УДК 681.5

С.В. Герасимов

Харківський університет Повітряних Сил імені Івана Кожедуба, Харків

РОЗРОБКА ОПТИМАЛЬНОЇ МЕТОДИКИ КОНТРОЛЮ ПАРАМЕТРІВ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ ЗА КРИТЕРІЯМИ ІНФОРМАТИВНОСТІ ТА ЧУТЛИВОСТІ

Обґрунтовано, що вирішення проблеми розробки методики контролю параметрів динамічної системи з метою визначення її фактичного стану та часу наступного контролю залежить від розв'язання задачі розрахунку кількісних оцінок оптимальної методики контролю. Доведено, що для отримання кількісних оцінок оптимальної методики контролю, залежно від умов його проведення, необхідно розрахувати параметри вихідного вимірювального сигналу системи за критеріями інформативності або чутливості. Сформульована проблема розробки оптимальної методики контролю параметрів системи за критеріями інформативності та чутливості та запропоновані методи її вирішення.

Ключові слова: *методика контролю, контроль технічного стану, технічна система.*

Вступ

Постановка проблеми. При проведенні контролю з метою визначення технічного стану динамічної системи, особливо системи автоматичного керування та регулювання, при її експлуатації за станом застосовують вхідні вимірювальні сигнали (тестові, стимулюючі) $u(t)$, які перетворюються на виході системи, що контролюється, у вихідний сигнал (сигнал-відгук) $y(t)$ [1 – 3]. В загальному випадку може бути кілька паралельних вхідних і вихідних сигналів, тому маємо вектори вхідних і вихідних сигналів. За результатами вимірювання параметрів вихідного сигналу системи z_i, $i=\overline{1,m}$, m – кількість параметрів контролю вихідного сигналу, надається висновок про технічний стан системи при умові, що на виході системи спостерігається реалізація $y(t)$ – сигнал-відгук на вхідний вимірювальний сигнал $u(t)$. Тобто, за отриманими значеннями z_i визначаються параметри контролю системи q_j, $j=\overline{1,n}$, n – кількість параметрів контролю динамічної системи, і робиться висновок про технічний стан системи, що контролюється [1]. Актуальною задачею є обґрунтування параметрів контролю динамічної системи для забезпечення оптимальних (необхідних) значень кількісних характеристик контролю, наприклад, точності, інформативності, чутливості.

Аналіз літератури. Проведений аналіз робіт [3 – 5], які направлені на обґрунтування переведення технічних систем на експлуатацію за станом, показав, що вони не вирішують проблему розробки та обґрунтування методик і методів проведення контролю технічного стану систем з метою визначення їх фактичного стану. В роботі [2] розглянутий випадок проведення контролю при забезпеченні необхідного рівня точності вимірювання параметрів. Однак у практиці експлуатації складних динамічних систем військового призначення часто використовують інформативність і чутливість як кількісні характеристики контролю.

Метою даної статті є розробка оптимальної методики контролю параметрів динамічної системи за показниками інформативності (кількості інформації) і чутливості.

Основна частина

Інформаційний показник контролю.

В практиці контролю (вимірювання) параметрів інформаційні оцінки отримали широке розповсюдження. З точки зору теорії інформації контроль призводить до зменшення міри невизначеності у значеннях параметрів системи порівняно з невизначеністю значень цих параметрів до контролю. Невизначеність значень параметрів характеризується ентропією, так що ентропія величини X дорівнює [1]:

$$H(X) = -\int_0^T \rho(X)\ln\rho(X)dX, \qquad (1)$$

де $\rho(X)$ – щільність імовірності появи величини X; $[0,\ T]$ – часовий інтервал контролю.

Під інформацією про величину X, яку надає результат контролю (вимірювання), будемо розуміти зменшення ентропії цієї величини за рахунок дослідження Д, тобто різницю апріорного та апостеріорного значення ентропії:

$$I(X,\ Д) = H(X) - H(X/Д). \qquad (2)$$

В нашому випадку дослідження Д складається з вимірювання миттєвих значень різниць вихідного сигналу, тобто у спостереженні вибірки $\Delta y = \{\Delta y(t_1),\ ...,\ \Delta y(t_s)\}$, де s – кількість моментів відліку (точок дискретизації). Тому інформація про значення величин $\Delta z = \{\Delta z_1, ..., \Delta z_m\}$, $i = \overline{1,m}$, m – кількість параметрів контролю вихідного сигналу, яку надає контроль, дорівнює:

$$I(z,\ y) = H(\Delta z) - H(\Delta z / \Delta y). \qquad (3)$$

З (3) на підставі (1) отримаємо

$$I(z,\ y) = -\int_0^T \rho(\Delta z)\ln\rho(\Delta z)\,d\Delta z + \int_0^T p(\Delta z/\Delta y)\ln p(\Delta z/\Delta y)\,d\Delta z, \qquad (4)$$

де $p(\Delta z / \Delta y)$ – умовна функція розподілу параметрів Δz вихідного сигналу $y(t)$ системи.

Після перетворень для $\rho(\Delta z)$ будемо мати:

$$H(\Delta z) = \int_0^T \rho(\Delta z)\left[\frac{m}{2}\ln 2\pi + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\Delta z_i^2\right]d\Delta z = \frac{m}{2}\ln 2\pi + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} < \Delta z_i^2 > .$$

Оскільки величини Δz_i вибираються так, що $< \Delta z_i^2 >= 1$, $<\ >$ означає середнє значення за ансамблем величин Δz_i, то:

$$H(\Delta z) = \frac{1}{2}\ln(2n)^m. \qquad (5)$$

Аналогічно після розрахунку, знайдемо:

$$H\left(\frac{\Delta z}{\Delta y}\right) = -\frac{1}{2}\ln(2\pi)^m\left|\det H\right| - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} H_{ij}^{-1}\int_0^T \xi_i\xi_j p\left(\frac{\Delta z}{\Delta y}\right)d\xi.$$

Так як $\int_0^T \xi_i\xi_j\rho(\Delta z / \Delta y)\,dz = H_{ij}$, то

$$H(\Delta z / \Delta y) = -\frac{1}{2}\ln(2\pi)^m\left|\det H\right|. \qquad (6)$$

Якщо підставити вираз для $H(\Delta z)$ (5) і $H(\Delta z / \Delta y)$ (6) в (3), то величина інформації $I(z/y)$, отримана у результаті контролю, має вигляд:

$$I(z/y) = -\frac{1}{2}\ln\left|\det H\right|. \qquad (7)$$

Позначимо через λ_i^{-1}, $i = \overline{1,\ m}$, власні значення матриці $\tilde{R}_y^{-1}$ (матриця кореляції характеристик вихідного сигналу) в підпросторі векторів z.

Як видно з [2] власні значення матриці H дорівнюють $\sigma_\Delta^2 / \lambda_i$. При цьому детермінант матриці H:

$$\det H = \sigma_\Delta^{2m}(\lambda_1,\ \lambda_2,\ ...,\ \lambda_m)^{-1}. \qquad (8)$$

Отже, величина інформації $I(z/y)$ складає

$$I(z, y) = \frac{\ln[\lambda_1,\ \lambda_m]}{2} + m\ln\sigma_\Delta = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\ln\lambda_i + m\ln\sigma_\Delta. \qquad (9)$$

Оскільки власні значення матриці є інваріантами, тобто не залежать від вибору системи ортонормованих величин q_j і z_i, то інваріантом буде і величина інформації $I(z/y)$. Геометричний зміст величини $I(z/y)$: ця величина пропорційна логарифму об’єму еліпсоїду, яким породжено матрицею H в підпросторі z, тобто об’єму апостеріорної області невизначеності величин z_i.

Оптимізація методики контролю за інформаційним критерієм зводиться до знаходження вхідного сигналу $u_{опт}(t)$, який при заданому рівні перешкоди σ_Δ^2 і заданому часі спостереження T (або числі відліків s) вихідного сигналу забезпечує максимальне значення $I(z/y)$.

Ця функція оптимізації $u_{опт}(t)$ повинна, отже, задовольняти співвідношенню:

$$I(z,\ y;\ \{u_{опт}\}) = \sup_{\{u\}} I(z,\ y;\ \{u\}). \qquad (10)$$

Помітимо, що величина інформації $I(z/y)$ є монотонно зростаючою функцією часу спостереження T (числа відліків s). Тому розв’язання поставленої вище задачі (10) для різних T одночасно дає також розв’язок задачі зі знаходження такого вхідного сигналу $u(t)$, який при заданої кількості інформації та дисперсії перешкоди забезпечує максимальний час спостереження T або мінімальну кількість відліків вихідного сигналу s.

Таким чином, отримані вирази (1) – (10) є основою оптимальної методики контролю параметрів динамічної системи за критерієм інформативності.

Показник чутливості контролю.

Під чутливістю методу контролю розуміємо ступінь реакції вихідного сигналу на зміну (різниця від номінальних значень) параметрів системи. Наприклад, як оцінку можна узяти максимальну величину непогодження за час спостереження вихідного сигналу T, або середнє за час спостереження значення модулю непогодження тощо. Величина непогодження, яка викликана виходом даного параметра q_j, $j = \overline{1,n}$, пропорційна коефіцієнту чутливості за цим параметром: $a_j(t) = \partial y(t) / \partial q_j$.

Геометрично величина $a_j(t)$ представляє складові градієнта функції $y(t,\ q)$ в просторі змінних Q:

$$\nabla y(t,\ q) = \{a_1(t),\ a_2(t),\ ...,\ a_n(t)\}. \qquad (11)$$

При контролі технічного стану динамічної системи визначають, як правило, не параметри q_j, а величини $\Delta z_i = \sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}q_j$, які утворюють лінійний підпростір змінних q_j, розмірності m [1, 2]. Тому від коефіцієнтів чутливості за параметрами q_j слід перейти до коефіцієнтів чутливості за величинами z_i. Ці коефіцієнти повинні визначатися як похідні величини $\Delta y(t)$ за величинами z_i при умові, що інші величини z_j при $j \neq i$ залишаються постійними. Оскільки підпростір Z ортонормований, то коефіцієнти чутливості $b_i(t)$ за параметрами z_i є похідними величини $\Delta y(t)$ в напрямі нормалі до гіперплощини $\Delta z_i = \text{const}$:

$$\vec{n}_i = \{\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, ..., \alpha_{in}\}, \ i = \overline{1, m}. \qquad (12)$$

Похідна величина Δy у напрямі нормалі до гіперплощини $\Delta z_i = \text{const}$, тобто $b_i(t)$ буде, отже, дорівнювати множенню ∇y і $\vec{n}_i$:

$$b_i(t) = \left.\frac{\partial y}{\partial z_i}\right|_{\substack{z_j = \text{const} \\ j \neq i}} = (\vec{n}_i, \nabla y) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} a_j(t). \qquad (13)$$

В матричній формі коефіцієнти чутливості за величинами z_i запишемо так:

$$B^T = \alpha A^T. \qquad (14)$$

За допомогою коефіцієнтів чутливості $b_i(t)$ зміна величини вихідного сигналу Δy на підпросторі величин z може бути записана наступним чином:

$$\Delta y/z = \sum_{i=1}^{m} b_i(t) \Delta z_i = \Delta y_1(t). \qquad (15)$$

Величина $\Delta y/z$, яка визначена таким чином, не чутлива до тих змін q_j, які не змінюють z_i.

Як величину непогодження приймемо середньоквадратичну оцінку, тобто інтеграл від квадрата величини $\Delta y/z$, узятий за час $[0, T]$.

Усереднене за всіма значеннями Δz_i величину цієї оцінки будемо у подальшому називати чутливістю S. Таким чином:

$$S = \int_0^T < \Delta y_1^2(t) > dt = \sum_{i,k} < \Delta z_i \ \Delta z_k > \int_0^T b_i(t) b_k(t) dt. \qquad (16)$$

Так як величини Δz_i ортонормовані, то $< \Delta z_i \ \Delta z_k >= \delta_{ik}$ і для величини S отримаємо:

$$S = \int_0^T \sum_{i=1}^{m} b_i^2(t) dt. \qquad (17)$$

У випадку дискретної вибірки вихідного сигналу у моменти часу (точках дискретизації) $t_k \ \left(k = \overline{1, s}\right)$, будемо мати:

$$S = \sum_{k=1}^{s} \sum_{i=1}^{m} b_i^2(t_k). \qquad (18)$$

У матричній формі співвідношення (17) і (18) приймають вигляд

$$S = Sp\left(B^T B\right). \qquad (19)$$

Після підстановки замість B^T його значення з (14) і з урахуванням $B = \left(B^T\right)^T = \left(\alpha A^T\right)^T = A\alpha^T$, знайдемо:

$$B = \left(B^T\right)^T = \left(\alpha A^T\right)^T = A\alpha^T. \qquad (20)$$

Після обчислень отримаємо:

$$S = Sp\left(\alpha \tilde{R}_y \alpha^T\right) - \sigma_\Delta^2 SpE = Sp\left(\alpha \tilde{R}_y \alpha^T\right) - m\sigma_\Delta^2. \qquad (21)$$

Для спрощення подальших розрахунків за міру чутливості використаємо величину S', яка дорівнює:

$$S' = Sp\left(\alpha \tilde{R}_y \alpha^T\right). \qquad (22)$$

Оскільки при заданій перешкоді величина σ_Δ^2 постійна, то оптимізація величини S' повністю еквівалентна оптимізації величини S.

Позначимо $\tilde{R}'_y = \alpha \tilde{R}_y \alpha^T$. Як було показано в [2], множення оператора, діючого в просторі векторів Q, зліва на α, а справа на α^T, проектує цей оператор з простору Q розмірності n в підпростір Z розмірності m, так що $\tilde{R}'_y$ є оператором, діючим в підпросторі Z. Власні значення цього оператора позначимо через λ'_i, $i = \overline{1, m}$. Так як Sp оператора дорівнює сумі його власних значень, з (22) отримаємо:

$$S' = \sum_{i=1}^{m} \lambda'_i. \qquad (23)$$

Як виходить з цієї формули, чутливість S або S' також є інваріантною оцінкою контролю, тобто не залежить від вибору змінних q_j і z_i.

Зміст розглянутої вище оцінки пояснимо також іншим чином. Розіб'ємо увесь простір Q на підпростір Z розмірності m і ортогональний до нього підпростір Z' розмірності $n - m$. Орти підпростору Z' ортогональні усім ортам підпростору Z. Сукупність ортів підпростору Z і підпростору Z' утворює повну ортонормовану систему, яка отримується деяким поворотом в просторі Q. За допомогою цієї системи ортів величина вихідного сигналу може бути записана наступним чином:

$$\begin{aligned} \Delta y &= \sum_{i=1}^{m} b_i(t) \Delta z_i + \sum_{j=m+1}^{n} b'_j(t) \Delta z_j + \delta(t) = \\ &= \Delta y_1(t) + \Delta y_2(t) + \delta(t). \end{aligned} \qquad (24)$$

Корисну інформації про величини z_i несе тільки частина вихідного сигналу $\Delta y_1(t)$. Складова вихідного сигналу $\Delta y_2(t)$ не залежить від величин z_i

і визначається тільки тими змінними z'_i, які не контролюються. Ця складова при контролі заважає визначенню величин z_i і є, отже, перешкодою. Оскільки підпростори Z і Z' ортогональні друг другу, то величини z_i і z'_i незалежні, що означає $< z_i \; z'_i >= 0$. Звідси випливає, що складові вихідного сигналу $\Delta y_1(t)$ і $\Delta y_2(t)$ також незалежні (некорельовані). Так, з (24) виходить:

$$< \Delta y_1(t) \; \Delta y_2(t) >= \sum_{i,j} b_i(t) b'_j(t) < \Delta z_i \; \Delta z'_j > = 0 . \quad (25)$$

Задача оптимізації контролю за чутливістю може бути сформульована наступним чином: при заданій тривалості контролю T або кількості відліків вихідного сигналу s знайти такий оптимальний вимірювальний сигнал $u_{опт}(t)$, при якому величина чутливості S найбільша:

$$S(\{u_{опт}\}) = \sup_{\{u\}} S(\{u\}) . \quad (26)$$

Як видно з (17) і (18), чутливість S зі збільшенням тривалості контролю T або кількості відліків s монотонно зростає, то розв'язання поставленої задачі визначає також оптимальний вимірювальний сигнал $u_{опт}(t)$, який при заданій чутливості забезпечує мінімальну тривалість контролю.

Помітимо, що чутливість S не залежить від дисперсії перешкоди σ_Δ^2, а чутливість S' залежить від неї адитивно, отже, оптимальний вимірювальний сигнал не буде залежати від перешкоди σ_Δ^2. Інакше, сигнал $u_{опт}(t)$, який забезпечує максимальну чутливість або мінімальний час контролю при деякому рівні перешкоди, буде їх забезпечувати і при будь-якій перешкоді.

Отже, отримані співвідношення (11) – (26) є основою оптимальної методики контролю параметрів динамічної системи за критерієм чутливості.

Висновки

В статті обґрунтовано, що проблема розробки методик контролю параметрів динамічних систем з метою визначення їх фактичного стану та часу наступного контролю складається з декількох, не зв'язаних друг з другом, задач: задачі розрахунку кількісних оцінок оптимальної методики контролю та, після встановлення цих оцінок, задачі розрахунку характеристик вхідних вимірювальних сигналів для контролю динамічної системи, які забезпечували би для даної системи максимальне значення цієї кількісної оцінки.

Запропоновані методики розробки оптимальної методики контролю параметрів динамічної системи за критеріями інформативності та чутливості.

Список літератури

1. Чинков В.М. Дослідження та обґрунтування критеріїв оптимізації вимірювальних сигналів для контролю технічного стану систем автоматичного управління / В.М. Чинков, С.В. Герасимов // Український метрологічний журнал. – 2013. – № 4. – С. 43-47.

2. Герасимов С.В. Розробка оптимальної методики контролю параметрів технічних систем за критерієм точності / С.В. Герасимов // Збірник наукових праць Харківського університету Повітряних Сил. – Х.: ХУПС, 2014. – Вип. 1 (38). – С. 213-216.

3. Дмитриев А.К. Основы теории построения и контроля сложных систем / А.К. Дмитриев, П.А. Мальцев. – Л.: Энергоатомиздат, 1988. – 192 с.

4. Бесекерський В.А. Теория систем автоматического регулирования / В.А. Бесекерський, Е.П. Попов. – М.: Наука, 1972. – 768 с.

5. Техническая эксплуатация летательных аппаратов: учеб. для ВУЗов / Н.Н. Смирнов, Н.И. Владимиров, Ж.С. Черненко и др.; под ред. Н.Н. Смирнова. – М.: Транспорт, 1990. – 423 с.

Надійшла до редколегії 2.06.2014

Рецензент: д-р техн. наук, доцент О.І. Тимочко, Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків.

РАЗРАБОТКА ОПТИМАЛЬНОЙ МЕТОДИКИ КОНТРОЛЯ ПАРАМЕТРОВ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПО КРИТЕРИЯМ ИНФОРМАТИВНОСТИ И ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ

С.В. Герасимов

Обосновано, что решение проблемы разработки методики контроля параметров динамической системы с целью определения ее фактического состояния и времени следующего контроля зависит от решения задачи расчета количественных оценок оптимальной методики контроля. Доказано, что для получения количественных оценок оптимальной методики контроля, в зависимости от условий его проведения, необходимо рассчитать параметры исходного измерительного сигнала системы за критериями информации или чувствительности. Сформулирована проблема разработки оптимальной методики контроля параметров системы по критериям информативности и чувствительности и предложены методы ее решения.

***Ключевые слова:** методика контроля, контроль технического состояния, техническая система/.*

DEVELOPMENT OF OPTIMUM METHOD OF CONTROL OF PARAMETERS DYNAMIC SYSTEM AFTER CRITERIA OF INFORMING AND SENSITIVENESS

S.V. Gerasimov

It is grounded, that the decision of problem of development of method of control of parameters of the dynamic system with the purpose of determination of its actual state and time of next control depends on the decision of task of calculation of quantitative estimations of optimum method of control. It is well-proven that for the receipt of quantitative estimations of optimum method of control, depending on the terms of his leadthrough, it is necessary to expect the parameters of initial measuring signal of the system after the criteria of information or sensitiveness. The problem of development of optimum method of control of parameters of the system is formulated after the criteria of informing and sensitiveness and the methods of its decision are offered.

***Keywords:** control method, control of the technical state, technical system.*