчато-зростаюча функція часу така, що

$$\psi(n) \geq \psi(n-1).$$

2. Момент переходу з  $i$ -го рівня керування на  $i+1$ -й рівень визначається як

$$t_{L_i} = M[t_{L_i}],$$

де  $t_{L_i}$  – час перебування процесу на  $i$ -му рівні, а  $M[t_{L_i}]$  – математичне сподівання часу  $t_{L_i}$ .

3. Час досягнення процесом  $i$ -го рівня керування визначається

$$t_{L_i}^* = \sum_{s=1}^{i-1} M[t_{L_s}],$$

де  $t_{L_i}^*$  – час досягнення процесом  $i$ -го рівня керування.

4. Загальний час процесу керування не перевищує заданого, тобто

$$\sum_{s=1}^{k-1} M[t_{L_s}] \leq t_k - t_p.$$

Практично ймовірність ідеального процесу керування вельми мала. Насправді момент переходу з одного рівня на інший має розкид в околі математичного сподівання часу його досягнення, який визначається відповідним законом розподілу. Тому на практиці має місце нормальний процес, для визначення якого необхідно знати функцію розподілу  $F[t_{L_i}]$  часу перебування процесу на кожному рівні.

Отже, нормальним процесом керування називають процес, який задовольняє наступним умовам.

1. Функція керування  $\psi(n)$  – ступінчато-зростаюча функція часу.

2. Момент переходу з  $i$ -го рівня керування на  $i+1$ -й рівень визначається як

$$t_{L_{i+1}}^+ = t_{L_i}^* + \Delta t_{L_i}^+ / F[t_{L_i}] = P(t_{L_i} < t_{L_i}^+) = \varepsilon_1,$$

$$t_{L_{i+1}}^- = t_{L_i}^* + \Delta t_{L_i}^- / F[t_{L_i}] = P(t_{L_i}^- < t_{L_i}) = \varepsilon_2,$$

де  $t_{L_i}^*$  – час досягнення процесом  $i$ -го рівня;  $\Delta t_{L_i}^+$  – максимальний час перебування процесу на  $i$ -му рівні;  $\Delta t_{L_i}^-$  – мінімальний час перебування процесу на  $i$ -му рівні;  $t_{L_{i+1}}^+$  і  $t_{L_{i+1}}^-$  – часові моменти переходу на  $i+1$ -й рівень;  $\varepsilon_1$  і  $\varepsilon_2$  – відповідно досить велика і досить мала (у визначеному сенсі) ймовірність значення  $t_{L_i}$ , яка визначається з графіка функції розподілу  $F[t_{L_i}]$ ; похила ризика означає умовну ймовірність.

3. Мінімальне і максимальне значення часу досягнення процесом  $i$ -го рівня керування визначається

$$(t_{L_i}^*)^- = \sum_{s=1}^{i-1} \Delta t_{L_s}^- / F[t_{L_s}] = \varepsilon_2,$$

$$(t_{L_i}^*)^+ = \sum_{s=1}^{i-1} \Delta t_{L_s}^+ / F[t_{L_s}] = \varepsilon_1.$$

4. Загальний час процесу керування не перевищує заданого, тобто

$$\sum_{s=1}^{k-1} \Delta t_{L_s}^+ / F[t_{L_s}] = \varepsilon_1 \leq t_k - t_p,$$

і як наслідок з другої та третьої умов

$$\sum_{s=1}^{k-1} \Delta t_{L_s}^- / F[t_{L_s}] = \varepsilon_2 \leq \sum_{s=1}^{k-1} M[t_{L_s}] \leq \sum_{s=1}^{k-1} \Delta t_{L_s}^+ / F[t_{L_s}] = \varepsilon_1.$$

На практиці відбувається реальний процес керування, який відрізняється від нормального тим, що перехід з рівня на рівень може відбуватись не в строгій послідовності, а також не виключено зворотні переходи, що свідчить про немонотонність функції керування, і, нарешті, значення реальної функції керування  $\psi(n)$  на певних рівнях можуть виходити за межі, які визначаються нормальним процесом керування. Враховуючи вищевикладене можна стверджувати, що максимально допустимий час досягнення рівня  $L_i$  за умов виконання задачі в перебігу реального процесу виражається так

$$t_{L_i}^* = \sum_{\mu=1}^n \sum_{s=1}^{i-1} (t_{L_s})_{\mu} \leq t_k - t_p,$$

де  $t_{L_i}$  – час перебування процесу на  $s$ -рівні;  $\mu$  – кількість перебувань процесу на  $s$ -рівні протягом виконання одного маневру. Найдоцільнішим може виявитись переведення процесу керування на одну з траєкторій, яка досягає рівня  $L_s$  до  $n+j$ -го такту керування за допомогою корегуючих впливів, передбачених керуючим алгоритмом.

Повертаючись до реального опису руху керованого нестационарного об'єкта, яке має місце в деякій області  $D$  матеріального простору і в часі  $t \in (0, t_k]$ , поставимо за мету побудувати розв'язок задачі в класі неперервних функцій по координатам  $x_i (i=1, 2, 3)$  і часі  $t$ , тобто у класі функцій  $C(D \times (0, t_k])$ . Позначаючи через  $\psi(x, t)$  керуючу функцію поставимо так задачу оптимізації: знайти таке керування  $\psi(x, t) \in C(D \times (0, t_k])$ , щоб функціонал

$$J[\psi] = \max_{(x,t)} |S(x, t, \psi) - \phi(x, t)|, \quad (x, t) \in D_1 \times (0, t_k] \quad (1)$$

досягав свого мінімуму, де  $S(x, t, \psi)$  – координати кінцевої точки простору, в яку в момент часу  $t = t_k$  приходить керований об'єкт;  $\phi(x, t)$  – місце-перебування цілі (в просторі і в часі) в підобласті  $D_1 \subseteq \bar{D}$ , яку має досягти в кінцевому підсумку ЛА.

Цілком природно, за можливості, шукати таке керування  $\psi(x, t)$ , яке забезпечує в першу чергу досягнення точної нижньої грані функціонала (1), тобто по суті будувати розв'язок рівняння

$$\inf J[\psi] = 0,$$

що рівносильне рівності

$$S(x, t, \psi) = \phi(x, t), \quad (x, t) \in D_1 \times (0, t_k]. \quad (2)$$

Розв'язок

$$\psi(x, t) \in C(D_1 \times (0, t_k]),$$

який забезпечує виконання рівності (2) існує за певних вимог, які накладаються на гладкість функції керування, її інтегрованість або узгодженість її

розподілу з крайовими умовами. При невиконанні відповідних умов керування  $\psi(x, t)$  можна знайти в класі узагальнених функцій [11–13], або будувати його в класі неперервних функцій у вигляді мінімізуючої послідовності, пов'язаної з критерієм оптимізації (1).

Розглянемо приклад екстремальної задачі, яка є по суті модифікацією задачі про швидкодію. Прийmemo, що рух ЛА відбувається в деякій вертикальній площині в системі координат  $xOy$  та керується зовнішньою силою, яку можна змінювати в заданих межах. Рух ЛА слід зупинити в певному фіксованому положенні за найкоротший час. В наведеній постановці особливість задачі полягає в тому, що зовнішні зусилля поділяються на дві частини: одна з них – фізичні сили (наприклад, тяжиння), інша – сили тяги, керовані впливи у вигляді обмеженості діапазонів керуючих рулів і механізмів. Тобто, стартуючи з деякого положення, ЛА має вийти у точку із заданими просторовими координатами, мати задану швидкість як за величиною, так і за напрямом, а також досягти цю точку за найкоротший час.

Математичну модель руху ЛА, яка складається з системи двох диференціальних рівнянь другого порядку, формалізуємо у вигляді модифікованої задачі про швидкодію, що матиме вигляд:

$$t_k \rightarrow \inf \begin{cases} m\ddot{x} = u_1, u_1 \in [u_1^{(1)}; u_2^{(1)}], \\ m\ddot{y} = u_2, u_2 \in [u_1^{(2)}; u_2^{(2)}]; \end{cases} \quad (3)$$

$$x(0) = x_0, y(0) = 0, \dot{x}(0) = v_{0x}, \dot{y}(0) = v_{0y},$$

$$x(t_k) = 0, \dot{x}(t_k) = 0, y(t_k) = 0, \dot{y}(t_k) = 0.$$

Зменшення числа параметрів задачі згідно методики [1], можна виконати за допомогою заміни:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_x \xi(t) + B_x (t - t_k)^2; \\ y(t) &= A_y \zeta(t) + B_y (t - t_k)^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Внаслідок заміни (4) загальний вигляд задачі оптимального керування (3) не змінюється, але параметри задачі набувають іншого змісту, зокрема, якщо прийняти

$$A_x = \frac{u_1^{(1)} - u_2^{(1)}}{2m}, B_x = \frac{u_1^{(1)} + u_2^{(1)}}{4m};$$

$$A_y = \frac{u_1^{(2)} - u_2^{(2)}}{2m}, B_y = \frac{u_1^{(2)} + u_2^{(2)}}{4m},$$

то неважко пересвідчитись, що значення  $\xi(t)$ ,  $\zeta(t)$  нововведених функцій  $\xi(t)$ ,  $\zeta(t)$  перебувають в інтервалі  $[-1; 1]$ . Не порушуючи загальності можна далі вважати, що

$$m = 1, u_1^{(1)} = u_1^{(2)} = -1, u_2^{(1)} = u_2^{(2)} = 1.$$

Якщо ввести позначення

$$x = x_1, y = x_2, \dot{x} = x_3, \dot{y} = x_4,$$

то реалізація стандартної схеми виконується наступним ланцюжком послідовних дій:

$$t_k = \int_0^{t_k} 1 \cdot dt \rightarrow \inf; \dot{x}_1 = x_3, \dot{x}_3 = \bar{u}_1, \bar{u}_1 \in [-1; 1];$$

$$\dot{x}_2 = x_4, \dot{x}_4 = \bar{u}_2, \bar{u}_2 \in [-1; 1];$$

$$x_1(0) = \bar{x}_0, x_2(0) = 0, x_3(0) = \bar{v}_{0x}, x_4(0) = \bar{v}_{0y}; \quad (5)$$

$$x_1(t_k) = 0, x_2(t_k) = 0, x_3(t_k) = 0, x_4(t_k) = 0.$$

Зауважимо, що величини  $\bar{x}_0, \bar{v}_{0x}, \bar{v}_{0y}, \bar{u}_1, \bar{u}_2$  відповідають безрозмірним значенням відповідно початкового положення, компонентам вектора початкової швидкості ЛА та значень керуючих зовнішніх сил. Таким чином, шукане керування є двовимірним вектором  $\bar{u}(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ , причому кожна з координат не може перевищувати за модулем одиницю, тобто простір керувань є площиною, а область допустимих керувань є квадратом зі стороною 2. Іншими словами, оскільки в сформульованій задачі оптимального керування маємо обмеження на керування виду

$$|\bar{u}_i(t)| \leq 1, (i = 1, 2),$$

то множиною допустимих керувань є область  $\omega = [-1; 1] \times [-1; 1]$ .

В більшості типових випадків оптимальне керування лежить на межі області можливих керувань: мінімальний час досягається за умови керування, де майже всюди  $|u_i(t)| = 1$ . Ще одна обставина, яку слід брати до уваги – неможливість досягти неперервності в керуванні. Це пов'язано з тим, що в класі неперервних керувань розв'язок задачі переважно не існує, тобто виникає необхідність розглядати “ламани екстремали” (що відповідає кусково-неперервним керуванням).

Стосовно питання існування розв'язку поставленої задачі можна діяти так: знайшовши з принципу Лагранжа функції  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  (тобто  $x(t)$ ,  $y(t)$  у позначеннях вихідної постановки задачі), які “підозрілі” на оптимальність, безпосередньою перевіркою переконуємось у тому, що дійсно знайдено розв'язок. Запишемо функцію Лагранжа для сформульованої задачі

$$\begin{aligned} \mathfrak{J} &= \int_0^{t_k} L dt + \mu_1(x_1(0) - x_0) + \mu_2(x_2(0) - 0) + \\ &+ \mu_3(x_3(0) - v_{0x}) + \mu_4(x_4(0) - v_{0y}) + \\ &+ v_1 x_1(t_k) + v_2 x_2(t_k) + v_3 x_3(t_k) + v_4 x_4(t_k), \end{aligned} \quad (6)$$

де Лагранжіан має вигляд

$$\begin{aligned} L(t, x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dot{x}_3(t), \dot{x}_4(t), \\ u_1, u_2) &= \lambda_0 + p_1(\dot{x}_1 - x_3) + p_2(\dot{x}_2 - x_4) + \\ &+ p_3(\dot{x}_3 - u_1) + p_4(\dot{x}_4 - u_2), \end{aligned}$$

в якому множники  $p_1, p_2, p_3, p_4$  є функціями часу  $t$ .

Отже, приходимо до розгляду задачі  $\mathfrak{J}(x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t), \dot{x}_1(t),$

$\dot{x}_2(t), \dot{x}_3(t), \dot{x}_4(t); \bar{u}_1(t), \bar{u}_2(t); \hat{p}(t), \hat{u}, \hat{v}, \hat{\lambda}_0) \rightarrow \text{extr}$ ,  
 вважаючи множники Лагранжа  $\hat{p}(t), \hat{\mu}, \hat{\lambda}_0$  фіксованими, причому

$$\hat{p}(t) = (p_1(t), p_2(t), p_3(t), p_4(t)) \in C^1[0, t_k],$$

$$\hat{\mu} = (\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3, \hat{\mu}_4), \hat{v} = (\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3, \hat{v}_4).$$

Рівняння Ейлера-Лагранжа запишуться як

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}_i} + L_{x_i} = 0, (i=1, 2, 3, 4),$$

причому на основі виразу (6) запишемо:

$$L_{x_1} = 0, L_{x_2} = 0, L_{x_3} = -p_1, L_{x_4} = -p_2;$$

$$L_{\dot{x}_2} = p_1, L_{\dot{x}_2} = p_2, L_{\dot{x}_3} = p_3, L_{\dot{x}_4} = p_4.$$

Таким чином маємо систему рівнянь

$$\frac{d\hat{p}_1}{dt} = 0, \frac{d\hat{p}_2}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\hat{p}_3}{dt} = -p_1, \frac{d\hat{p}_4}{dt} = -p_2. \quad (7)$$

Умови трансверсальності згідно (6) будуть:

$$\hat{p}_1(0) = \hat{\mu}_1, \hat{p}_2(0) = \hat{\mu}_2, \hat{p}_3(0) = \hat{\mu}_3,$$

$$\hat{p}_4(0) = \hat{\mu}_4, \hat{p}_1(t_k) = -\hat{v}_1, \hat{p}_2(t_k) = -\hat{v}_2,$$

$$\hat{p}_3(t_k) = -\hat{v}_3, \hat{p}_4(t_k) = -\hat{v}_4. \quad (8)$$

Використовуємо принцип максимуму:

$$\max_{u \in \omega} \{ \hat{p}_3(t)\bar{u}_1 + \hat{p}_4(t)\bar{u}_2 \} =$$

$$= | \hat{p}_3(t)\bar{u}_1 + \hat{p}_4(t)\bar{u}_2 | \leq | \hat{p}_3(t)\bar{u}_1 | + | \hat{p}_4(t)\bar{u}_2 |,$$

однак, оскільки  $|\bar{u}_i(t)| \leq 1 (i=1, 2)$ , то матимемо

$$\max_{u \in \omega} \{ \hat{p}_3(t)\bar{u}_1 + \hat{p}_4(t)\bar{u}_2 \} = | \hat{p}_3(t) | + | \hat{p}_4(t) |. \quad (9)$$

З отриманої залежності (8) маємо

$$\hat{u}_1(t) = \begin{cases} \text{sign } \hat{p}_3(t), \hat{p}_3(t) \neq 0, \\ [-1; 1], \hat{p}_3(t) = 0; \end{cases} \quad (10)$$

$$\hat{u}_2(t) = \begin{cases} \text{sign } \hat{p}_4(t), \hat{p}_4(t) \neq 0, \\ [-1; 1], \hat{p}_4(t) = 0. \end{cases}$$

Аналіз системи рівнянь (7) показує, що множники  $\hat{p}_1(t), \hat{p}_2(t)$  – сталі, а  $\hat{p}_3(t), \hat{p}_4(t)$  – довільні лінійні функції часу на проміжку  $[0, t_k]$ ; при цьому повністю виключено можливість, що  $\hat{p}_3(t) \equiv 0, \hat{p}_4(t) \equiv 0$ . Справді, якщо це має місце, то з умов трансверсальності (8) випливає, що множники термінальної частини функціонала (6), а разом з ними і множник  $\lambda_0$ , тобто всі множники Лагранжа рівні нулю.

Беручи до уваги, що лінійна функція, відмінна від тотожного нуля, обертається в нуль в деякій точці  $\tau \in [0, t_k]$  (точка перемикання) не більше одного разу, то згідно залежностей (10) отримуємо такі можливості для оптимальних керувань:

а)  $\hat{u}_1(t) \equiv 1$ , якщо  $\hat{p}_3(t) \neq 0$ ;

б)  $\hat{u}_1(t) \equiv -1$ , якщо  $\hat{p}_3(t) \neq 0$ ;

в)  $\hat{u}_1(t) = \begin{cases} 1, 0 \leq t < \tau_1, \\ -1, \tau_1 < t \leq t_k, \end{cases}$

якщо  $\hat{p}_3(t)$  обертається в нуль в точці перемикання  $t = \tau_1$ ;

г)  $\hat{u}_1(t) = \begin{cases} -1, 0 \leq t < \tau_1, \\ 1, \tau_1 < t \leq t_k, \end{cases}$

якщо  $\hat{p}_3(t)$  обертається в нуль в точці перемикання  $t = \tau_1$ ;

а')  $\hat{u}_2(t) \equiv 1$ , якщо  $\hat{p}_4(t) \neq 0$ ;

б')  $\hat{u}_2(t) \equiv -1$ , якщо  $\hat{p}_4(t) \neq 0$ ;

в')  $\hat{u}_2(t) = \begin{cases} 1, 0 \leq t < \tau_2, \\ -1, \tau_2 < t \leq t_k, \end{cases}$

якщо  $\hat{p}_4(t)$  обертається в нуль в точці перемикання  $t = \tau_2$ ;

г')  $\hat{u}_2(t) = \begin{cases} 1, 0 \leq t < \tau_2, \\ -1, \tau_2 < t \leq t_k, \end{cases}$

якщо  $\hat{p}_3(t)$  обертається в нуль в точці перемикання  $t = \tau_2$ .

Згідно методики, поданої в праці [1], задачу розглядатимемо у двох фазових площинах  $(x_1, x_3), (x_2, x_4)$  (відносно розмірних величин у вихідній постановці задачі відповідно буде  $(x, v_x), (y, v_y)$ ).

Якісний характер розв'язку даної задачі у фазовій площині  $(x_1, x_3)$  цілком співпадає з наведеними у праці [1] керуваннями відповідно до випадків а)-г), що відповідає одновимірній задачі про швидкодю. Що стосується картини поведінки руху у фазовій площині  $(x_2, x_4)$ , то будемо мати:

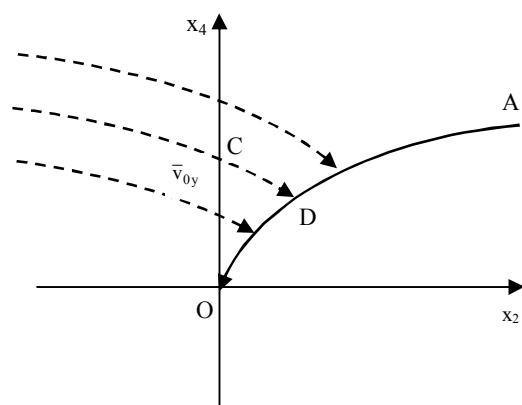
$$\dot{x}_2 = x_4, \dot{x}_4 = 1, \text{ звідки } x_2 = x_4^2/2 + C_1; \quad (11)$$

$$\dot{x}_2 = x_4, \dot{x}_4 = -1, \text{ звідки } x_2 = -x_4^2/2 + C_2. \quad (12)$$

Беручи до уваги початкові умови та виходячи з фізичних міркувань стосовно поведінки та числових значень фазових координат  $(x_2, x_4)$  дістаємо розподіл фазових траєкторій, який відповідає керуванням а')-г') (рис. 1).

Початкова точка, яка знаходиться лівіше лінії перемикання АО, відповідає одному з можливих керувань а')-г'): в момент  $t = \tau_2$  початкова точка  $C(0, \bar{v}_{0y})$  переходить в точку D, відбувається перемикання керування і далі рухаємось по дузі ДО до кінцевої точки. Формула для оптимального керування, тобто оптимальне значення керованої сили залежно від координат ЛА, має вигляд

$$\bar{u}_1 = \text{sign}(\bar{x} + \bar{v}_x^2/2), \quad \bar{u}_2 = \text{sign}(\bar{y} + \bar{v}_y^2/2).$$

Рис. 1. Фазові траєкторії у площині  $(x_2, x_4)$ 

Завершальний етап задачі – встановлення єдиності знайденого розв'язку

$$\hat{X}(t) = (\hat{X}_1(t), \hat{X}_2(t)),$$

причому  $\hat{X}_1(t) = \hat{x}_1(t)$ ,  $\hat{X}_2(t) = \hat{x}_2(t)$ , який відповідає заданій початковій точці, що має вигляд 4-вимірного вектору  $(\bar{x}_0, 0, \bar{v}_{0x}, \bar{v}_{0y})$ . Послідовно виконуючи кроки, відображені у [1], впевнимось, що єдиність розв'язку поставленої задачі має місце.

### Висновки

Розглянуто приклад екстремальної задачі, яка є по суті модифікацією задачі про швидкодю, коли нестационарний рухомий об'єкт переміщується в просторі. Приймається, що рух відбувається в деякій вертикальній площині, рухомий об'єкт керується зовнішньою силою, яку можна змінювати в заданих межах. В наведеній постановці задачі особливість полягає в тому, що зовнішні зусилля поділяються на дві частини: одна з них – фізичні сили (наприклад, тяжіння), інша – сили тяги, керовані впливи у вигляді обмеженості діапазонів керуючих рулів і механізмів. Тобто, стартуючи з деякого положення, ЛА має вийти у точку із заданими просторовими координатами, мати задану швидкість як за величиною, так і за напрямом, а також досягти цю точку за найкоротший час.

Виконано формалізацію математичної моделі балістики нестационарного керованого об'єкта, яка складається з системи двох диференціальних рівнянь другого порядку. Встановлено формулу для оптимального керування, тобто оптимальне значення

керованої сили залежно від координат керованого об'єкта.

Напрямом подальших досліджень є розробка підходів з використанням методів теорії оптимального керування спрямованих на побудову оптимальних режимів і траєкторій руху з подальшим визначенням проектних балістичних параметрів згідно заданих тактико-технічних характеристик ЛА.

### Список літератури

1. Алексеев В.М. *Оптимальное управление* / В.М. Алексеев, В.М. Тихомиров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1979. – 432 с.
2. Брайсон А. *Прикладная теория оптимального управления* / А. Брайсон, Хо Ю-Ши. – М.: Мир, 1974. – 208 с.
3. Дмитриевский А.А. *Прикладные задачи теории оптимального управления движением беспилотных летательных аппаратов* / А.А. Дмитриевский, Л.Н. Лысенко. – М.: Машиностроение, 1978. – 328 с.
4. Заде Л. *Теория линейных систем* / Л. Заде, Ч. Дезоер. – М.: Наука, 1970. – 703 с.
5. Красовский А.А. *Универсальные алгоритмы оптимального управления непрерывными процессами* / А.А. Красовский, В.Н. Буков, В.С. Шендрик. – М.: Наука, 1977. – 271 с.
6. Ванюрин Г.И. *Синтез систем управления движением нестационарных объектов* / Г.И. Ванюрин, В.М. Иванов. – М.: Машиностроение, 1988. – 168 с.
7. Болтянский В.Г. *Математические методы систем управления* / В.Г. Болтянский. – М.: Наука, 1969. – 327 с.
8. Бутковский А.Г. *Методы управления системами с распределенными параметрами* / А.Г. Бутковский. – М.: Наука, 1975. – 568 с.
9. Васильев В.И. *Распознающие системы* / В.И. Васильев. – К.: Наук. думка, 1969. – 291 с.
10. Глушков В.М. *Человек и вычислительная техника* / В.М. Глушков. – К.: Наук. думка, 1971. – 232 с.
11. Арсенин В.Я. *Методы математической физики и специальные функции* / В.Я. Арсенин. – М.: Наука, 1974. – 432 с.
12. Владимиров В.С. *Обобщенные функции в математической физике* / В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1976. – 280 с.
13. Канторович Л.В. *Функциональный анализ* / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М.: Наука, 1984. – 752 с.

Надійшла до редколегії 29.04.2014

**Рецензент:** д-р техн. наук, професор, Л.І.Сопільник, Академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного, Львів.

### ОБОБЩЕНИЕ ЗАДАЧИ О БЫСТРОДЕЙСТВИИ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ОПТИМАЛЬНОМУ УПРАВЛЕНИЮ ДВИЖЕНИЕМ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

В.И. Грабчак, Е.Г. Иваник, С.А. Цыбуля

Изложена постановка задачи в терминах фазового пространства про оптимальное управление нестационарным движущимся объектом. Предложен метод определения пути наименьшего времени полета ЛА, движущегося в пространстве при определенных начальных и конечных условиях. Построены фазовые траектории на участках постоянства управления. Получены формулы для оптимального управления внешними силовыми факторами, действующими на движущийся объект.

**Ключевые слова:** летательный аппарат, оптимизационные методы, критерий оптимального управления, фазовое пространство, функция цели, математическая модель.

**GENERALIZATION OF THE PROBLEM FOR FASTACTION CONCERNING OPTIMAL DIRECTION  
ON A MOVING FLYING APPARATE**

V.I. Grabchak, E.G. Ivanyk, S.A. Tsybulia

*The article posing the problem in terms of the phase space of non-stationary optimal control moving objects. On the example of a hypothetical control system that functions in real time, given the possibility of building an integrated simulation model. The phase trajectory on the district constant operate is building. The formulae for optimal operate by internal power factors which acting on the moving object is given.*

**Keywords:** *flying apparatus, methods of optimisations, criteria of optimal control, space phase, function of purpose, mathematical model.*