УДК 519.859

Л.Г. Євсеєва

Полтавський університет споживчої кооперації України, Полтава

ОСОБЛИВОСТІ ІНТЕРВАЛЬНОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ЗАДАЧІ УПАКУВАННЯ КРУГІВ З УРАХУВАННЯМ ПОХИБОК

Будується інтервальна математична модель оптимізаційної задачі пакування інтервальних кругів у прямокутник. Здійснюється перехід до двохкритеріальної задачі в евклідовому просторі. На підґрунті використання методу оптимізації за групами змінних і модифікованого методу околів, що звужуються, пропонується стратегія розв'язування задачі.

інтервальна модель, інтервальний круг, інтервальне дотикання опуклих інтервальних множин

Введенняя

При організації стріляння під час проведення бойових дій виникає проблема неушкодження області поза зоною стріляння, тобто необхідність визначення координат влучення снарядів в деяку область таким чином, щоб проекції зони розльоту осколків не виходили за межі області з урахуванням похибок.

Оптимізаційні задачі пакування 2D геометричних об'єктів відносяться до класу задач геометричного проектування [1], виникають в різних галузях науки, промисловості, військової справи і мають значне теоретичне і прикладне значення. Задачам пакування кругів належить особливе місце в класі задач 2D Cutting & Packing (2D C&P), що обумовлено їх актуальністю та широким спектром застосувань.

Класифікація існуючих методів досліджень. Математичні моделі і методи розміщення кругів в прямокутній смузі розглядалися в роботах [2, 3]. У роботі [4] розглянуто підхід до пошуку глобального екстремуму задачі упаковки однакових кругів в квадраті. Ідеологія направленого перебору локальних екстремумів задачі упаковки кругів однакового радіусу в опуклий багатокутник запропонована в [5].

Проте, математичне моделювання і розв'язання задач пакування кругів здійснювалося до цього часу без урахування похибок, тобто в ідеалізованій формі.

Розвиток геометричного проектування як наукового напрямку надає можливість здійснення урахування похибок метричних характеристик і параметрів розміщення геометричних об'єктів при математичному моделюванні задач на основі використання додатку до інтервального аналізу [6] в геометричному проектуванні: інтервальної геометрії [7].

Метою даної роботи є побудова математичної моделі та розробка стратегії розв'язування задачі пакування кругів у смугу з урахуванням похибок метричних характеристик і параметрів розміщення об'єктів на основі застосування таких понять інтервальної геометрії, як інтервальний круг, інтервальне дотикання опуклих інтервальних множин, а також понять елементарного інтервального відображення і інтервальної направленої множини [8].

Основнаячастиная

Розглянемо оптимізаційну задачу геометричного проектування [1] в такій постановці. Нехай в евклідовому просторі R^2 є скінчений набір кругів C_k, радіуси яких

$$r_k \pm \nu_{r_k} \tag{1}$$

і смуга (прямокутник) Ω, довжина і ширина якої відповідно

$$l \pm \nu_l, w \pm \nu_w \tag{2}$$

де

$$r_k \in R^+, \nu_{r_k} \in R^+,\ \nu_{r_k} < \varepsilon \cdot r_k,\ k \in J_n,$$

$$J_n = \{1, 2, ..., n\},$$

$$l, w \in R^+, \nu_l, \nu_w \in R^+,\ \nu_l < \varepsilon \cdot l, \nu_w < \varepsilon \cdot w,$$

$$\varepsilon \in (0,1) \subset R^1.$$

Значення ε залежить від конкретної прикладної або наукової задачі і характеризує точність завдання початкових даних.

Нехай довжина l смуги Ω є чималою для того, щоб об'єкти C_k, $k \in J_n$, були гарантовано упаковані в область Ω.

Положення круга на площині визначається координатами центру, який приймаємо за полюс (початок власної системи координат). Позначимо через $C_k(u_k^\nu)$ круг C_k з параметрами розміщення

$$u_k^\nu = (x_k \pm \nu_{x_k}, y_k \pm \nu_{y_k}) \in R^2;$$

$$\nu_{x_k} \in R^1, \nu_{y_k} \in R^1,\ k \in J_n, \tag{3}$$

через $\Omega(u_0^\nu)$ – прямокутник Ω з параметрами розміщення

$$u_0^\nu = (x_0 \pm \nu_{x_0}, y_0 \pm \nu_{y_0}) \in R^2. \tag{4}$$

Задача. Знайти вектор

$$u^\nu = (u_1^\nu, u_2^\nu, ..., u_n^\nu) \in R^{2n},$$

такий, щоб $C_k(u_k^\nu) \subset \Omega(u_0^\nu)$, $k \in J_n$, без взаємних перетинів і довжина l^* зайнятої частини смуги та похибка ν_l^* довжини досягали свого мінімуму.

Відмітимо, що завдання метричних характеристик об'єктів у вигляді (1), (2), а параметрів розміщення у вигляді (3), (4) дозволяє створити пару чисел $(\alpha, \nu_\alpha) \in R^2$, де $\nu_\alpha \in R^1$ – похибка завдання числа $\alpha \in R^1$. Тоді α можна подати двома числами – оцінкою знизу і оцінкою зверху, які утворюють інтервальне число $\langle \alpha, \nu_\alpha \rangle = \langle A \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, де $\mathbf{I}_s\mathbf{R}$ – розширений простір центрованих інтервалів [7].

На підставі гомеоморфізму $\mathbf{I}_s\mathbf{R}$ і евклідового простору R^2 задамо бієкцію:

$$R^2 \ni (r_k, \nu_{r_k}) \leftrightarrow \langle r_k, \nu_{r_k} \rangle = \langle R_k \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R};$$

$$R^2 \ni (x_k, \nu_{x_k}) \leftrightarrow \langle x_k, \nu_{x_k} \rangle = \langle X_k \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R};$$

$$R^2 \ni (y_k, \nu_{y_k}) \leftrightarrow \langle y_k, \nu_{y_k} \rangle = \langle Y_k \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}, \ k \in J_n.$$

Тоді за математичну модель круга $C_k(u_k^\nu)$, $k \in J_n$, з метричними характеристиками m_k^ν і параметрами розміщення u_k^ν приймаємо інтервальний круг [7], який є точковою інтервальної множиною і може бути поданий у вигляді:

$$\mathbf{C}_k(U_k) \subset \mathbf{I}_s^2\mathbf{R} = \mathbf{I}_s\mathbf{R} \times \mathbf{I}_s\mathbf{R};$$

$$\mathbf{C}_k(U_k) = \operatorname{int} \mathbf{C}_k(U_k) \bigcup \mathbf{fr}\, \mathbf{C}_k(U_k), \ k \in J_n,$$

з інтервальними метричними характеристиками $\mathbf{m}_k = \{\langle R_k \rangle\}$ і параметрами розміщення $U_k = (\langle X_k \rangle, \langle Y_k \rangle)$, інтервальними направленими множинами [8]. На рисунку 1 зображено ілюстрацію інтервального круга в підпросторі $R_{xy}^2 \subset R^4$.

Виходячи з визначення інтервального кола [7] інтервальне рівняння інтервальної межі $\mathbf{fr}\,\mathbf{C}_k(U_k)$ можна подати у вигляді:

$$\mathbf{g}(U_k) = \mathbf{0}; \tag{5}$$

$$\mathbf{g}(U_k) = (\langle X \rangle - \overline{\langle X_k \rangle})^2 + (\langle Y \rangle - \overline{\langle Y_k \rangle})^2 - \overline{\langle R_k \rangle^2};$$

$$\forall k \in J_n,$$

де $\mathbf{0} = \langle 0, 0 \rangle$, $\overline{\langle X \rangle} = \overline{\langle x, \nu_x \rangle} = \langle x, -\nu_x \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$ – елемент, спряжений до елемента $\langle X \rangle = \langle x, \nu_x \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$ $U = (\langle X \rangle, \langle Y \rangle) \in \mathbf{I}_s^2\mathbf{R}$.

Тут і надалі квадрат інтервального числа знаходиться за формулою [7]:

$$\langle X \rangle^2 = \begin{cases} \langle (x)^2 + \nu_x^2, 2 \cdot |x| \cdot \nu_x \rangle, & \text{если } \langle X \rangle \in \mathbf{I}_{s1} \bigcup \mathbf{I}_{s2} \\ \langle (x + |\nu_x|) \cdot x, (x + |\nu_x|) \cdot \nu_x \rangle, & \text{если } \langle X \rangle \in \mathbf{I}_{s3}^+ \\ \langle (x - |\nu_x|) \cdot x, -(x - |\nu_x|) \cdot \nu_x \rangle, & \text{если } \langle X \rangle \in \mathbf{I}_{s3}^-. \end{cases}$$

на основі розбиття [7] простору $\mathbf{I}_s^2\mathbf{R}$ вигляду

$$\mathbf{I}_s^2\mathbf{R} = \bigcup_{k=1}^{N} \mathbf{\Omega}_k, \ \mathbf{\Omega}_k = \mathbf{J}_1 \times \mathbf{J}_2,$$

де $\mathbf{I}_{s1} = \operatorname{int} \mathbf{I}_{s1} = \{\langle x, \nu_x \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R} \mid x - |\nu_x| > 0\}$;

$$\mathbf{I}_{s2} = \operatorname{int} \mathbf{I}_{s2} = \{\langle x, \nu_x \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R} \mid x - |\nu_x| < 0\};$$

$$\mathbf{I}_{s3} = \operatorname{cl} \mathbf{I}_{s3} = \{\langle x, \nu_x \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R} \mid (x - |\nu_x| \le 0) \wedge (x + |\nu_x| \ge 0)\};$$

$$\mathbf{I}_{s3}^+ = \{\langle x, \nu_x \rangle \in \mathbf{I}_{s3} \mid \nu_x > 0\};$$

$$\mathbf{I}_{s3}^- = \{\langle x, \nu_x \rangle \in \mathbf{I}_{s3} \mid \nu_x < 0\};$$

$$\mathbf{I}_{s3} = \mathbf{I}_{s3}^+ \cup \mathbf{I}_{s3}^-, \mathbf{I}_s\mathbf{R} = \mathbf{I}_{s1} \bigcup \mathbf{I}_{s2} \bigcup \mathbf{I}_{s3};$$

$$N = 4^2 = 16; \ \mathbf{J}_i \in \{\mathbf{I}_{s1}, \mathbf{I}_{s2}, \mathbf{I}_{s3}^+, \mathbf{I}_{s3}^-\}, \ i = 1, 2.$$

Надалі будемо вважати, що $\langle R \rangle = \langle r, \nu_r \rangle \in \mathbf{I}_{s1}^+$, тобто виконується умова

$$|\nu_r| < r.$$

Конкретний вид інтервального рівняння (5) залежить від того, до якої з підмножин простору $\mathbf{I}_s^2\mathbf{R}$ належить дана точка U.

За математичну модель області $\Omega(u_0^\nu)$ з метричними характеристиками m_0^ν і параметрами розміщення u_0^ν приймаємо інтервальний прямокутник [7] $\mathbf{\Omega}(U_0) \subset \mathbf{I}_s^2\mathbf{R}$, який є точковою інтервальної множиною і може бути поданий у вигляді:

$$\mathbf{\Omega}(U_0) \subset \mathbf{I}_s^2\mathbf{R},$$

$$\mathbf{\Omega}(U_0) = \operatorname{int} \mathbf{\Omega}(U_0) \bigcup \mathbf{fr}\, \mathbf{\Omega}(U_0),$$

з інтервальними метричними характеристиками $\mathbf{m}_0 = \{\langle L \rangle, \langle W \rangle\}$ та інтервальними параметрами розміщення $U_0 = (\langle X_0 \rangle, \langle Y_0 \rangle) \in \mathbf{I}_s^2\mathbf{R}$.

Інтервальна межа $\mathbf{fr}\,\mathbf{\Omega}(U_0)$ може бути представлена у вигляді:

$$\mathbf{f}(U_0) = \mathbf{0},$$

де $\mathbf{f}$ – інтервальне відображення [7] $\mathbf{f} : \mathbf{I}_s^2\mathbf{R} \to \mathbf{I}_s\mathbf{R}$ виду:

$$\mathbf{f}(U_0) = \max_{1 \le k \le 4} \{\mathbf{f}_k(U_0)\},$$

$$\mathbf{f}_1(U_0) = \langle X \rangle - \overline{\langle X_0 \rangle} - \overline{\langle L \rangle},$$

$$\mathbf{f}_2(U_0) = -\overline{(\langle X \rangle - \overline{\langle X_0 \rangle})} - \overline{\langle L \rangle},$$

$$\mathbf{f}_3(U_0) = \langle Y \rangle - \overline{\langle Y_0 \rangle} - \overline{\langle W \rangle},$$

$$\mathbf{f}_4(U_0) = -\overline{(\langle Y \rangle - \overline{\langle Y_0 \rangle})} - \overline{\langle W \rangle}.$$

Тут і далі максимум розуміємо відповідно до відношення лінійного порядку в просторі $\mathbf{I}_s\mathbf{R}$ [7].

Для аналітичного опису взаємодії об'єктів двохвимірного інтервального простору, виходячи з роботи [9], введено поняття інтервального $\mathbf{\Phi}$-відображення.

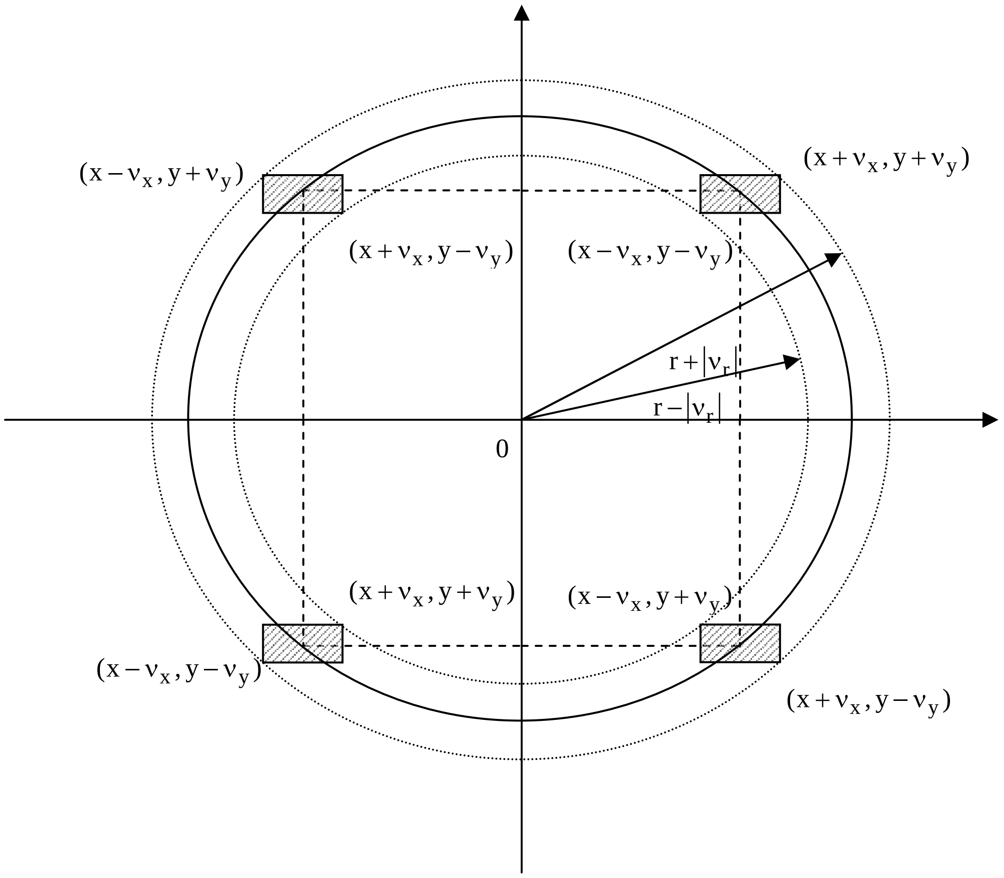

Рис. 1. Ілюстрація інтервального круга в підпросторі $R^2_{xy} \subset R^4$

Відображення

$$\Phi : I_s^4 R \to I_s R,$$

називається інтервальним Φ-відображенням для об'єктів $\mathbf{T}_i(U_i) \subset \mathbf{I}_s^2\mathbf{R}, i = 1,2$, якщо воно задовольняє умовам:

1. $\Phi(U_1, U_2) > 0$, якщо $\mathbf{T}_1(U_1) \bigcap \mathbf{T}_2(U_2) = \varnothing$
2. $\Phi(U_1, U_2) = 0$, якщо

$$\begin{cases} \operatorname{int} \mathbf{T}_1(U_1) \bigcap \operatorname{int} \mathbf{T}_2(U_2) = \varnothing \\ \mathbf{fr}\mathbf{T}_1(U_1) \bigcap \mathbf{fr}\mathbf{T}_2(U_2) \neq \varnothing \end{cases}$$

3. $\Phi(U_1, U_2) < 0$, якщо

$\operatorname{int} \mathbf{T}_1(U_1) \bigcap \operatorname{int} \mathbf{T}_2(U_2) \neq \varnothing$.

Побудуємо необхідні інтервальні Φ-відображення.

На підставі Ф-функції круга і прямокутника в R^2 [10], а також умови інтервального дотикання точок $(\langle X_i \rangle, \langle Y_i \rangle) \in \mathbf{I}_s^2\mathbf{R}, i = 1,2$ [7]:

$$\begin{cases} \left| x_2 - x_1 \right| = \left| \nu_{x_2} + \nu_{x_1} \right| \\ \left| y_2 - y_1 \right| = \left| \nu_{y_2} + \nu_{y_1} \right| \end{cases}$$

умову $\mathbf{C}_k(U_k) \subset \mathbf{\Omega}(U_0)$ можна визначити за допомогою інтервального Φ-відображення для $\mathbf{C}_k(U_k)$ і $\mathbf{\Omega}^*(U_0) = \left(I_s^2 R \setminus \operatorname{cl} \mathbf{\Omega}(U_0) \right) \bigcup \mathbf{fr}\, \mathbf{\Omega}(U_0)$:

$$\Phi_{0k}(U_k) = \\ = \min\ \{\chi^1_{0k}(U_k), \chi^2_{0k}(U_k), \chi^3_{0k}(U_k), \chi^4_{0k}(U_k)\}, \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \chi^1_{0k}(U) &= -\overline{(\langle X \rangle - \overline{\langle X_k \rangle})} + \langle L \rangle - \overline{\langle \nu_1, 0 \rangle} - \overline{\langle R_k \rangle}; \\ \chi^2_{0k}(U) &= \langle X \rangle - \overline{\langle X_k \rangle} + \langle \nu_1, 0 \rangle - \overline{\langle R_k \rangle}; \\ \chi^3_{0k}(U) &= -\overline{(\langle Y \rangle - \overline{\langle Y_k \rangle})} + \langle W \rangle - \langle \nu_w, 0 \rangle - \overline{\langle R_k \rangle}; \\ \chi^4_{0k}(U) &= \langle Y \rangle - \overline{\langle Y_k \rangle} + \langle \nu_w, 0 \rangle - \overline{\langle R_k \rangle}, \end{aligned} \tag{7}$$

де $\mathbf{U}_{0k} = (\langle X \rangle - \langle \overline{X_k} \rangle, \langle Y \rangle - \langle \overline{Y_k} \rangle)$ – інтервальна направлена множина.

На підставі Ф-функції двох кругів в евклидовому просторі [9], а також умови інтервального дотикання точок з $\mathbf{I}_s^2\mathbf{R}$ (рис. 2), інтервальне Φ-відображення інтервальних кругів $\mathbf{C}_i(U_i)$ і $\mathbf{C}_j(U_j)$, $i, j \in J_n, i < j$, має такий вигляд:

$$\Phi_{ij}(U_i, U_j) = \\ = (\langle X_j \rangle - \overline{\langle X_i \rangle})^2 + (\langle Y_j \rangle - \overline{\langle Y_i \rangle})^2 - \langle R \rangle^2; \tag{8}$$

$$\langle R \rangle = \langle R_i \rangle + \langle R_j \rangle + \langle \nu_{r_i} + \nu_{r_j}, 0 \rangle,$$

де $\mathbf{U}_{ij} = (\langle X_j \rangle - \langle \overline{X_i} \rangle, \langle Y_j \rangle - \overline{\langle Y_i \rangle})$ – інтервальна направлена множина.

На підставі гомеоморфізму просторів $\mathbf{I}_s\mathbf{R}$ і R^2 [7], як інтервальне цільове відображення інтервального оптимізаційного задачі упаковки інтервальних кругів $\mathbf{C}_k(U_k)$, $k \in J_n$, в інтервальному прямокутнику $\Omega(U_0)$ приймаємо "інтервальну довжину" $\langle L \rangle = \langle l, \nu_l \rangle$ зайнятої частини $\Omega(U_0)$ як результат розміщення в ній $\mathbf{C}_k(U_k)$, $k \in J_n$:

$$\langle L \rangle = \max_{k \in J_n} \rho(\mathbf{L}_0, \mathbf{fr}\, \mathbf{C}_k(U_k)),$$

де $\rho(\mathbf{L}_0, \mathbf{fr}\, \mathbf{C}_k)$ – інтервальна відстань [7] між інтервальною прямою $\mathbf{L}_0 : \mathbf{f}_1(U_0) = \mathbf{0}$, що бере участь у формуванні $\mathbf{fr}\,\Omega(U_0)$, та інтервально паралельній інтервальній координатній прямій, $O\langle Y \rangle$, і

$$\mathbf{fr}\,\mathbf{C}_k(U_k),\ k \in J_n.$$

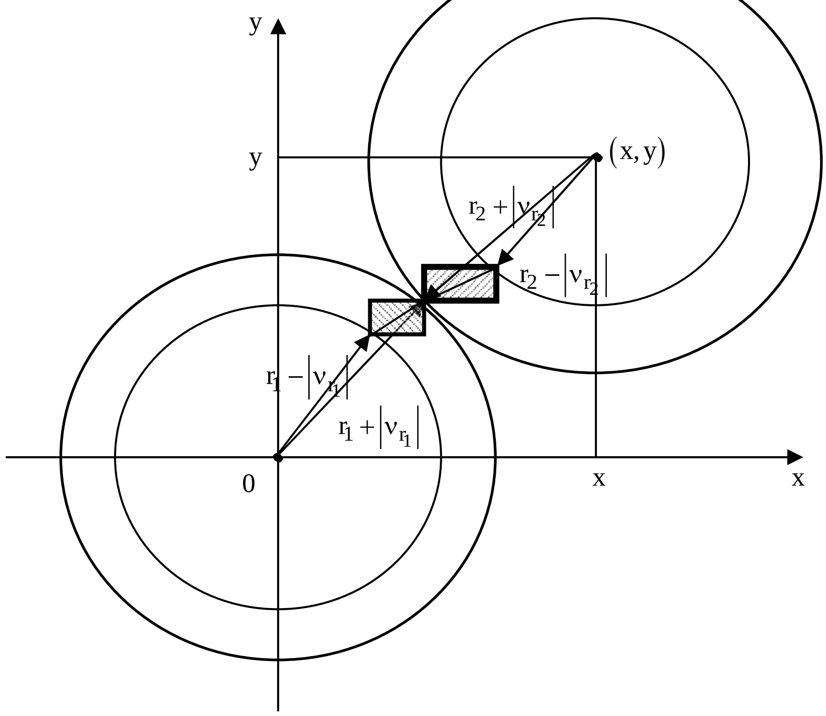

Рис. 2. Ілюстрація інтервального дотикання інтервальних кругів у підпросторі $R^2_{xy} \subset R^4$.

Інтервальну функцію $\langle L \rangle = \eta(U)$ назвемо інтервальною цільовою функцією.

Тоді інтервальна математична модель інтервальної оптимізаційної задачі пакування інтервальних кругів $\mathbf{C}_k(U_k)$, $k \in J_n$, в інтервальному прямокутнику $\Omega(U_0)$ може бути представлена таким чином

$$\inf_{(U,\langle L \rangle) \in \mathbf{D} \subset \mathbf{I}_s^{2n+1}\mathbf{R}} \langle L \rangle F; \tag{9}$$

$$\mathbf{D}: \begin{cases} \Phi_{0k}(U_0, U_k) \geq \mathbf{0},\ k \in J_n \\ \Phi_{ij}(U_i, U_j) \geq \mathbf{0},\ i, j \in J_n,\ i < j, \end{cases} \tag{10}$$

де $U = (U_1, U_2, ..., U_n) \in \mathbf{I}_s^{2n}\mathbf{R}$,

$U_i = (\langle X_i \rangle, \langle Y_i \rangle) \in \mathbf{I}_s^{2}\mathbf{R},\ i \in J_n$,

а $\Phi_{0k}(U_0, U_k)$ і $\Phi_{ij}(U_i, U_j)$ визначаються співвідношеннями (6) і (8).

Виходячи з визначення інтервальної нерівності [7] та співвідношень (6) – (7), нерівностям з (10) у просторі R^{4n+2} відповідають набори рівнянь і нерівностей:

$$\chi^1_{0k}: \left[\begin{array}{l} -x + x_k + l - r_k - \nu_l > 0; \\ \begin{cases} -x + x_k + l - r_k - \nu_l = 0; \\ -\nu_x + \nu_{x_k} - \nu_{r_k} + \nu_l \geq 0; \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\chi^1_{0k}: \left[\begin{array}{l} x - x_k - r_k + \nu_l > 0; \\ \begin{cases} x - x_k - r_k + \nu_l = 0; \\ \nu_x - \nu_{x_k} - \nu_{r_k} + \nu_l \geq 0; \end{cases} \end{array} \right. \tag{11}$$

$$\chi^3_{0k}: \left[\begin{array}{l} -y + y_k + l - r_k - \nu_w > 0; \\ \begin{cases} -y + y_k + l - r_k - \nu_w = 0; \\ -\nu_y + \nu_{y_k} - \nu_{r_k} + \nu_w \geq 0; \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\chi^4_{0k}: \left[\begin{array}{l} y - y_k - r_k - \nu_l > 0; \\ \begin{cases} y - y_k - r_k - \nu_l = 0; \\ \nu_x - \nu_{x_k} - \nu_{r_k} + \nu_l \geq 0; \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\chi_{ij}: \left[\begin{array}{l} (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 - (r_j + r_i + \nu_{r_j} + \nu_{r_i})^2 > 0; \\ \begin{cases} (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 - (r_j + r_i + \nu_{r_j} + \nu_{r_i})^2 = 0; \\ (\nu_{x_j} - \nu_{x_i})^2 + (\nu_{r_i} + \nu_{r_j})^2 - (\nu_{r_j} + \nu_{r_i})^2 \geq 0. \end{cases} \end{array} \right. \tag{12}$$

Занурімо інтервальну математичну модель (9) – (10) в евклідів простір.

Одержали математичну модель двохкритеріальної оптимізаційної задачі:

$$\inf_{(U_n,l,\nu_l)\in D\subset R^{4n+2}} (l,\nu_l); \quad (13)$$

$$D=\left(\bigcap_{t=1}^{4}\left(\bigcap_{k=1}^{n}\chi_{0k}^{t}\right)\right)\cap\left(\bigcap_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n}\chi_{ij}\right); \quad (14)$$

$$U_n =$$

$$=(x^1,\nu_{x^1},x_2^1,\nu_{x_2^1},x_1^2,\nu_{x_1^2},\ldots,x_1^n,\nu_{x_1^n},x_2^n,\nu_{x_2^n})\in R^{4n},$$

$$(l,\nu_l)=\mathbf{H}(\langle L\rangle)\ \ \mathbf{H}-\text{гомеоморфізм [7]},$$

$$H_{2n+1}(D)=D,\ \mathbf{D}\subset\mathbf{I}_s^{2n+1}\mathbf{R},\ D\subset R^{4n+2}.$$

Враховуючи особливості області допустимих ров’язків інтервальної оптимізаційної задачі (9) – (10), здійснюємо перехід від задачі (13) – (14) з векторною функцією цілі до послідовності однокритеріальних задач:

$$l_1=\min_{(U_n,l,\nu_l)\in D\subset R^{4n+2}} l; \quad (15)$$

$$\nu_l^{(1)}=\min_{(U_n,l,\nu_l)\in D\subset R^{4n+2}} \nu_l; \quad (16)$$

$$l_2=\min_{(U_n,l,\nu_l)\in D^*\subset R^{4n+2}} l; \quad (17)$$

$$D^*=\{(U_n,l,\nu_l)\in D \mid \nu_l=\nu_l^{(1)}\}.$$

Як відомо, точка множини D тоді і тільки тоді є розв’язком двохкритерійної задачі (13) – (14), коли вона є єдиним з точністю до еквівалентності розв’язком такої задачі:

$$\min_{(U_n,l,\nu_l)\in D'\subset R^{4n+2}} \nu_l;$$
$$D'=\{(U_n,l,\nu_l)\in D \mid l\le l'\};\quad l'\in[l_1,l_2]. \quad (18)$$

Загальна стратегія розв’язок задачі (18) може бути представлена таким чином:

1. Розв’язуємо задачу (15):

1) генеруємо послідовності об'єктів, які розміщуються, модифікованим методом околів, що звужуються [5, 11];

2) будуємо початкові точки методом оптимізації за групами змінних [1, 5] згідно послідовностям, що згенеровані;

3) здійснюємо пошук точок локального мінімуму методом можливих напрямів [5];

2. Розв’язуємо задачу (16) аналогічно (15):

3. Знаходимо множину Парето [12] методом прямокутників.

4. Знаходимо розв’язок задачі (18) методом послідовної оптимізації.

Висновки

Використаний в даній роботі підхід до моделювання задачі пакування кругів у смузі з урахуванням похибок дозволяє будувати адекватні і конструктивні математичні моделі реальних матеріальних об'єктів та їх взаємодій, а також обчислювати межі вихідних даних задачі при заданих межах вхідних параметрів, таким чином, строго визначаючи інтервал, якому обов’язково буде належати розв’язок.

Запропонована стратегія розв’язання задачі пакування кругів з урахуванням похибок може бути використана при проектуванні карт розкрою промислових матеріалів, при створенні маловідхідних технологій, при організації стрілянини під час бойових дій та ін.

Список літератури

1. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. – К.: Наук. думка, 1986. – 267 с.

2. Stoyan Yu. G., Yaskov G. A mathematical model and a solution method for the problem of placing various-sized circles into a strip // European journal of operational research. 156 (2004). – P. 590-600.

3. Рвачев В.Л., Стоян Ю.Г. Задача оптимального размещения круговых заготовок // Кібернетика. – № 3. – 1965. – С. 77-83.

4. M Locatelli., Raber U.. Packing equal circles in a square: a deterministic global optimization approach // Discrete Applied Mathematics 122. 2002. – P. 139-166.

5. Чугай А.М. Решение задачи упаковки кругов в выпуклый многоугольник с помощью модифицированного метода сужающихся окрестностей // Радиоэлектроника и інформатика. – 2005. – № 1. – С. 58-63.

6. Kaucher E. Interval analysis in the extended interval space IR // Comp.Suppl. – 1980. – P. 33-49.

7. Стоян Ю.Г. Введення в інтервальну геометрію: Навчальний посібник. – Х.: ХНУРЕ, 2006. – 98 с.

8. Евсеева Л.Г., Романова Т.Е, Шеховцов С.Б. Интервальные направленные множества в многомерных интервальных пространствах // Искусственный интеллект. – 2005. – № 4. – С. 169-176.

9. Stoyan Yu.G. Φ-function and its basic properties // Докл. АН Украины. Сер. А. – 2001. – № 8. – С. 112-117.

10. Евсеева Л.Г., Глушко Ю.Ю. Интервальные Φ-отображения 2D объектов // Геометрическое и компьютерное моделирование. – 2007. – Вып. 18. – С. 172-177.

11. Стоян Ю.Г., Соколовский В.З. Решение некоторых многоэкстремальных задач методом сужающихся окрестностей. – К.: Наук. думка, 1980. – 208 с.

12. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982. – 256 с.

Надійшла до редколегії 5.12.2007

Рецензент: д-р фіз.-мат. наук, проф. Т.Є. Романова, Інститут проблем машинобудування НАН України, Харків.